

**Министерство образования Российской Федерации  
Нижегородский государственный университет  
им.Н.И.Лобачевского**

© Н.В.Дерендяев, Ю.И.Неймарк, В.П.Савельев

**100 задач**

**по математическим моделям в естествознании**

**Нижегород, 2002 г.**

## РАЗДЕЛ 1

### Простейшие математические модели

В задачах 1-10 составить математическую модель процесса в виде дифференциальных уравнений и ответить на поставленные вопросы.

1. В баке находится 100 литров раствора, содержащего 10 кг соли. В бак втекает 5 литров чистой воды в минуту и смесь с той же скоростью вытекает во второй бак вместимостью 100 литров, первоначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости из него выливается с той же скоростью 5 литров в минуту. В баках все время имеет место полное перемешивание. Когда количество соли во втором баке будет максимальным?

2. Два жидких химических вещества  $A$  и  $B$  объемом соответственно  $M$  и  $N$  вступают в реакцию, образуя вещество  $C$ . Скорость химической реакции пропорциональна произведению концентраций веществ  $A$  и  $B$  («закон действующих масс»). Какое количество вещества  $C$  будет образовано по окончании реакции, если вещества  $A$  и  $B$  входят в состав  $C$  в пропорции 2:1? Каков будет ответ на этот вопрос, если кроме основной реакции образования вещества  $C$  будет также происходить и обратная реакция разложения вещества  $C$  на составляющие вещества  $A$  и  $B$ , скорость протекания которой пропорциональна количеству вещества  $C$ ?

В задачах 3 – 6 силу сопротивления воздуха движению тела считать пропорциональной: а) скорости тела; б) квадрату скорости.

3. После удара футболиста мяч летит вертикально вверх со скоростью  $V_0$ . На какую максимальную высоту  $H_1$  он поднимется и за какое время? Если  $V_0 = 30$  м/сек и  $H_1 = 40$  м, то с какой скоростью мяч упадет на землю?

4. Два парашютиста прыгают с высоты 1,5 км один за другим с интервалом времени 3 минуты. Первый сразу раскрывает парашют, а второй сначала летит без парашюта, а затем на высоте 0,5 км раскрывает парашют. Который из них раньше приземлится, если предельная скорость падения без парашюта 50 м/сек, а с парашютом 5 м/сек.

5. Космический аппарат спускается вертикально вниз на планету. На какой высоте  $H_1$  надо включить тормозную установку, развивающую постоянную силу тяги, чтобы посадка аппарата была мягкой, если начальная скорость спуска  $V_0$ . Рассмотреть случаи посадки с малой высоты ( $H_0 \ll R$ , где  $R$  – радиус планеты), с большой высоты, а также случаи отсутствия и наличия атмосферы.

6. На какую дальность улетит снаряд, выпущенный из пушки со скоростью  $V_0$  под углом  $\varphi$  к горизонту. При каком угле  $\varphi$  дальность полета будет наибольшей? Рассмотреть случаи отсутствия и наличия атмосферы.

7. В бак сечения  $S$  поступает вода с интенсивностью  $P$ . Через отверстие в дне эффективным сечением  $\sigma \ll S$  она поступает во второй бак емкостью  $V$ . Когда наполнится второй бак, если вначале он был пустым?

8. За какое время вытечет вся вода из бака высотой  $H_0$  и сечением  $S$ , если у него в дне и в боковой стенке на высоте  $H_1$  имеется по одному отверстию

эффективным сечением  $\sigma \ll S$ . Если в указанный бак будет поступать вода с интенсивностью  $P$ , то при каком условии бак будет оставаться полным?

9. За какое время вытечет вся вода из сосуда высотой  $H$  и сечением  $S$ , если у него в боковой стенке имеется узкая вертикальная щель шириной  $\sigma$ ?

10. (Задача о динамическом демпфере). Корпус автомобиля массы  $M$  можно

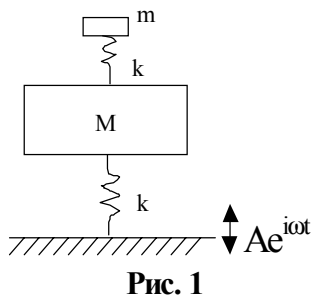


Рис. 1

представить себе покоящимся на пружине жесткости  $K$ , второй конец которой покоится на неподвижном основании (см.рис.1). При движении автомобиля по неровной дороге второй конец пружины будет колебаться с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ . Для повышения комфортности пассажиров используется динамический демпфер в виде массы  $m$ , соединенной с массой  $M$  пружиной жесткости  $K$ . При каком условии амплитуда

вынужденных колебаний массы  $M$  будет равна нулю?

