Федеральное агентство по образованию

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ

Часть 1 Издание второе

Дуополия Курно

Антагонистические игры

Смешанные стратегии

Нижний Новгород

2005

УДК 519.8

Моделирование выбора решений. Часть 1. Издание второе / Составитель А.В. Баркалов. - Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет, 2005.

Данное издание предназначено студентам, изучающим приложения математики для обоснования процедур выбора наилучших решений в условиях конфликта или неопределенности. В первом разделе на примере взаимодействия конкурирующих сторон описывается формальная модель конфликтной ситуации (игра) и определяются понятия рационального выбора (устойчивость - равновесие по Нэшу и эффективность - оптимальность по Парето). Во втором разделе введенные понятия применяются к анализу ситуаций выбора со строгим соперничеством - антагонистическим играм. В третьем разделе рассматривается расширение конечной антагонистической игры, получаемое введением случайности в выбор решений.

Основные теоретические понятия и утверждения приводятся в виде *определений* и *теорем,* завершающихся знаком ■, их применение иллюстрируется *примерами*. В конце каждого раздела содержатся упражнения для контроля практических навыков владения методами нахождения наилучших стратегий в условиях конфликта. Они охватывают приемы вычисления минимаксов и максиминов функций, определенных в ограниченных областях, способы поиска оптимальных стратегий в конечных 2×2 и $2 \times n$ играх.

Методическая разработка может быть полезна всем, кто интересуется проблематикой моделирования процессов выбора и поиска наилучших решений.

Составитель А.В. Баркалов, к.ф.-м.н., доц. каф МО ЭВМ

Рецензент Д.И. Коган, д.т.н., проф. каф ИАНИ

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНФЛИКТОВ

При исследовании различного рода социально-экономических ситуаций приходится сталкиваться с наличием множества заинтересованных участников и зависимостью эффективности решения отдельного участника от решений других. Так, доход производителя некоторого товара зависит не только от цен на этот товар, но и от того, сколько товара решит приобрести потребитель по этой цене. Соперничество производителей за рынки сбыта, спортивные состязания, военные столкновения представляют собой примеры подобных явлений.

Ситуации, в которых интересы участников не совпадают, называют конфликтными. Построением моделей конфликтных ситуаций, разработкой понятий наилучшего выбора и методов их отыскания занимается дисциплина, называемая теорией игр. Теория игр как математическая теория выбора рациональных решений в условиях конфликта или кооперации, оформилась в середине двадцатого столетия после выхода в 1944 году книги Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна "Теория игр и экономическое поведение". В соответствии с терминологией основоположников, математические модели конфликтных ситуаций называются играми, участники конфликта - игроками, а их действия - решениями или стратегиями. Несмотря на упрощенность рассматриваемых моделей, теория игр предоставляет исследователю набор инструментов для анализа социально-экономических ситуаций, устанавливает ряд фундаментальных понятий и фактов, позволяющих глубже понимать и описывать конфликтные ситуации.

1.1. ДУОПОЛИЯ С НАЗНАЧЕНИЕМ ВЫПУСКОВ

Рассмотрим дуополию, в которой конфликтующими сторонами являются производители, выпускающие однотипный товар, в условиях зависимости цен от суммарного выпуска товара. Соответствующая этой экономической ситуации игра впервые была изучена в девятнадцатом веке А. Курно, объяснившим природу поведения производителей, конкурирующих на одном и том же рынке.

Пусть имеются два производителя однотипного товара, каждый из которых может производить его в объеме $x_i, i = 1,2$, неся при этом расходы $c_i(x_i)$. Товар подается на рынке по сложившейся там цене *p*, которая предполагается монотонно убывающей функцией от совокупного предложения товара $x = x_1 + x_2$. С учетом введенных обозначений, прибыль *i*-го производителя от выпуска товара в объеме x_i описывается функцией

$$M_i(x_1, x_2) = x_i * p(x) - c_i(x_i), \quad (1.1)$$

где

$x = x_1 + x_2$ - суммарный выпуск продукции.

В рамках данной модели естественно поставить вопрос об уровнях выпуска продукции, обеспечивающих максимальную прибыль каждому из производителей.

С теоретико-игровой точки зрения, приведенное описание представляет собой бескоалиционную (т.е. стороны принимают свои решения независимо друг от друга) *игру* двух лиц с непротивоположными интересами

$$Г =< X_1, X_2, M_1(x_1, x_2), M_2(x_1, x_2) >, \quad (1.2)$$

где

$X_i = [0, a_i],\ a_i > 0,\ \ i = 1,2$ - множества стратегий игроков,

$x_i \in X_i, i = 1,2$ - стратегии игроков, а

$M_i(x_1, x_2) = x_i * p(x) - c_i(x_i),\ \ i = 1,2$ - функции выигрыша (прибыли) игроков.

Модель конфликта в форме (1.2) называют *игрой в нормальной форме*. Цель каждой из сторон в игре двух лиц состоит в максимизации функции выигрыша путем надлежащего выбора стратегий, осуществляемого независимо друг от друга.

Рассмотрению дуополии предпошлем анализ монополии - задаче выбора решения с одним участником.

1.2. МОНОПОЛИЯ С НАЗНАЧЕНИЕМ ВЫПУСКА

Пусть производитель некоторого товара производит его в количестве x_1, неся при этом расходы $c_1(x_1)$. Этот товар поставляется на рынок, где он будет продан по зависящей от предложения цене $p(x_1)$, являющейся монотонно убывающей функцией от предложения товара x_1. При предположении о ненасыщаемости рынка весь товар будет продан, и производитель получит прибыль

$$M_1(x_1) = x_1 * p(x_1) - c_1(x_1). \qquad (1.3)$$

Для отыскания уровня выпуска продукции x_1^0, максимизирующего доход монополиста, примем следующие предположения о параметрах модели.

Предположим, что:

- производственные возможности монополиста ограничены некоторой величиной, а именно

$$x_1 \in X_1 = [0,1];$$

- цена линейно зависит от предложения:

$$p(x_1) = 1 - x_1, x_1 \in X_1;$$

- затраты на производство (издержки) постоянны на выпуск единицы продукции при увеличении масштабов производства и составляют

$$c_1(x_1) = C_1 * x_1,$$

где

$$C_1 = 1/2 .$$

Таким образом, для определения наилучшего объема выпуска продукции получается оптимизационная задача

$$M_1(x_1) = x_1 * (1 - x_1) - 1/2 * x_1 \xrightarrow[x_1 \in X_1]{} \max . \qquad (1.4)$$

Заметим, что функция $M_1(x_1)$ из (1.4) является квадратичной выпуклой вверх функцией (рис. 1.1).

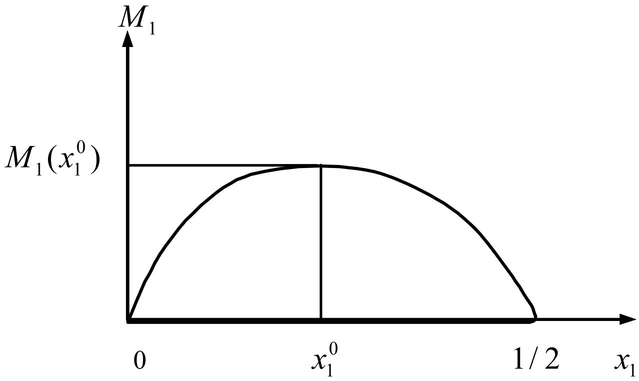

Рис. 1.1. График функции прибыли монополиста.

Ее максимум достигается в точке зануления первой производной:

$$\frac{d}{dx_1} M_1(x_1) = 1 - 2 * x_1 - 1/2 = 0 ,$$

откуда решением задачи (1.4) является

$$x_1^0 = 1/4, M_1(x_1^0) = 1/16 . \qquad (1.5)$$

1.3. ТОЧКА РАВНОВЕСИЯ В ДУОПОЛИИ С НАЗНАЧЕНИЕМ ВЫПУСКОВ

Пусть теперь, в отличие от монополии, имеются два производителя одного и того же товара, характеризуемые количествами выпускаемой продукции $x_i, i = 1,2$, и затратами $c_i(x_i)$. В этом случае на рынок будет поставлено $x = x_1 + x_2$ единиц товара, а прибыль при условии зависимости цены от суммарного предложения товара описывается выражениями (1.1).

Как и в случае монополии, примем дополнительные предположения о параметрах модели:

- производственные возможности сторон ограничены, а именно

$$x_i \in X_i = [0, 1/2], i = 1,2;$$

- цена линейно зависит от суммарного предложения товара

$$p(x) = 1 - x, x = x_1 + x_2;$$

- затраты на производство постоянны на выпуск единицы продукции и составляют

$$c_i(x_i) = C_i * x_i,$$

где

$$C_i = 1/2, i = 1,2.$$

В случае дуополии для определения наилучших уровней выпуска продукции получаются две оптимизационные задачи

$$M_i(x_1, x_2) = x_i(1 - x_1 - x_2) - 1/2\, x_i \xrightarrow[x_i \in X_i]{} \max, \qquad (1.6)$$

где $i = 1,2$.

Как видно из (1.6), решение об уровне выпуска одной стороны влияет на прибыль другой стороны - имеет место конфликт интересов. Если бы, например, первой стороне перед принятием решения об объеме производства был известен уровень выпуска продукции x_2 второй стороны, то решение задачи максимизации $M_1(x_1, x_2)$ можно осуществить аналогично решению задачи (1.4) для случая монополии с назначением выпуска:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} M_1(x_1, x_2) = 1 - x_2 - 2 * x_1 - 1/2 = 0,$$

откуда

$$x_1^+ = \frac{1/2 - x_2}{2}, M_1(x_1^+, x_2) = \left(\frac{1/2 - x_2}{2}\right)^2. \qquad (1.7)$$

Выражение x_1^+ из (1.7) представляет собой наилучший ответ первой стороны на стратегию x_2 второй стороны. Вычисляя подобным способом наилучший ответ x_2^+ второго производителя на стратегию x_1 первого, в силу симметрии задачи, имеем

$$x_2^+ = \frac{1/2 - x_1}{2}, M_2(x_1, x_2^+) = \left(\frac{1/2 - x_1}{2}\right)^2. \qquad (1.8)$$

Предположим теперь, что производители выбрали такие уровни выпуска продукции (x_1^0, x_2^0), что

$$x_1^0 = \frac{1/2 - x_2^0}{2},\ x_2^0 = \frac{1/2 - x_1^0}{2}, \qquad (1.9)$$

т.е. стратегия x_1^0 первой стороны является наилучшим ответом на стратегию x_2^0 второй, а стратегия x_2^0 второй стороны - наилучшим ответом на стратегию x_1^0 первой.

Пара стратегий (x_1^0, x_2^0), удовлетворяющая соотношениям (1.9), называется *точкой равновесия* Курно (либо *точкой равновесия* Нэша) дуополии - ни один из производителей, стремящихся максимизировать прибыль, при выборе стратегий (x_1^0, x_2^0) из (1.9), не заинтересован в их изменении на основании выражений (1.7-8). Из соотношений (1.9) следует, что равновесные уровни выпуска продукции и соответствующие им выигрыши составляют

$$(x_1^0, x_2^0) = (1/6, 1/6), (M_1(x_1^0, x_2^0), M_2(x_1^0, x_2^0)) = (1/36, 1/36). \quad (1.10)$$

Точка равновесия по Нэшу (x_1^0, x_2^0) в дуополии может быть получена как результат динамического процесса принятия "близоруких" решений, называемого процедурой нащупывания по Курно. Процедура нащупывания начинается из некоторой начальной точки $(x_1(0), x_2(0))$. Предположим, что игроки ходят по очереди, выбирая наилучшие ответы на текущую стратегию партнера в соответствии с (1.7-8), первый игрок в нечетные, а второй - в четные моменты времени:

$$x_1(t) = \frac{1/2 - x_2(t-1)}{2}, t = 1,3,5,...,$$

$$x_2(t) = \frac{1/2 - x_1(t-1)}{2}, t = 2,4,6,....$$

Пусть, для определенности, $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$. В этом случае последовательность точек $\{(x_1(t), x_2(t)), t = 0,1,2,...\}$ имеет вид

$$(x_1(0), x_2(0)) = (0,0),$$

$$(x_1(1), x_2(1)) = (\frac{1/2 - x_2(0)}{2}, x_2(0)) = (\frac{1}{4}, 0),$$

$$(x_1(2), x_2(2)) = (x_1(1), \frac{1/2 - x_1(1)}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}),$$

$$(x_1(3), x_2(3)) = (\frac{1/2 - x_2(2)}{2}, x_2(2)) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{8}), \text{ и т.д.}$$

Такая последовательность изображена на рис. 2.2.

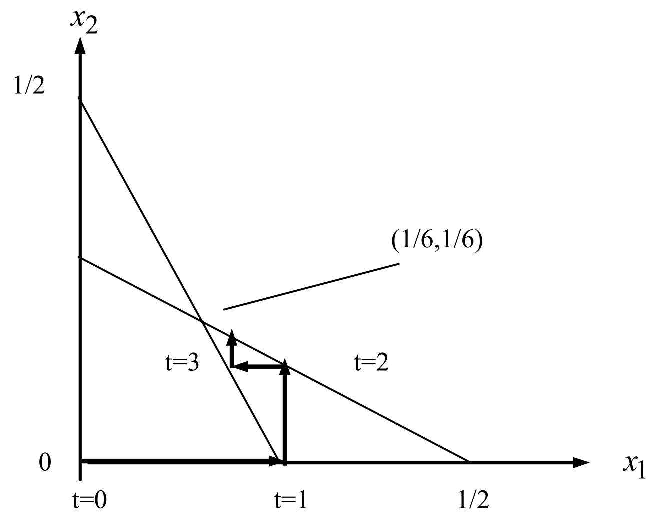

Рис. 2.2. Процедура нащупывания по Курно.

Осуществляя построение других последовательностей, начинающихся из других начальных точек, можно убедиться, что из любой начальной точки последовательности сходятся к точке (1/6, 1/6), являющейся точкой пересечения прямых (1.7-8). К сожалению, процедура нащупывания по Курно не всегда сходится в играх общего вида.

Сравнивая выражения (1.5) и (1.10), описывающие наилучшие решения производителей и их доходы в условиях монополии и дуополии соответственно, можно сделать вывод о том, что конкуренция приводит к увеличению суммарного выпуска продукции, но суммарные доходы конкурентов меньше, чем доход монополиста.

1.4. ТОЧКИ РАВНОВЕСИЯ И ЭФФЕКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для задачи выбора наилучшего решения в форме игры (1.2) свойство незаинтересованности сторон в изменении своего поведения может быть представлено в виде следующего определения.

Определение 1.1. Пара стратегий (x_1^0, x_2^0) называется *точкой равновесия по Нэшу* (либо *ситуацией равновесия по Нэшу*) в игре двух лиц $\Gamma =< X_1, X_2, M_1(x_1, x_2), M_2(x_1, x_2) >$, если

$$(\forall x_1)\, M_1(x_1^0, x_2^0) \geq M_1(x_1, x_2^0)\,, \tag{1.11}$$

$$(\forall x_2)\, M_2(x_1^0, x_2^0) \geq M_2(x_1^0, x_2)\,.\blacksquare$$

Эквивалентность применительно к дуополии соотношений (1.11) и (1.7-9) становится очевидной, если (1.11) записать в форме

$$M_1(x_1^0, x_2^0) = \max_{x_1 \in X_1} M_1(x_1, x_2^0)\,,$$

$$M_2(x_1^0, x_2^0) = \max_{x_2 \in X_2} M_2(x_1^0, x_2)\,.$$

Как отмечалось, суммарные доходы конкурирующих сторон в дуополии при применении ими равновесных стратегий меньше, чем у монополиста при выборе им оптимального уровня выпуска продукции (максимизирующего прибыль). Однако в дуополии имеются стратегии, обеспечивающие такие же суммарные результаты, как и в монополии. Действительно, при выборе уровней выпуска конкурентов

$$\overline{x_1} = 1/8, \overline{x_2} = 1/8\,, \tag{1.12}$$

(равных половине от оптимального уровня выпуска продукции монополиста) доходы сторон, в соответствии с (1.1), составят

$$(M_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}), M_2(\overline{x_1}, \overline{x_2})) = (1/32, 1/32)\,. \tag{1.13}$$

Однако решения (1.12) не являются равновесными - каждой из сторон выгодно от них отклониться, что проверяется подстановкой (1.12) в соотношения (1.7-8). Следовательно, в дуополии имеет место несовпадение устойчивости ситуации, определяемой как равновесие по Нэшу, и выгодности ее результатов для конкурентов.

Выгодность результатов в теоретико-игровых моделях формализуется понятием т.н. эффективных (либо оптимальных по Парето) решений.