К разделу 1. Решение задачи 3. а). Проектируя на ось  $Ox$  (см.рис.2) уравнение

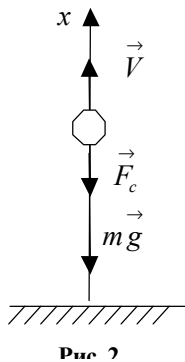


Рис. 2

$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_c$ , выражающее 2-ой закон Ньютона, где  $m$  – масса мяча,  $g$  – ускорение свободного падения и  $F_c$  – сила сопротивления воздуха, получим линейное дифференциальное уравнение

$$m \ddot{x} = -mg - \alpha \dot{x}, \quad \alpha > 0.$$

Его решение с начальным условием  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = V_0$  имеет вид

$$x(t) = \frac{m}{\alpha} \left( V_0 + \frac{mg}{\alpha} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t} \right) - \frac{mg}{\alpha} t,$$

при этом скорость движения мяча меняется по закону

$$\dot{x}(t) = \left( V_0 + \frac{mg}{\alpha} \right) e^{-\frac{\alpha}{m} t} - \frac{mg}{\alpha}$$

Максимальной высоты мяч достигнет в момент времени  $T_1$ , когда  $\dot{x}(T_1) = 0$ ,

откуда находим  $T_1 = \frac{m}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{mg} V_0 \right)$ . Тогда  $H_1 = x(T_1) = \frac{m}{\alpha} V_0 - \frac{m^2 g}{\alpha^2} \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{mg} V_0 \right)$ .

Если предположить, что  $\alpha/m$  – достаточно малая величина, и время полета мяча

также невелико, то заменив  $e^{-\frac{\alpha}{m} t} \approx 1 - \frac{\alpha}{m} t$ , получим приближенную формулу

для  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{V_0^2}{2 \left( g + \frac{\alpha}{m} V_0 \right)}.$$

Последняя формула позволяет найти коэффициент  $\alpha/m$  для значений  $H_1 = 40$  м,

$V_0 = 30$  м/сек:  $\alpha/m = 1/24$ . Пусть мяч опустится на землю в момент времени  $T$ ,

тогда  $x(T) = 0$ . Приближенное решение этого трансцендентного уравнения (при замене  $e^{-\frac{\alpha}{m}t} \approx 1 - \frac{\alpha}{m}t$ ) имеет вид.  $T = \frac{2 V_o}{g + \frac{\alpha}{m}V_o}$

.При значениях  $V_o = 30$  м/сек,  $\frac{\alpha}{m} = \frac{1}{24}$  получим  $T = 16/3$  (сек). Тогда скорость мяча в конечный момент времени  $T$  будет равна:

$$V_k = -\dot{x}(T) = -\left(V_o + \frac{mg}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{mg}{\alpha} \cong 240 - (30 + 240) e^{-\frac{1}{24} \frac{16}{3}} \approx 23 \quad \text{м / сек}$$

## РАЗДЕЛ 2

### Математические модели в виде интегрируемых дифференциальных уравнений и фазовые портреты

В задачах 11 – 14 написать математическую модель в виде дифференциальных уравнений движения точки, построить фазовый портрет, дать ему динамическую интерпретацию, описав всевозможные виды движения точки. Ось  $OX$  горизонтальна,  $OY$  – вертикальна и направлена вверх.

**11.** Материальная точка движется без трения под воздействием силы тяжести в вертикальной плоскости по кривой с уравнением

а)  $y = x^4 - 2x^2 + 2$

в)  $y = x^3 - 3x + 1$

б)  $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

г)  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$

**12.** Материальная точка движется без трения в вертикальной плоскости под воздействием силы тяжести по кривой: а)  $y = \sin x$ ; б)  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sin x$ .

**13.** Материальная точка движется без трения в поле силы тяжести по кривой

а)  $x^2 + y^2 = 1$

б)  $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$

**14.** Частица массы  $m$  движется без трения вдоль горизонтальной оси  $OX$ , отталкиваясь от точки  $x_1 = 1$  с силой  $F_1$  и притягиваясь к точкам  $x_0 = 0$  и  $x_2 = 2$  с силой  $F_0$  и  $F_2$  соответственно. Рассмотреть случаи:

а)  $F_0 = mr_0, F_1 = 4mr_1, F_2 = 2mr_0$

г)  $F_0 = mr_0, F_1 = 2mr_1^2, F_2 = mr_2$

б)  $F_0 = 3mr_0, F_1 = 4mr_1, F_2 = 2mr_0$

д)  $F_0 = mr_0, F_1 = 2m/r_1^2, F_2 = mr_2$

в)  $F_0 = mr_0^2, F_1 = 2mr_1, F_2 = mr_2$

е)  $F_0 = mr_0^2, F_1 = 3mr_1^2, F_2 = 3mr_2$

В задачах 15 – 17 найти состояние и оператор описанной динамической системы, построить фазовый портрет, описать динамику ее движений.

**15.** По горизонтальной прямой  $OX$  без трения движется материальная точка массы  $m$ , несущая заряд  $e > 0$ . В точках  $-1$  и  $+1$  оси  $OX$  расположены заряды  $q > 0$ .