Определение 1.2. Пара стратегий $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ называется *оптимальной по Парето (эффективной)* в игре двух лиц $\Gamma = < X_1, X_2, M_1(x_1, x_2), M_2(x_1, x_2) >$, если из неравенств

$$M_1(x_1, x_2) \geq M_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}), M_2(x_1, x_2) \geq M_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \quad (1.14)$$

следует

$$M_1(x_1, x_2) = M_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}), M_2(x_1, x_2) = M_2(\overline{x_1}, \overline{x_2})$$

(т.е. выигрыши $M_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}), M_2(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ не могут быть увеличены одновременно). ■

Покажем, что решения (1.12) являются оптимальными по Парето в дуополии. Действительно, подставляя уровни выпуска (1.12) в неравенства (1.14), с учетом выражений (1.1) выигрышей сторон, получаем

$$\begin{aligned} M_1(x_1, x_2) &= x_1(1 - x_1 - x_2) - \tfrac{1}{2} x_1 \geq M_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = \tfrac{1}{32}, \\ M_2(x_1, x_2) &= x_2(1 - x_1 - x_2) - \tfrac{1}{2} x_2 \geq M_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = \tfrac{1}{32}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

что дает в результате суммирования одно неравенство

$$(x_1 + x_2)(\tfrac{1}{2} - (x_1 + x_2)) \geq \tfrac{1}{16}.$$

Вследствие того, что левая часть последнего неравенства идентична функции прибыли монополиста в (1.4), максимум которой равнялся 1/16, суммарный выпуск продукции должен равняться оптимальному уровню выпуска продукции монополиста, т.е.

$$x_1 + x_2 = 1/4. \tag{1.16}$$

С учетом (1.16), неравенства (1.15) приобретают вид

$$1/4\, x_1 \geq 1/32,\ 1/4\, x_2 \geq 1/32,$$

или

$$x_1 \geq 1/8,\ x_2 \geq 1/8.$$

Следовательно, на основании равенства (1.16), единственным решением системы неравенств (1.15) есть $x_1 = 1/8, x_2 = 1/8$, что и доказывает эффективность решений (1.12).

1.5. ЗАДАНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти ситуации равновесия и эффективные решения в дуополии Курно с убывающими затратами на выпуск единицы продукции при увеличении масштабов производства:

$$c_i(x_i) = C_i * x_i - D_i * x_i^2,$$

где

$$C_i = 1/2,\ D_i = 3/4,\ i = 1,2,$$

а

$$p(x) = \max(1 - x, 0),\ x = x_1 + x_2.$$

Как следует из анализа дуополии Курно, в играх двух лиц может наблюдаться несовпадение устойчивых (образующих ситуацию равновесия) и взаимовыгодных (оптимальных по Парето) решений. Поэтому представляет интерес выделение такого класса игр, в котором имело бы место совпадение устойчивости и эффективности. Одним из таких классов являются игры с противоположными интересами - антагонистические игры.

2.1. СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ

Определение 2.1. Игра двух лиц $\Gamma = \langle X_1, X_2, M_1(x_1,x_2), M_2(x_1,x_2) \rangle$ называется *антагонистической*, если при любых стратегиях игроков значения их функций выигрыша равны по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$M_1(x_1,x_2) = -M_2(x_1,x_2) . \blacksquare \tag{2.1}$$

В силу условия (2.1) описание антагонистической игры может быть упрощено - функции выигрыша игроков выражаются через функцию $M(x_1,x_2)$, называемую *ядром* игры, такую, что

$$M(x_1,x_2) = M_1(x_1,x_2) = -M_2(x_1,x_2) , \tag{2.2}$$

Исходя из (2.2), ядро игры представляет собой для первого игрока функцию выигрыша, а для второго игрока - функцию проигрыша. Поэтому под антагонистической игрой обычно понимают набор

$$\Gamma = \langle X, Y, M(x,y) \rangle , \tag{2.3}$$

где

X, Y - множества стратегий первого и второго игроков соответственно,

$x \in X, y \in Y$ - стратегии игроков, а

$M(x, y)$ - ядро игры (являющееся функцией выигрыша первого и функцией проигрыша второго игрока).

В антагонистической игре определение ситуации равновесия (x^0, y^0), после подстановки ядра $M(x, y)$ вместо функций выигрыша первого и $-M(x, y)$ вместо функции выигрыша второго игрока в соотношения (1.11), приобретает вид двойного неравенства

$$(\forall x, y)\, M(x, y^0) \le M(x^0, y^0) \le M(x^0, y)\,. \qquad (2.4)$$

Определение 2.2. Пара стратегий (x^0, y^0), удовлетворяющая неравенствам (2.4), называется *седловой точкой* ядра $M(x, y)$.■

Отметим, что определение седловой точки (2.4) несколько отличается от аналогичного понятия в геометрии. Так, например, у ядра $M(x, y) = x - y$, определенного на квадрате $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, имеется седловая точка $(x^0, y^0) = (1,1)$, так как $M(x,1) = x - 1 \le M(1,1) = 0 \le M(1, y) = 1 - y$ при $x \le 1, y \le 1$.

Подставляя ядро $M(x, y)$ вместо функций выигрыша игроков в определение оптимальных по Парето решений (1.14), легко убедиться в том, что все пары стратегий в антагонистической игре являются эффективными, так как из получающейся системы неравенств

$$M(x, y) \ge M(\overline{x}, \overline{y}), -M(x, y) \ge -M(\overline{x}, \overline{y})$$

следует $M(x, y) = M(\overline{x}, \overline{y})$.

Таким образом, ситуация равновесия в антагонистической игре (седловая точка ядра), если она существует, будет оптимальной по Парето.

Установим некоторые свойства седловых точек.

Теорема 2.1. Если у ядра антагонистической игры $M(x,y)$ имеются две седловые точки (x^0, y^0) и (x^*, y^*), то:

- $M(x^0, y^0) = M(x^*, y^*)$;

- точки (x^0, y^*) и (x^*, y^0) также являются седловыми точками ядра.

Доказательство. Из определения седловой точки следует, что

$$(\forall x, y)\, M(x, y^0) \le M(x^0, y^0) \le M(x^0, y),$$

$$(\forall x, y)\, M(x, y^*) \le M(x^*, y^*) \le M(x^*, y).$$

Выберем в первом двойном неравенстве $x = x^*, y = y^*$, а во втором - $x = x^0, y = y^0$. Тогда справедлива цепочка неравенств

$$M(x^*, y^0) \le M(x^0, y^0) \le M(x^0, y^*) \le M(x^*, y^*) \le M(x^*, y^0),$$

из которой следует, в силу совпадения крайних элементов цепочки, первое утверждение теоремы. Для доказательства второго используем доказанное равенство

$$M(x^0, y^0) = M(x^0, y^*) = M(x^*, y^*).$$

После приписывания к последнему равенству слева левой части определения седловой точки (x^*, y^*), и справа правой части определения седловой точки (x^0, y^0), получаем

$$M(x, y^*) \le M(x^0, y^0) = M(x^0, y^*) = M(x^*, y^*) \le M(x^0, y).$$

Если из последнего неравенства выбросить значения ядра в точках (x^0, y^0) и (x^*, y^*), то получится определение седловой точки (x^0, y^*):

$$(\forall x, y)\, M(x, y^*) \le M(x^0, y^*) \le M(x^0, y),$$

что и требовалось. ■

2.2. ПРИНЦИП ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим проблему выбора наилучшего решения в антагонистической игре с другой точки зрения. Предположим, что при выборе некоторой стратегии $x \in X$ первый игрок, принимая во внимание противоположность интересов, оценивает последствия от ее применения по наихудшему случаю:

$$\underline{M}(x) = \min_{y \in Y} M(x, y). \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) представляет собой математическое выражение *принципа гарантированного результата* в антагонистической игре (2.3) для первого игрока: при оценке последствий решения следует рассчитывать на наихудшие значения неконтролируемых параметров. В этих условиях первому игроку естественно выбрать ту стратегию x^*, которая максимизирует его гарантированный выигрыш $\min\limits_{y \in Y} M(x, y)$:

$$\min_{y \in Y} M(x^*, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y) = \underline{v}. \tag{2.6}$$

Определение 2.3. Стратегия x^* первого игрока, удовлетворяющая уравнению (2.6), называется *оптимальной по гарантированному результату*, а максимальный гарантированный выигрыш первого игрока в антагонистической игре называется *нижней ценой* (нижним значением) игры и обозначается $\underline{v}$. ■

Применяя принцип гарантированного результата для оценки последствий от выбора стратегии $y \in Y$ вторым игроком (с точки зрения которого ядро $M(x, y)$ является функцией проигрыша), естественно предположить, что при этом наилучшей стратегией для него будет стратегия y^*, минимизирующая гарантированный проигрыш второго игрока $\max\limits_{x \in X} M(x, y)$:

$$\max_{x\in X} M(x, y^*) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} M(x, y) = \overline{v}\,. \qquad (2.7)$$

Определение 2.4. Стратегия y^* второго игрока, удовлетворяющая уравнению (2.7), называется оптимальной по гарантированному результату, а минимальный гарантированный проигрыш второго игрока в антагонистической игре называется *верхней ценой* (верхним значением) игры и обозначается $\overline{v}$. ■

Теорема 2.2. Пусть $M(x, y)$ - вещественная функция, определенная на $X \times Y$, и существуют $\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} M(x, y)$, $\overline{v} = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} M(x, y)$. Тогда $\underline{v} \le \overline{v}$.