**16.** По горизонтальной прямой без трения движется заряженная материальная точка под воздействием постоянной силы  $f > 0$  и силы отталкивания заряда  $q > 0$ , помещенного в точке  $x = 0$ .

**17.** Материальная точка, несущая заряд  $e > 0$  и расположенная на гладкой горизонтальной прямой  $OX$ , скреплена пружиной жесткости  $k$  с точкой  $x = 0$ , так что притягивается к этой точке  $x = 0$  с силой пропорциональной удалению от точки  $x = 0$ , а в точке  $x = l > 0$  помещен заряд  $q < 0$ .

**18.** На гладкой кривой  $y = \frac{1}{3}x^3 + ax + 1$  под действием силы тяжести движется материальная точка (ось  $OX$  – горизонтальна, ось  $OY$  – вертикальна и направлена вверх). Найти все возможные виды фазового портрета при любых значениях параметра  $a$ . Указать бифуркации и соответствующие значения параметра  $a$ .

**19.** На вращающейся гладкой кривой в поле силы тяжести находится материальная точка. Уравнение кривой а)  $y = x^2$ ; б)  $y = x^4$ .

Ось  $OX$  горизонтальна, ось  $OY$  – вертикальна и направлена против силы тяжести. Вращается кривая вокруг оси  $OY$  с угловой скоростью  $\omega$ . Найти

дифференциальные уравнения движения материальной точки, построить фазовый портрет и выяснить как его вид зависит от параметра  $\omega$ .

20. В условиях предыдущей задачи №19 ответить на те же вопросы, но для кривой  $y = |x|$ , предполагая, что материальная точка по приходе в точку  $x = 0$  испытывает удар, после которого ее скорость мгновенно обращается в нуль.

21. В условиях движения материальной точки, описанных в задаче 11, выяснить как изменятся уравнения движения по кривой и фазовые портреты, если при движении по кривой имеется небольшое сколько угодно малое вязкое

трение, пропорциональное скорости  $\dot{x}$  или  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ .

22. Материальная точка массы  $m$  движется в поле силы тяжести без трения вдоль кривой  $F(x, y) = 0$ , плоскость ОХУ вращается вокруг вертикальной оси ОУ с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Рассмотреть случаи:

а)  $y - \frac{a}{b^2 - x^2} = 0 \quad (a > 0)$

б)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

в)  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$

Найти дифференциальные уравнения движения материальной точки, построить фазовый портрет и выяснить его зависимость от параметра  $\Omega$ .

23. Масса  $m$  подвешена к середине горизонтальной струны длиной  $2a$  и упругостью  $k$ , оба конца которой закреплены. Изучить вертикальные колебания массы.

24. К ободу диска радиуса  $a$  и момента инерции  $J$ , свободно вращающегося в горизонтальной плоскости вокруг своего центра, прикреплена пружина длиной  $2a$  и жесткости  $k$ . Вторым концом пружины закреплен в точке, отстоящей от центра диска на расстоянии  $2a$ . Изучить вращательные движения диска.

25. Материальная точка массы  $m$  движется в поле притяжения к неподвижной точке  $O$ , сила притяжения  $F = ar^n$  ( $n \neq -1$ ), где  $r$  – расстояние от массы  $m$  до точки  $O$ . Составить уравнения движения материальной точки, рассмотреть возможность ее движения по круговой орбите и исследовать устойчивость этого движения.

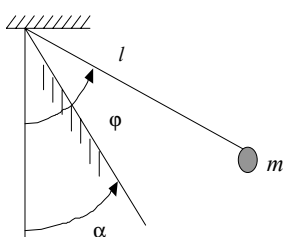


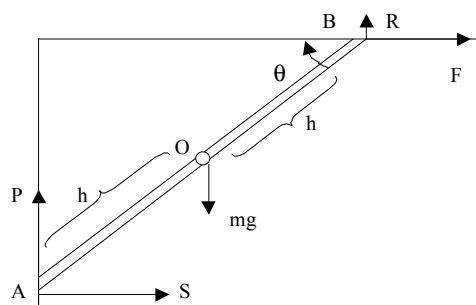
Рис. 3

26. Маятник массы  $m$  и длины  $l$  ударяется о стену, угол наклона которой от вертикали равен  $\alpha$  (см. рис.3). Нарисовать фазовые портреты для случаев  $\alpha > 0$ ,  $\alpha < 0$ . Удар о стенку абсолютно упругий.

27. Подвесная дверь автогаража (см. рис.4) имеет высоту  $2h$ , массу  $m$  и момент инерции  $J$  относительно точки  $O$ . С

помощью некоторого подъемного механизма, содержащего пружину и противовес и развивающего силу  $P$ , дверь может подниматься и опускаться, при этом возникают силы реакции  $S$  и  $R$ , а также сила трения  $F$ .