Доказательство. Из определения минимума и максимума следует, что

$$(\forall x, y)\ \min_{y\in Y} M(x, y) \le M(x, y) \le \max_{x\in X} M(x, y)\,,$$

или

$$(\forall x, y)\ \min_{y\in Y} M(x, y) \le \max_{x\in X} M(x, y)\,. \qquad (2.8)$$

Поскольку в левой части неравенства (2.8) x любое, то

$$(\forall y)\ \max_{x\in X}\min_{y\in Y} M(x, y) \le \max_{x\in X} M(x, y)\,. \qquad (2.9)$$

В правой части неравенства (2.9) y любое, и поэтому

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} M(x, y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} M(x, y)\,,$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 2.1. Вычислить максимин и минимакс, если

$$M(x, y) = (x - y)^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\,.$$

Решение. Вначале вычислим максимин. Так как функция $(x-y)^2$ является квадратичной выпуклой вниз функцией по переменной y, то ее минимум по переменной y будет достигаться в точке зануления первой производной по y:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x-y)^2 = -2(x-y) = 0,$$

откуда $y = x$. Поскольку найденная точка принадлежит области изменения аргумента y,

$$\underline{v} = \max_{0\le x\le 1}\min_{0\le y\le 1}(x-y)^2 = \max_{0\le x\le 1}(x-x)^2 = \max_{0\le x\le 1} 0 = 0 .$$

Функция $(x-y)^2$ является квадратичной выпуклой вниз функцией и по переменной x. Поэтому ее максимум по переменной x будет достигаться, в зависимости от значения y, либо в точке $x = 0$, либо в точке $x = 1$, вследствие чего

$$\bar{v} = \min_{0\le y\le 1}\max_{0\le x\le 1}(x-y)^2 = \min_{0\le y\le 1}\max(y^2,(1-y)^2) =$$

$$= \min_{0\le y\le 1}\begin{cases} y^2, y \ge 1/2, \\ (1-y)^2, y \le 1/2 \end{cases} =$$

$$= \min(\min_{0\le y\le 1/2}(1-y)^2, \min_{1/2\le y\le 1} y^2) = \min(1/4, 1/4) = 1/4. \blacksquare$$

Как следует из теоремы 2.2, либо $\underline{v} < \bar{v}$, либо $\underline{v} = \bar{v}$. Равенство нижней цены игры верхней содержательно означает равенство возможностей игроков - сколько в состоянии выиграть первый, столько может позволить себе проиграть второй. Покажем, что именно в этом случае существует седловая точка ядра игры.

Теорема 2.3. Для того, чтобы функция $M(x,y)$ на произведении $X \times Y$ имела седловые точки, необходимо и достаточно существование и совпадение величин $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} M(x, y)$ и $\min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} M(x, y)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $M(x, y)$ имеет седловую точку (x^0, y^0), т.е.

$$(\forall x, y)\, M(x, y^0) \le M(x^0, y^0) \le M(x^0, y).$$

Поскольку $M(x^0, y^0)$ является константой, ограничивающей $M(x, y^0)$ сверху, а $M(x^0, y)$ снизу, то справедливы неравенства

$$\max_{x \in X} M(x, y^0) \le M(x^0, y^0) \le \min_{y \in Y} M(x^0, y). \qquad (2.10)$$

Далее, на основании определения минимума и максимума функции, очевидно справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y) \le \max_{x \in X} M(x, y^0), \\ &\min_{y \in Y} M(x^0, y) \le \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y). \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Сопоставляя (2.10) и (2.11), получим

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y) \le M(x^0, y^0) \le \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y).$$

Но согласно теореме 2.2, справедливо обратное соотношение между минимаксом и максимином. Это может быть только тогда, когда

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y), \qquad (2.12)$$

и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть справедливо равенство (2.12), и внешние экстремумы в (2.12) достигаются в точках x^*, y^*, т.е.

$$\min_{y \in Y} M(x^*, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y),$$

$$\max_{x \in X} M(x, y^*) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y).$$

Покажем, что (x^*, y^*) -седловая точка функции $M(x, y)$. Из (2.12) вытекает справедливость равенства

$$\min_{y \in Y} M(x^*, y) = \max_{x \in X} M(x, y^*),$$

откуда из определения максимума и минимума функции следует

$$M(x^*, y^*) \geq \min_{y \in Y} M(x^*, y) = \max_{x \in X} M(x, y^*) \geq M(x^*, y^*).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\max_{x \in X} M(x, y^*) = M(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} M(x^*, y). \qquad (2.13)$$

Тогда на основании определения максимума и минимума из (2.13) получается

$$(\forall x, y)\ M(x, y^*) \leq M(x^*, y^*) \leq M(x^*, y),$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

Из теоремы 2.3 следует, что в случае совпадения верхней и нижней цен игры, стратегии игроков, оптимальные по гарантированному результату, образуют седловую точку ядра игры.

Определение 2.5. Тройка

$$(x^0, y^0, v),$$

где

x^0, y^0 - оптимальные по гарантированному результату стратегии игроков, а

$v = \underline{v} = \overline{v}$ - *цена* игры,

называется *решением* антагонистической игры. ■

Пример 2.2. Установить, имеет ли седловую точку функция

$$M(x,y)=\begin{cases}1-2x, x>y,\\ 0, x=y,\\ 2y-1, x<y,\end{cases} \quad \text{в области } 0\le x\le 1, 0\le y\le 1.$$

Решение. Для отыскания седловой точки воспользуемся теоремой 2.3 - проверим совпадение нижней и верхней цены игры.

$$\underline{v}=\max_{0\le x\le 1}\min_{0\le y\le 1}M(x,y)=$$

$$=\max_{0\le x\le 1}\min(\min_{0\le y<x}(1-2x),\min_{y=x}(0),\min_{x<y\le 1}(2y-1))=$$

$$=\max_{0\le x\le 1}\min(1-2x,0,2x-1)=\max_{0\le x\le 1}\begin{cases}2x-1, x\le 1/2,\\ 1-2x, x\ge 1/2\end{cases}=$$

$$=\max(\max_{0\le x\le 1/2}(2x-1),\max_{1/2\le x\le 1}(1-2x))=\max(0,0)=0,$$

причем

$$x^0=1/2.$$

$$\overline{v}=\min_{0\le y\le 1}\max_{0\le x\le 1}M(x,y)=$$

$$=\min_{0\le y\le 1}\max(\max_{0\le x<y}(2y-1),\max_{x=y}(0),\max_{y<x\le 1}(1-2x))=$$

$$=\min_{0\le y\le 1}\max(2y-1,0,1-2y)=\min_{0\le y\le 1}\begin{cases}1-2y, y\le 1/2,\\ 2y-1, y\ge 1/2\end{cases}=$$

$$=\min(\min_{0\le y\le 1/2}(1-2y),\min_{1/2\le y\le 1}(2y-1))=\min(0,0)=0,$$

причем

$$y^0=1/2.$$

Так как максимин и минимакс совпадают, то точка $(x^0,y^0)=(1/2,1/2)$ является седловой.

Проверка решения. Проверим для точки $(x^0, y^0) = (1/2, 1/2)$ выполнение определения седловой точки, подставляя ее в неравенства (2.4):

$$M(x, 1/2) = \begin{cases} 1 - 2x, \ x > 1/2, \\ 0, \ x = 1/2, \\ 0, \ x < 1/2 \end{cases} \le M(1/2, 1/2) = 0,$$
$$M(1/2, 1/2) = 0 \le M(1/2, y) = \begin{cases} 0, \ y < 1/2, \\ 0, \ y = 1/2, \\ 2y - 1, \ y > 1/2. \end{cases} \quad . \qquad (2.14)$$

Действительно, левая часть двойного неравенства (2.14) $1 - 2x \le 0$ верна при $x \ge 1/2$, а правая часть - $0 \le 2y - 1$ - верна при $y \ge 1/2$. ■

2.3. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Определение 2.6. Антагонистическая игра, в которой у каждого из игроков конечное множество стратегий, называется *матричной игрой*. ■

Данное определение связано с возможностью описания игры с конечным множеством стратегий у игроков в виде прямоугольной таблицы (матрицы), в которой строки $i, 1 \le i \le m$, соответствуют стратегиям первого игрока, столбцы $j, 1 \le j \le n$, - стратегиям второго, а на пересечениях строк и столбцов указаны выигрыши первого игрока $a_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. Такая матрица, представляющая собой ядро конечной антагонистической игры, называется матрицей игры, или матрицей выигрышей,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим в матричной игре стратегии первого игрока индексом $i, 1 \le i \le m$, а стратегии второго - индексом $j, 1 \le j \le n$. С учетом введенных обозначений, определение седловой точки для матричной игры приобретает следующий вид.

Определение 2.7. Пара стратегий (i^0, j^0) называется *седловой точкой матрицы* игры, если выполняется следующее двойное неравенство:

$$\forall (i,j)\ a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j}\,. \blacksquare \qquad (2.15)$$

На основании теоремы 2.3, для существования в матрице игры седловых точек, необходимо и достаточно совпадения минимакса и максимина:

$$\max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij} = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le n} a_{ij}\,.$$

Нахождение минимакса и максимина для матрицы A может быть проведено по следующей схеме:

$$\begin{array}{l}
\left(\left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{matrix} \min\limits_j a_{1j} \\ \min\limits_j a_{2j} \\ \dots \\ \min\limits_j a_{mj} \end{matrix}\right)\right. \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \\
\max\limits_i a_{i1}\ \max\limits_i a_{i2} \dots \max\limits_i a_{in} \\
\qquad \min\limits_{\mathrm{j}} \max\limits_i a_{ij}
\end{array} \qquad . \quad (2.16)$$

Пример 2.3. Найти седловые точки в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Отыскание седловых точек осуществим по схеме (2.16):

$$\begin{array}{lccccc}
 & & & & \min\limits_j a_{ij} & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \\
 & \langle 4\rangle & 5 & \langle 4\rangle & 4 & 4 \\
 & 3 & 0 & 1 & 0 & \\
\max\limits_i a_{ij} & 4 & 5 & 4 & & \\
\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} & & 4 & & &
\end{array}$$

Так как нижняя цена игры совпадает с верхней, то на основании теоремы 2.3 в матрице имеются седловые точки. В соответствии с (2.6-7), они есть

$$(i^0, j^0) = (1{,}1),\ (i^*, j^*) = (1{,}3),\ v = 4$$

(заметим, что, как доказано в теореме 2.1, значения в седловых точках совпадают). ■

2.4. ЗАДАНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Имеют ли седловые точки функции:

1.1. $M(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2, x \ge y, \\ y^2, x < y, \end{cases}$ в области $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$;

1.2. $M(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2, x \ge y, \\ 1 - (1-y)^2, x < y, \end{cases}$ в области $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$;

1.3. $M(x,y) = \begin{cases} (1-x)^2, x \ge y, \\ y^2, x < y, \end{cases}$ в области $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$;

1.4. $M(x,y) = \begin{cases} (1-x)^2, x \ge y, \\ 1 - (1-y)^2, x < y, \end{cases}$ в области $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$;

1.5. $M(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2, x \ge y, \\ y, x < y, \end{cases}$ в области $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$;

1.6. $M(x,y)=\begin{cases}(1-x)^2, x\ge y,\\ y, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.7. $M(x,y)=\begin{cases}1-x, x\ge y,\\ y^2, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.8. $M(x,y)=\begin{cases}1-x, x\ge y,\\ 1-(1-y)^2, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.9. $M(x,y)=\begin{cases}x-y, x\ge y,\\ y-x, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

1.10. $M(x,y)=\begin{cases}5x-3y, x\ge y,\\ y-x, x<y,\end{cases}$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

2. Найти седловую точку в матрице:

2.1. $A=\begin{pmatrix}-15 & -4 & -17 & 15 & 9\\ -9 & -5 & -7 & 4 & 11\\ 13 & 14 & 13 & 17 & 18\\ -15 & -3 & -10 & 5 & 9\end{pmatrix}$;

2.2. $A=\begin{pmatrix}-11 & -11 & -15 & 13 & -6\\ -10 & -13 & -8 & 0 & -5\\ 14 & 5 & -6 & 5 & 12\\ -4 & 18 & -16 & 9 & -9\end{pmatrix}$;

2.3. $A=\begin{pmatrix}7 & -10 & 13 & -2 & -16\\ 1 & -14 & 16 & -14 & 7\\ 18 & -9 & 5 & 0 & 0\\ -6 & -9 & 3 & 0 & -8\end{pmatrix}$;

2.4. $A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -10 & -7 & 0 \\ -6 & 17 & 6 & -9 & -10 \\ 14 & 5 & 18 & 0 & 1 \\ -8 & 18 & -11 & -7 & 10 \end{pmatrix};$

2.5. $A = \begin{pmatrix} -18 & 0 & 10 & 7 & -19 \\ 16 & -6 & 10 & -1 & -4 \\ 15 & 14 & 19 & 14 & 16 \\ 18 & 19 & -7 & -18 & -8 \end{pmatrix};$

2.6. $A = \begin{pmatrix} -12 & 13 & -8 & -4 & -1 \\ 17 & 19 & 16 & 19 & 17 \\ -4 & 11 & -11 & -10 & -5 \\ -18 & 19 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix};$

2.7. $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 12 & 16 & 12 \\ -8 & 4 & -15 & -6 & 7 \\ -14 & 4 & -1 & 11 & 6 \\ 10 & 9 & -1 & 6 & 17 \end{pmatrix};$

2.8. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -8 & -13 & 19 \\ 13 & 12 & 16 & 6 & 10 \\ -2 & -3 & 6 & 4 & -10 \\ 11 & -8 & 12 & -14 & 16 \end{pmatrix};$

2.9. $A = \begin{pmatrix} 0 & -19 & 15 & -15 & 6 \\ 17 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & -19 & 0 & 3 & -13 \\ 9 & 0 & -10 & 7 & 17 \end{pmatrix};$

$$2.10.\ A=\begin{pmatrix} -15 & -15 & 15 & -5 & -15 \\ -15 & 1 & 11 & -2 & 0 \\ -18 & -10 & -14 & 7 & 19 \\ -16 & -7 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ В МАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Если в матрице выигрышей конечной антагонистической игры имеется седловая точка, то задача выбора наилучшего способа действий решается весьма просто: как первому, так и второму игроку целесообразно выбрать стратегии, соответствующие седловой точке. В этом случае игра становится нечувствительной к утечке информации о выбранной стратегии. Так, если первый игрок выбрал в матричной игре стратегию i^0, оптимальную по гарантированному результату, то в наихудшем для себя случае, когда его стратегия становится известной второму игроку, первый игрок гарантирует себе выигрыш $a_{i^0 j^0}$ в соответствии с (2.15). Но стратегия j^0 второго игрока, являясь оптимальной по гарантированному результату, обеспечивает ему проигрыш, не больший $a_{i^0 j^0}$, даже если первый игрок узнает выбор второго игрока. Однако не во всех матрицах имеются седловые точки.

Пример 3.1. Игра "Орлянка". Два игрока играют в следующую игру. Первый игрок (загадывающий) выкладывает монету одной из сторон, орлом или решкой, не показывая второму. Второй игрок (отгадывающий) пытается угадать, какой стороной выложена монета. Если второй игрок угадал, то он получает единицу от первого; если нет - второй игрок платит единицу первому. ■

В игре "Орлянка" у каждого из игроков по две стратегии. Поэтому матрица выигрышей (ядро игры) имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{орел} & \text{решка} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{орел} \\ \text{решка} \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В матрице игры "Орлянка" нет седловых точек, т.к. $\underline{v} = -1 < \overline{v} = +1$.

Содержательной причиной несовпадения нижней и верхней цен игры является возможная утечка информации о выбранной стратегии - каждый из игроков оценивает последствия принимаемых решений по принципу гарантированного результата. Один из способов предотвращения утечки информации о выбираемых решениях состоит во введении случайности в выбор стратегий. Случайный выбор предполагает наличие некоторого случайного механизма (например, рулетки) и возможности повторения игры достаточно много раз. При этих условиях игрок, доверяющий выбор стратегии случайному механизму, сам не будет информирован о предстоящем конкретном выборе в очередной партии игры (и тем более противник). При достаточно большом числе повторений игры последствия от случайного поведения можно оценить в виде среднего выигрыша в расчете на одно повторение.