а) Считая, что  $F = 0$ , показать, что можно так устроить подъемный механизм, что система



имеет равновесие для каждого  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

б) Считая, что  $|F| = \mu |R|$ , определить значения  $P(\theta)$  в точках  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ . таким образом, чтобы положение закрытой и открытой двери были состояниями равновесия.

в) построить функцию  $P(\theta)$  таким образом, чтобы положения закрытой и открытой двери были устойчивыми узлами.

**28.** Видоизмените уравнения Вольтерра для системы «хищник-жертва», учитывая один из следующих факторов: а) жертва имеет убежище вместимостью  $P$  жертв; б) при превышении численности  $Q$  хищников вводится охота на них, интенсивность которой пропорциональна численности хищников. Изучить состояния равновесия системы, построить фазовый портрет и указать возможные типы поведения указанной системы.

**К разделу 2. Решение задачи 11.** Кривая по которой движется точка изображена на приведенном ниже рисунке (рис.5).

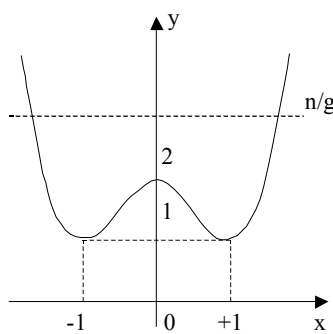


рис. 5

Кинетическая энергия движущейся точки равна

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} \left[ \dot{x}^2 + (4x^3 - 4x)^2 \dot{x}^2 \right] = \frac{m}{2} [1 + 16(x^2 - 1)^2 x^2] \dot{x}^2,$$

а потенциальная энергия  $mgU = mg(x^4 - 2x^2 + 2)$ . Так как точка по кривой движется без трения, то имеет место сохранение энергии<sup>1</sup>, т.е.

$$\frac{1}{2} [1 + 16(x^2 - 1)^2 x^2] \dot{x}^2 + g(x^4 - 2x^2 + 2) = h$$

отсюда находим уравнения фазовых траекторий на фазовой плоскости  $x, \dot{x}$ :

$$\dot{x} = \pm \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 + 16(x^2 - 1)^2 x^2}} \sqrt{\frac{h}{g} - (x^4 - 2x^2 + 2)},$$

которые позволяют построить качественно фазовые кривые исходя из вида кривой по которой движется точка (см.рис.5). Для каждого  $h$  своя фазовая кривая. При  $h/g < 1$  кривой нет. Беря разные  $h$  приходим к фазовому портрету (см.рис.6).

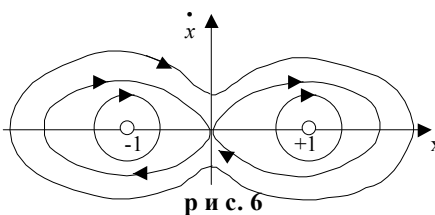


рис. 6

Из него видно, что имеется два устойчивых состояния равновесия  $x = \pm 1$ , возле которых возможны колебательные движения. С возрастанием общей энергии  $h$  амплитуда

возрастает и колебания происходят вокруг обоих состояний равновесия.

<sup>1</sup> Закон сохранения энергии может быть получен как первый интеграл уравнений движения, например, в виде уравнений Лангранжа.

### РАЗДЕЛ 3

#### Математические модели в виде точечного отображения, диаграммы Ламерея и фазовый портрет

**29.** На одной и той же высоте мячик ударяют вверх ракеткой каждый раз, когда он падает вниз. Удар мяча ракеткой происходит со скоростью  $u$  и коэффициентом отскока  $0 < k < 1$ . Масса мячика пренебрежимо мала по сравнению с массой ракетки. Записать математическую модель движения мячика в виде точечного отображения последовательных скоростей отскока мячика от ракетки. Построить диаграмму Ламерея и сделать из нее выводы о поведении мячика.

**30.** Волшебный мячик может иметь коэффициент отскока  $k$  больший единицы и меньше ее. Когда он меньше единицы, мяч спускается по лестнице со ступеньки на ступеньку вниз; когда больше единицы ( $1 < k < \sqrt{2}$ ), напротив, отскакивая от ступеньки, перемещается вверх по лестнице, когда это позволяет величина отскока. Найти математические модели спуска и подъема мячика по лестнице, построить соответствующие диаграммы Ламерея и сделать из них выводы о его скачкообразных движениях.

**31.** Мячик на одной и той же высоте и с одной и той же скоростью ударяют вниз, и далее он от пола снова подскакивает вверх и если достигает той же высоты, его снова ударяют ракеткой вниз. Удар о ракетку и пол упругий с коэффициентом восстановления  $k_p$  и  $k_n$ , меньшим единицы. Изучить возможные движения мячика, построив математические модели в виде точечного отображения и изучить его, используя диаграмму Ламерея.