3.1. СМЕШАННОЕ РАСШИРЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Определение 3.1. Случайная величина, значениями которой являются стратегии игрока из конечной игры, называется *смешанной стратегией.* ■

Задание смешанной стратегии состоит в указании полного набора вероятностей - распределения вероятностей - на множестве стратегий игрока. Поскольку у первого игрока в матричной игре *m* стратегий, то его смешанная стратегия будет описываться вектором

$$P = (p_1, ..., p_m) \in S_m,$$
$$S_m = \{(p_1, ..., p_m) : \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \ p_i \geq 0,\ i = 1, ..., m\}, \qquad (3.1)$$

где S_m - m-1-мерный симплекс[1]. Вершинам симплекса S_m - векторам, у которых одна координата равна единице, а остальные равны нулю - соответствуют т.н. чистые стратегии. Очевидно, что чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии и порождает детерминированный выбор исходной стратегии. Поэтому чистые стратегии первого игрока будем обозначать

$$i \equiv (0,...,0,1,0,...0) = (p_1,..., p_i,..., p_m),$$
$$p_i = 1, p_j = 0, i \neq j,\ i, j = 1,2,...,m.$$

Смешанная стратегия второго игрока в матричной игре представляет собой распределение вероятностей

$$Q = (q_1,...,q_n) \in S_n,$$
$$S_n = \{(q_1,...,q_n) : \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0,\ j = 1,...,n\}, \tag{3.2}$$

где S_n -n-1-мерный симплекс. Чистые стратегии второго игрока будем обозначать

$$j \equiv (0,...,0,1,0,...0) = (q_1,...,q_j,...,q_n),$$
$$q_j = 1, q_i = 0, j \neq i,\ j, i = 1,2,...,n.$$

Пусть в игре с матрицей выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[1] Симплекс S_m - простейший выпуклый многогранник с указанным числом вершин размерности m-1; так, при m=3 симплекс представляет собой равносторонний треугольник.

первый и второй игроки применяют смешанные стратегии $P=(p_1,p_2,...,p_m)$ и $Q=(q_1,q_2,...,q_n)$ соответственно. В этом случае выигрыши a_{ij} становятся случайными, а их вероятность совпадает с вероятностью реализации пары стратегий (i,j), равной $p_i q_j$. Поэтому средний выигрыш первого игрока в игре с матрицей A представляет собой математическое ожидание

$$E(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i q_j\ . \tag{3.3}$$

Выражение (3.3) можно переписать в форме

$$E(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}p_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j=\sum_{i=1}^{m}p_i E(i,Q)\,, \tag{3.4}$$

где $E(i,Q)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j$ - математическое ожидание выигрыша первого игрока при применении им чистой стратегии i против смешанной стратегии Q второго игрока, или в форме

$$E(P,Q)=\sum_{j=1}^{n}q_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i=\sum_{j=1}^{n}q_j E(P,j)\,, \tag{3.5}$$

где $E(P,j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i$ - математическое ожидание проигрыша второго игрока при применении им чистой стратегии j против смешанной стратегии P первого игрока.

Определение 3.2. Смешанным расширением матричной игры называется антагонистическая игра

$$G=<S_m,S_n,E(P,Q)>\,, \tag{3.6}$$

где

S_m, S_n - множества смешанных стратегий первого и второго игроков соответственно,

$P \in S_m, Q \in S_n$ - стратегии игроков, а

$E(P,Q)$ - ядро игры (математическое ожидание выигрыша первого игрока). ■

Для смешанного расширения матричной игры нижняя и верхняя цена игры описываются выражениями

$$\underline{v} = \max_{P \in S_m} \min_{Q \in S_n} E(P,Q)\,,\ \overline{v} = \min_{Q \in S_n} \max_{P \in S_m} E(P,Q)\,,$$

а определение седловой точки (P^0, Q^0) приобретает вид

$$(\forall P, Q)\ \ E(P,Q^0) \le E(P^0,Q^0) \le E(P^0,Q)\,. \qquad (3.7)$$

Как доказал Дж. фон Нейман в 1928 году, для смешанного расширения матричной игры нижняя цена совпадает с верхней. Следовательно, на основании теоремы 2.3, матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях в смысле определения 2.5.

Проверка определения седловой точки (3.7) для смешанного расширения матричной игры может быть произведена более простым способом.

Теорема 3.1. Для того, чтобы точка (P^0, Q^0) являлась седловой точкой смешанного расширения матричной игры, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$(\forall i, j)\ E(i,Q^0) \le E(P^0,Q^0) \le E(P^0, j)\,. \qquad (3.8)$$

Доказательство. Необходимость очевидна, т.к. неравенства (3.8) являются частным случаем неравенств (3.7), переписанных для чистых стратегий игроков.

Достаточность. Ограничимся доказательством того, что из левой части неравенств (3.7) следует левая часть неравенств (3.8) (для правых частей доказательство аналогично). Пусть

$P=(p_1,p_2,...,p_m)$ - произвольная смешанная стратегия первого игрока. Умножим каждое из m левых неравенств (3.8) почленно на p_i (так как p_i неотрицательны, знак неравенств не изменяется):

$$(\forall i)\ p_i E(i,Q^0)\le p_i E(P^0,Q^0),$$

и сложим все полученные неравенства. Получается

$$\sum_{i=1}^{m} p_i E(i,Q^0)\le \sum_{i=1}^{m} p_i E(P^0,Q^0).$$

Выносся в последнем неравенстве $E(P^0,Q^0)$ за знак суммы, с учетом (3.1), имеем

$$\sum_{i=1}^{m} p_i E(i,Q^0)\le E(P^0,Q^0). \tag{3.9}$$

Так как левая часть неравенства (3.9) на основании (3.5) есть математическое ожидание выигрыша $E(P,Q^0)$, теорема доказана.■

Следствие теоремы 3.1. Если стратегии (i^0,j^0) являются седловой точкой игры с матрицей A, то они являются седловой точкой ее смешанного расширения.

Доказательство. Подставляя (i^0,j^0) в (3.8), получаем

$$(\forall i,j)\ E(i,j^0)\le E(i^0,j^0)\le E(i^0,j),$$

или

$$\forall (i,j)\ a_{ij^0}\le a_{i^0j^0}\le a_{i^0j},$$

что и требовалось. ■

3.2. РЕШЕНИЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ 2×2 ИГР

Рассмотрим матричную игру, в которой у каждого из игроков по две чистых стратегии - т.н. игру 2×2. Матрица выигрышей такой игры имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Прежде всего попытаемся найти седловую точку матрицы - решение игры в чистых стратегиях, применяя схему (2.16). Если седловая точка матрицы существует, то решение игры найдено. Если же седловой точки в чистых стратегиях не оказалось, то будем искать ее в классе смешанных стратегий.

Смешанные стратегии игроков для 2×2 игры можно представить в виде

$$\begin{aligned} P&=(p_1,p_2)=(p,1-p),\, 0\le p\le 1,\\ Q&=(q_1,q_2)=(q,1-q),\, 0\le q\le 1, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где p,q - вероятности выбора первой чистой стратегии первым и вторым игроками соответственно. Пусть (P^0,Q^0) - седловая точка смешанного расширения 2×2 игры. Тогда, как следует из определения седловой точки для смешанного расширения (3.7), справедливо равенство

$$\max_{0\le p\le 1} E(P,Q^0)=E(P^0,Q^0)=\min_{0\le q\le 1} E(P^0,Q)\,. \tag{3.11}$$

Поскольку в игре предполагается отсутствие седловых точек в чистых стратегиях, то экстремумы в (3.11) должны достигаться внутри отрезка $[0,1]$. Поэтому в точках p^0,q^0 должны зануляться частные производные $\dfrac{\partial}{\partial p}E(P,Q^0)$ и $\dfrac{\partial}{\partial q}E(P^0,Q)$. Для 2×2 игры, с учетом (3.10),

$$E(P,Q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q) =$$
$$= pq(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) - p(a_{22} - a_{12}) - q(a_{22} - a_{21}) + a_{22}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial p} E(P,Q^0) = q^0(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) - (a_{22} - a_{12}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial q} E(P^0,Q) = p^0(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) - (a_{22} - a_{21}) = 0\,.$$

Решением этой системы являются

$$p^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}},\ q^0 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \qquad (3.12)$$

Покажем, что формулы (3.12) корректны, т.е. выполнение для p^0, q^0 из (3.12) неравенств из (3.10).

Вначале установим, что знаменатель в формулах (3.12) не равен нулю. Предположим, что

$$a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0\,.$$

Тогда

$$a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22},\ a_{11} - a_{21} = a_{12} - a_{22}. \qquad (3.13)$$

Пусть все разности в (3.13) положительны (другие варианты исследуются аналогично). Тогда элементы матрицы выигрышей связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} a_{11} & > & a_{12} \\ \vee & & \vee \\ a_{21} & > & a_{22} \end{pmatrix},$$

выполнение которых приводит к наличию в матрице игры седловой точки в чистых стратегиях $(i^0, j^0) = (1,2)$, что противоречит исходному предположению.

Покажем, что

$$0 < p^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} < 1, \qquad (3.14)$$

$$0 < q^0 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} < 1. \qquad (3.15)$$

Пусть, для определенности,

$$a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} > 0.$$

В этом случае неравенства (3.14-15) преобразуются в

$$0 < a_{22} - a_{21} < a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22},$$

$$0 < a_{22} - a_{12} < a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22},$$

или

$$a_{21} < a_{22},\ a_{12} < a_{11},$$

$$a_{12} < a_{22},\ a_{21} < a_{11}.$$

Следовательно, элементы матрицы выигрышей связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} a_{11} & > & a_{12} \\ \vee & & \wedge \\ a_{21} & < & a_{22} \end{pmatrix},$$

при выполнении которых в матрице выигрышей отсутствует седловая точка в чистых стратегиях. Таким образом, формулы (3.12) определяют седловую точку в смешанных стратегиях для матричной 2×2 игры при ее отсутствии в чистых стратегиях.

Окончательно, решение игры 2×2 в смешанных стратегиях описывается выражениями

$$P^0=(\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}-a_{22}},\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}-a_{22}}),$$
$$Q^0=(\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}-a_{22}},\frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}-a_{22}}), \qquad (3.16)$$
$$v=E(P^0,Q^0)=\frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}-a_{22}}.$$

Решение примера 3.1. Поскольку в матрице игры "Орлянка" нет седловых точек в чистых стратегиях, применим для нахождения решения формулы (3.16). После элементарных выкладок получаем

$$P^0=(1/2,1/2), Q^0=(1/2,1/2), v=0.$$

Проверка решения. Для проверки решения используем теорему 3.1. Подставляя решение в (3.8), получаем неравенства

$$\left.\begin{matrix}E(1,Q^0)=0\\E(2,Q^0)=0\end{matrix}\right\}\le E(P^0,Q^0)=0\le\left\{\begin{matrix}E(P^0,1)=0,\\E(P^0,2)=0,\end{matrix}\right.,$$

выполнение которых доказывает оптимальность найденных стратегий. ■

3.3. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ $2\times n$ ИГР

Рассмотрим игру, в которой у первого игрока две чистые стратегии, а у второго - n чистых стратегий. Матрица выигрышей этой игры имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\end{pmatrix},$$

смешанная стратегия первого игрока описывается распределением вероятностей

$$P = (p_1, p_2) = (p, 1-p),\ 0 \le p \le 1,$$

а второго - распределением вероятностей

$$Q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in S_n .$$

Графоаналитический метод основывается на следующем утверждении.

Теорема 3.2. Какова бы ни была матрица игры,

$$v = \max_{P \in S_m} \min_{Q \in S_n} E(P, Q) = \max_{P \in S_m} \min_{1 \le j \le n} E(P, j) \tag{3.17}$$

$$(\ v = \min_{Q \in S_n} \max_{P \in S_m} E(P, Q) = \min_{Q \in S_n} \max_{1 \le i \le m} E(i, Q)\ ). \tag{3.18}$$

Доказательство. Для доказательства равенства (3.17) (справедливость равенства (3.18) устанавливается аналогично) достаточно показать совпадение в (3.17) максимизируемых функций. Из свойств минимума, поскольку чистая стратегия $j, 1 \le j \le n$, является частным случаем смешанной стратегии, справедливо неравенство

$$\min_{Q \in S_n} E(P, Q) \le \min_{1 \le j \le n} E(P, j) .$$

С другой стороны,

$$\min_{Q \in S_n} E(P, Q) = \min_{Q \in S_n} \sum_{j=1}^{n} q_j E(P, j) \ge \min_{Q \in S_n} \sum_{j=1}^{n} q_j \min_{1 \le k \le n} E(P, k) =$$

$$= \min_{Q \in S_n} \min_{1 \le k \le n} E(P, k) \sum_{j=1}^{n} q_j = \min_{Q \in S_n} \min_{1 \le k \le n} E(P, k) = \min_{1 \le k \le n} E(P, k),$$

что и доказывает совпадение максимизируемых функций. ■

Применяя теорему 3.2 к игре $2 \times n$, получим

$$\max_{P\in S_2}\min_{1\le j\le n} E(P,j) = \max_{0\le p\le 1}\min_{1\le j\le n}(a_{1j}p + a_{2j}(1-p)) \qquad (3.19)$$

Последний максимин допускает следующую геометрическую интерпретацию. В декартовых координатах (p, E) построим прямые $E = E(P,j) = a_{1j}p + a_{2j}(1-p),\ 0 \le p \le 1,\ 1 \le j \le n$ (рис. 3.1).

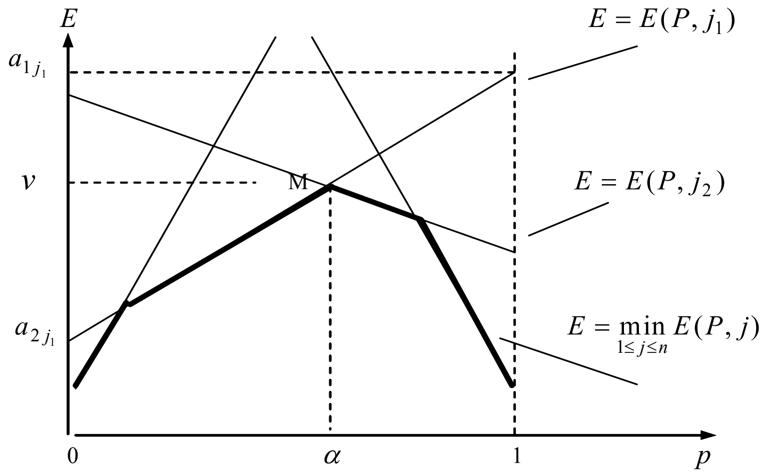

Рис. 3.1. Графический метод решения игр $2\times n$.

Каждой чистой стратегии j второго игрока соответствует своя прямая $E = E(P,j)$. Графиком функции $E = \min_{1\le j\le n} E(P,j)$ будет нижняя огибающая прямых, соответствующих чистым стратегиям второго игрока. На рис 3.1 она представляет собой ломаную, состоящую из жирных отрезков. Ордината наивысшей точки этой ломаной - точки M - в соответствии с (3.19) равняется максимальному гарантированному выигрышу первого игрока, а абсцисса точки M равна тому значению p, при котором этот максимальный гарантированный выигрыш достигается. Следовательно, оптимальной стратегией первого игрока является смешанная стратегия

$$P^0 = (\alpha, 1-\alpha),$$

где α является решением уравнения

$$E(P^0, j_1) = E(P^0, j_2),$$

в котором j_1, j_2 - номера прямых, пересекающихся в точке M.

Если таких наивысших точек будет более одной, то, очевидно, нижняя огибающая будет иметь горизонтальный участок. В этом случае первый игрок будет располагать множеством оптимальных стратегий, порождаемым абсциссами точек горизонтального участка нижней огибающей.

Описанное построение позволяет находить оптимальные стратегии второго игрока. При этом возможны следующие случаи.

Случай 1. Максимум нижней огибающей достигается в единственной точке (рис. 3.2).

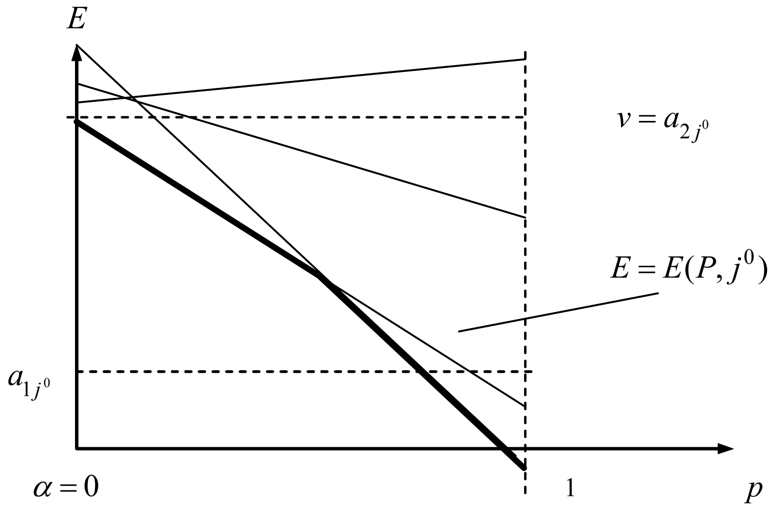

Рис. 3.2. Максимум нижней огибающей в точке $\alpha = 0$.