**32.** Человек играет мячом, ударяя его вверх то головой, то ногой. Головой со скоростью  $u > 0$ , ногой -  $v > 0$ . Коэффициенты отскока мяча от головы и ноги соответственно  $0 < v < 1$  и  $0 < \mu < 1$ . Рост человека  $l$ , таково же расстояние между неизменными уровнями ударов головой и ногой. Написать и исследовать математическую модель движения мячика.

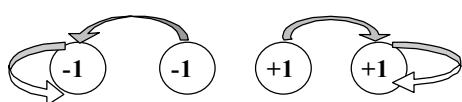


рис. 7

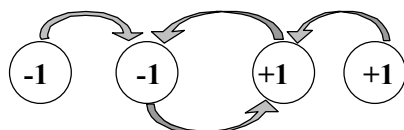


рис. 8



рис. 9



рис. 10

**33.** Качели можно раскачивать, если их кто-нибудь подталкивает когда они проходят свое самое низкое положение. Качели может

раскачивать и сам катающийся на них, приседая и вставая, соответственно в самых верхних положениях и самых нижних. Построить математические модели раскачивания качелей в каждом из случаев и исследовать их с помощью диаграммы Ламерея.

**34.** Два автомата играют в игру отгадывания. У каждого из них своя стратегия игры, т.е. каждый по своему загадывает  $+1$  или  $-1$  и отгадывает, что загадал партнер. Поведение каждого из них описывается детерминированными автоматами, графы смен их состояний и выходов, т.е. что загадывается и что отгадывается, следующие: загадывающий, если в



предыдущей партии выиграл (рис.7) и если проиграл (рис.8); *отгадывающий*, если он в предыдущей партии выиграл (рис.9) и если в ней проиграл (рис.10).

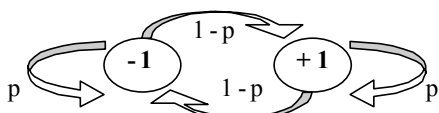


рис. 11

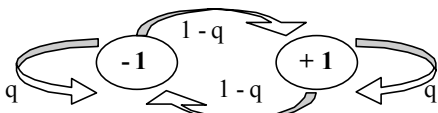


рис. 12

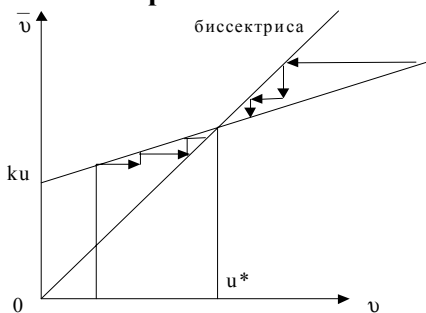


рис. 13

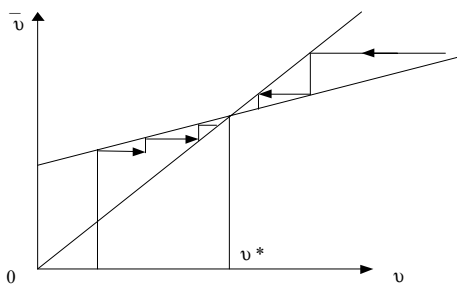


рис. 14

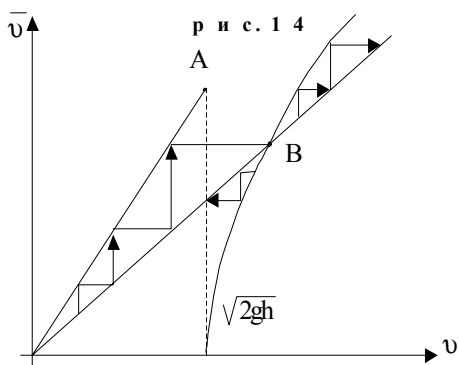


рис.15

**Решение задачи 30.** Пусть  $v$  и  $\bar{v}$  скорости двух следующих друг за другом отскоков от ступенек лестницы. При спуске на одну ступеньку высоты  $h$

$\bar{v} = k\sqrt{v^2 + 2gh}$  и соответствующая диаграмма Ламерея имеет вид (рис.14). из нее видно, что скорость отскоков приближается к

$$v^* = \sqrt{\frac{2ghk^2}{1-k^2}}.$$

Представить игру как дискретную динамическую систему и нарисовать ее фазовый портрет в виде графа смен состояний. Описать согласно фазовому портрету как происходит игра и кто и сколько выигрывает.

**35.** Рассмотреть игру загадывающего автомата предыдущей задачи со стохастическим автоматом с графами вероятностей перехода при выигрыше и проигрыше, изображенными ниже: при выигрыше  $0 < p < 1$  (рис.11); при проигрыше  $0 < q < 1$  (рис.12). Эта игра может быть описана динамической системой. Указать состояние, фазовое пространство и оператор смены состояния точечного отображения, происходящей после очередной партии игры в отгадывание. Найти математическое ожидание выигрыша при очень большой (бесконечной) длительности игры и проанализировать его зависимость от вероятностей  $p$  и  $q$ .