В этом случае оптимальной стратегией первого игрока будет чистая стратегия $i^0 = 2$. Выберем прямую $E = E(P, j^0)$, проходящую через точку $(0, v)$, тангенс угла наклона которой отрицателен, т.е. $a_{1j^0} < a_{2j^0}$. Тогда чистая стратегия j^0 будет оптимальной стратегией второго игрока, что вытекает из структуры матрицы выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j^0} & \dots & a_{1n} \\ & & \wedge & & \\ a_{21} & \geq & a_{2j^0} & \leq & a_{2n} \end{pmatrix},$$

в которой точка $(2, j^0)$ является седловой.

Случай 2. Нижняя огибающая имеет горизонтальный участок, соответствующий чистой стратегии j^0 второго игрока (рис. 3.3).

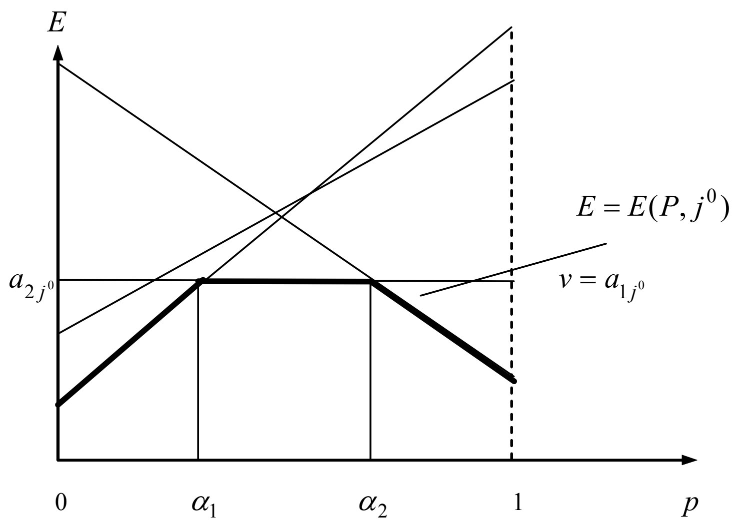

Рис. 3.3. Максимум нижней огибающей не в единственной точке.

В этом случае первый игрок будет располагать множеством оптимальных стратегий

$$P^0 = (\alpha, 1-\alpha), \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2 ,$$

а оптимальной стратегией второго игрока будет чистая стратегия j^0 (так как при ее выборе второй игрок обеспечивает проигрыш, не превышающий цены игры, независимо от действий первого игрока).

Случай 3. Максимум нижней огибающей достигается в единственной точке $0 < \alpha < 1$ (рис. 3.1). Для отыскания оптимальной стратегии второго игрока рассмотрим вспомогательную 2×2 игру, в которой чистыми стратегиями второго игрока являются чистые стратегии j_1, j_2 исходной игры, соответствующие прямым, пересекающимся в точке максимума нижней огибающей М, с положительным (прямая j_1) и отрицательным (прямая j_2) тангенсами углов наклона. Матрица этой вспомогательной игры есть

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}.$$

Как видно из рис. 3.1, оптимальная стратегия первого игрока и цена во вспомогательной игре будут такими же, как и в исходной игре. Это значит, что второй игрок, используя лишь чистые стратегии j_1, j_2 в исходной игре, может обезопасить себя от проигрыша, большего цены исходной игры, и оптимальная стратегия второго игрока может быть получена путем смешивания только двух его чистых стратегий. Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока во вспомогательной игре является его оптимальной стратегией в исходной игре. Оптимальная стратегия второго игрока во вспомогательной 2×2 игре

$$Q^0 = (\beta, 1-\beta), 0 < \beta < 1,$$

может быть найдена либо по формулам (3.16), либо графоаналитически, исходя из равенства

$$E(1,Q^0) = E(2,Q^0),$$

вытекающего из соотношения (3.18) теоремы 3.2 для игры 2×2:

$$\min_{Q\in S_2}\max_{1\le i\le m} E(i,Q) = \min_{0\le q\le 1}\max_{1\le i\le m}(a_{i1}q + a_{i2}(1-q)). \qquad (3.20)$$

Решение примера 3.1 графоаналитическим методом. Применим для отыскания оптимальных стратегий игроков геометрическую интерпретацию соотношений (3.19,20). Так как

$$A = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$E(P,1) = (-1)p + (1-p),\ E(P,2) = p + (-1)(1-p),$$
$$E(1,Q) = (-1)q + (1-q),\ E(2,Q) = q + (-1)(1-q).$$

Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока построим прямые $E = E(P,j),\ 0\le p\le 1,\ 1\le j\le 2$ в декартовых координатах (p,E) (рис. 3.4а).

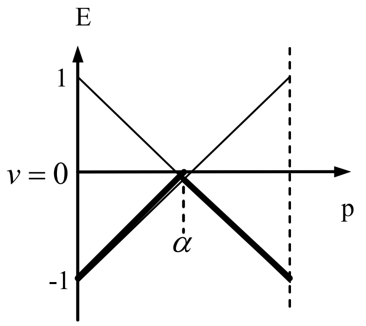

Рис. 3.4а.

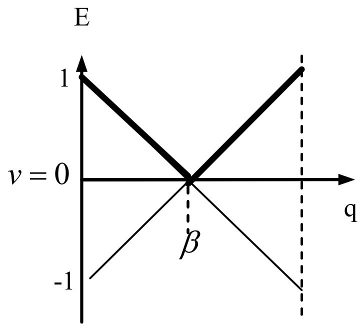

Рис. 3.4б.

Как видно из рис. 3.4а, имеется единственная точка α, в которой достигается максимум нижней огибающей. Она определяется уравнением

$$(-1)\alpha + (1-\alpha) = \alpha + (-1)(1-\alpha),$$

откуда

$$\alpha = 1/2.$$

Для того, чтобы найти оптимальную стратегию второго игрока, осуществим построение прямых $E = E(i, Q)$, $0 \le q \le 1$, $1 \le i \le 2$ в декартовых координатах (q, E) (рис. 3.4б). Как видно из рис. 3.4б, имеется единственная точка β, в которой достигается минимум верхней огибающей. Она определяется уравнением

$$(-1)\beta + (1-\beta) = \beta + (-1)(1-\beta),$$

откуда

$$\beta = 1/2.$$

Окончательно, оптимальные стратегии игроков в игре "Орлянка" есть

$$P^0 = (1/2, 1/2), \mathrm{Q}^0 = (1/2, 1/2),$$

а

$$v = E(P^0, j) = E(i, Q^0) = 0. \blacksquare$$

3.4. ЗАДАНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ

Решить матричную игру

1.1. $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & 5 \\ 15 & 5 & -6 & -12 \end{pmatrix}$;

1.2. $A=\begin{pmatrix} 17 & 3 & -6 & -9 \\ -4 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

1.3. $A=\begin{pmatrix} -13 & -7 & 4 & 14 \\ 4 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix};$

1.4. $A=\begin{pmatrix} -8 & -5 & 4 & 18 \\ 5 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix};$

1.5. $A=\begin{pmatrix} -10 & -7 & 2 & 16 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix};$

1.6. $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 & 1 \\ -4 & -10 & 17 & 7 \end{pmatrix};$

1.7. $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 19 & -7 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix};$

1.8. $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & -4 \\ -11 & -5 & 6 & 16 \end{pmatrix};$

1.9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 7 & -4 & 17 & -10 \end{pmatrix};$

1.10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Стронгин Р.Г. Исследование операций. Модели экономического поведения: Учебник. - Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И.Лобачевского, 2002. - 244с.

2. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики: Учебное пособие. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 272с.

3. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. - М.: Наука, 1985.-272с.

4. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. - М.: Наука, 1981.-336с.

5. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. - М.: Мир, 1985. -200с.

6. Давыдов Э.Г. Методы и модели теории антагонистических игр. - М.: МГУ, 1978. -208с.

7. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. - М.: Высшая школа, 1986.-288с.

СОДЕРЖАНИЕ