**К разделу 3. Решение задачи 29.** Пусть после удара ракеткой мячика его скорость  $v$ . Тогда он снова упадет на ракетку со скоростью  $-v$  и при ударе ракетки получит скорость  $\bar{v} = k(v + v)$ , где  $0 < k < 1$  - коэффициент отскока мячика от ракетки. Согласно полученному соотношению строим диаграмму Ламерея, позволяющую по  $v$  найти  $\bar{v}$ , далее по  $\bar{v}$  аналогичным образом  $v$  и т.д. Порождаемые им последовательные отображения  $\bar{v}, v, \dots$ , любой точки  $v$  сходятся к неподвижной точке  $v^* = \frac{kv}{1-k}$ , соответствующей устойчивому периодическому движению – подсакиванию мячика.

При подъеме и скорости отскока  $v$  возможны два случая:  $v < \sqrt{2gh}$  и  $v > \sqrt{2gh}$ . В первом случае он не поднимается выше ступеньки от которой отскочил и падает на нее же. При этом его следующая скорость отскока  $\bar{v} = kv$ . Во втором случае он поднимается выше следующей ступеньки, падает на следующую ступеньку и отскакивает от нее со скоростью  $\bar{v} = \sqrt{v^2 - 2gh}$ . В соответствии с этим диаграмма Ламерея имеет вид (рис.15), где точка А с  $\bar{v}_A = k\sqrt{2gh}$  ниже точки В, для которой  $\bar{v}_B = \sqrt{\frac{2ghk^2}{k^2 - 1}}$ . Поскольку для зависимости  $\bar{v}$  от  $v$  все время  $\frac{d\bar{v}}{dv} > 1$ , то при  $v > \bar{v}_B$  последующие значения скорости отскока неограниченно увеличивается, а при  $v < \bar{v}_B$  все время меньше  $\bar{v}_B$  и имеет хаотический (стохастический) характер и при длительных отскоках непредсказуемый.

## РАЗДЕЛ 4

### Осциллятор, нормальные колебания и частоты

36. Через блок радиуса  $r$  с моментом инерции  $J$  и горизонтальной осью вращения переброшена гибкая нерастяжимая нить. Один конец ее удерживается пружиной жесткости  $k$ , на другом находится масса  $m$ . Написать математическую модель движения массы  $m$ . Найти частоту ее колебаний и нарисовать фазовый портрет. Как изменится частота колебаний и фазовый портрет, если вращению блока препятствует вязкое трение.
37. Все как и в предыдущей задаче, но масса  $m$  прикреплена к нити не непосредственно, а через пружину жесткости  $k_1$ . Как изменится математическая модель? Как изменятся нормальные колебания?
38. Самоиндукция  $L$  и емкость  $C$  соединены друг на друга, образуя замкнутую электрическую цепь. Написать математическую модель изменения заряда  $q$  конденсатора. Найти частоту колебаний заряда и нарисовать фазовый портрет.
39. Две массы  $m$ , скрепленные пружиной жесткости  $k$ , могут свободно перемещаться вдоль горизонтальной прямой. Найти нормальные колебания и частоты и описать их, нарисовать отвечающие им осциллограммы движения.
40. В  $U$ -образной вертикально расположенной трубке сечением  $\sigma$  находится жидкость плотности  $\rho$  и массы  $m$ . Написать математическую модель движения (изменения ее уровней в  $U$ -образной трубке) жидкости и найти частоту ее колебаний.
41. Материальная точка массы  $m$ , несущая электрический заряд  $e > 0$ , может без трения двигаться вдоль горизонтального отрезка, на концах которого помещены одинаковые заряды  $q > 0$ . Написать математическую модель движения математической точки. Выяснить есть ли состояние равновесия и устойчиво ли оно. Найти частоту малых колебаний массы  $m$ .
42. Резонатор Гельмгольца представляет собой колбу с горлышком сечения  $\sigma$ , в котором помещается воздух массы  $m$ , а в колбе находится воздух, который сжимается или расширяется при движении воздуха в горлышке колбы. Соотношение между объемом  $V$  воздуха в колбе и его давлением принять вида  $pV^\gamma = const$ , где в случае очень медленных колебаний, когда температуру газа можно считать постоянной  $\gamma = 1$ , а когда, напротив, колебания быстрые, теплообмен незначителен  $\gamma \approx 1,4$ . Принимая эти упрощенные представления, найти частоту колебаний воздуха в резонаторе Гельмгольца.
43. Маленький пузырек воздуха в воде может колебаться меняя свой радиус. Найти частоту этих колебаний, считая их малыми и принимая следующую упрощенную их модель. Соотношение между объемом  $V$  и давлением  $p$  воздуха в пузырьке такие же как и в резонаторе Гельмгольца. Колеблющаяся масса – это радиальные колебания идеальной несжимаемой воды, окружающей пузырек с гидростатическим давлением  $p_0$ .
44. Железный стержень подвешен на пружине и может свободно двигаться по вертикали внутри катушки с самоиндукцией  $L$ , закороченной на себе. Трения и электрического сопротивления нет. Самоиндукция катушки зависит от положения опущенного в нее железного сердечника  $L = L_0 - L_1 x^2$ , где  $x$  не очень

большое смещение сердечника от его равновесного положения  $x = 0$  при действии только силы тяжести и силы растяжения пружины. Найти математическую модель описанной системы. Найти частоту малых колебаний сердечника и показать, что ее можно менять изменяя ток в катушке.

**45.** По гладкой сфере в поле силы тяжести и вертикальном постоянном магнитном поле движется заряженная материальная частица. Найти математическую модель ее движения, найти равновесия и исследовать их устойчивость. Выяснить какие изменения вносит малое вязкое трение при движении частицы по сфере.

**46.** В однородном электрическом поле находится диполь (две частицы с массами  $m$  и с зарядами  $q$ ). Выяснить как движется центр масс диполя, и как диполь движется относительно своего центра масс. Найти в системе связанной с центром масс равновесные положения диполя, выяснить их устойчивость и в случае устойчивости найти частоты малых колебаний

**47.** Исследовать плоские колебания двух маятников одинаковой массы  $m$  и длины  $l$ , подвешенные на расстоянии  $a$  друг от друга и связанные между собой пружиной длины  $a$  и жесткости  $k$ .

**48.** Исследовать плоские колебания двойного маятника с длинами  $l_1$  и  $l_2$  и массами  $m_1$  и  $m_2$ .

**49.** Исследовать плоские колебания маятника массы  $m$  и длины нити  $l$  и изменение силы тока в замкнутом LC-контуре, если катушка самоиндукции  $L$  взаимодействует с массой  $m$ , так что  $L = \frac{a}{1 + b\varphi^2}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , где  $\varphi$ -угол

отклонения маятника от вертикального положения.

**50.** Исследовать возможные движения точки массы  $m$ , перемещающейся по параболоиду  $z = ax^2 + by^2$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) в поле силы тяжести. Ось  $OZ$  направлена вертикально вверх.

**51.** Исследовать горизонтальные движения бруска массы  $M$ , соединенного с двумя неподвижными стенками пружинами жесткости  $k$ , к центру которого подвешен маятник массы  $m$  и длины нити  $l$ .

**52.** Исследовать вращательные колебания двух колес радиусов  $R$  и моментов инерции  $J$  с центрами на расстоянии  $d > 2R$ , если к их ободам прикреплены концы пружины жесткости  $k$  и длины  $l > d - 2R$  в недеформированном состоянии.

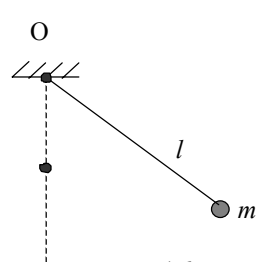


рис. 16

**53.** Маятник массы  $m$  и длины нити  $l$  подвешен в неподвижной точке  $O$ . При своем движении он встречает препятствие в точке  $O_1$ , расположенной строго ниже точки  $O$  на расстоянии  $h < l$  (рис. 16). Написать уравнение движения, построить фазовый портрет и дать интерпретацию всем возможным движениям.

**54.** Исследовать как изменяется ток в двух контурах электрической схемы, если первый контур содержит две емкости  $C_1$  и  $C_2$  и катушку самоиндукции  $L_1$ . К емкости  $C_2$  параллельно ей подсоединена катушка самоиндукции  $L_2$ .

**К разделу 4. Решение задачи 44.** Пусть  $i = \dot{q}$  ток в катушке самоиндукции, а  $x$  смещение массы  $m$  железного сердечника от его равновесного положения под действием натяга пружины и силы тяжести. Соответствующая функция Лангранжа-Максвелла имеет вид

$$L = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{L \dot{q}^2}{2} - \frac{kx^2}{2},$$

согласно которой изменения  $x$  и  $q$  подчиняются уравнениям

$$m \ddot{x} + \frac{1}{2} L_1 2x \dot{q}^2 + kx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ (L_0 - L_1 x^2) \dot{q} \right\} = 0$$

Из второго уравнения следует, что  $L \dot{q} = C = const$  или  $\dot{q} = CL^{-1}$ . Подставляя найденное выражение  $\dot{q}$  в первое уравнение Лангранжа-Максвелла имеем

$$m \ddot{x} + L_1 x C^2 L^{-2} + kx = 0.$$

Это уравнение нелинейного осциллятора и  $x = 0$  его равновесие. Линеаризуя последнее уравнение в окрестности точки  $x = 0$ , получаем

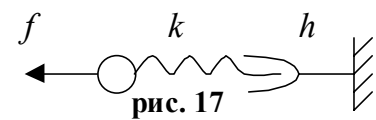
$$m \ddot{x} + (L_1 C^2 L_0^{-2} + k)x = 0$$

Это линейный осциллятор, равновесие  $x = 0$  которого устойчиво, а частота колебаний равна  $\omega = \sqrt{k + L_1 C^2 L_0^{-2}}$ .

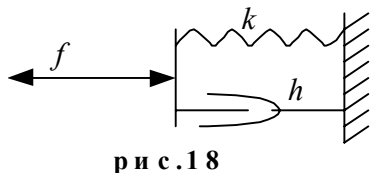
## РАЗДЕЛ 5

### Разные задачи

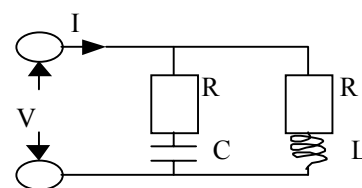
55. Пружина жесткости  $k$  и демпфер с вязким сопротивлением  $h$  соединены последовательно. Демпфер закреплен, а к нерастянутой пружине прикладывается сила в одном случае постоянная сила  $f = 1$ , а в другом – гармоническое воздействие  $f = \cos \omega t$  (рис.17). Найти осциллограммы движения конца пружины, на которой действует указанные силы. Указать, какова амплитудно-фазовая частотная характеристика от прикладываемой силы к смещению ее точки приложения.



Рассмотреть случай когда пружина и демпфер соединены параллельно и найти осциллограммы движения и амплитудно-фазовую частотную характеристику (рис.18).

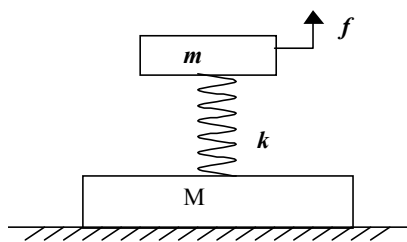


56. Для электрической схемы (рис.19) найти амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) от приложенного переменного напряжения  $V$  к току  $I$ . Найти при каком сопротивлении  $R$  она такая же как у сопротивления (рис.20). указать величину этого сопротивления  $\bar{R}$ .

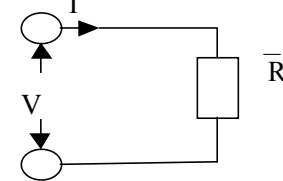


Р и с . 1 9

57. К свободно лежащему на горизонтальной плоскости грузу  $M$  через пружину жесткости  $k$  прикреплен груз  $m$  (рис.21). К грузу  $m$ , находящемуся в равновесии, прикладывается сила  $f = a \sin \omega t$ . Найти при каких условиях груз  $M$  оторвется от опоры, на которой он лежал. Как изменятся эти условия, если помимо упругости пружина обладает еще и вязким сопротивлением  $h$ .



Р и с . 2 1



Р и с . 2 0

58. Задержку в исполнении команды или восприятии сигнала  $x(t)$  можно моделировать как прием сигнала  $y(t) = x(t - \tau)$ , где  $\tau > 0$  – время задержки, а возможно и с помощью дифференциального уравнения

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = x(t), \tau > 0 \quad (*)$$

или системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \tau \dot{y}(t) + y(t) &= \varpi(t) \\ \tau \dot{\varpi}(t) + \varpi(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (**)$$

Найти вид принятого сигнала (осциллограмму)  $y(t)$  и сопоставить его с подаваемым сигналом  $x(t)$  вида

$$X(t) \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ 1, & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

**59.** Можно ли стабилизировать (сделать асимметрически устойчивым) вертикально вверх стоящий маятник, прикладывая к нему управляющий момент на основе измерения угла  $\varphi(t)$  отклонения маятника от вертикали и, возможно, еще и скорости этого отклонения  $\dot{\varphi}(t)$ . Найти простейшую линейную стратегию, достаточную для стабилизации маятника. Подумать какое отношение эта задача имеет к человеку стоящему на сдвинутых ногах и к человеку стоящему на одной ноге. В чем разница этих случаев? Останется ли указанные вами стратегия приемлемой, если человек встанет на носок обной ноги?

**60.** Останется ли приемлемой предложенная в задаче 59 Вами стратегия стабилизации вертикального маятника, если измерение  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  происходят с задержкой вида (\*) или вида (\*\*). Какое отношение полученные Вами результаты относятся к поведению пьяного человека.

**61.** Человек стоящий на носке не может стабилизировать свое вертикальное положение с помощью прикладываемого момента, как это возможно при стоянии на двух или одной ноге. Но он может управлять положением своего корпуса. Выясните возможна ли стабилизация с помощью управления положением корпуса, моделируя человека двойным вертикально стоящим маятником (на основе линейных стратегий управления по углам и угловым скоростям).

**62.** Железный шарик не удастся вывесить с помощью компенсирующего силу тяжести магнита. Он либо падает либо прилипает в магниту. Объясните почему так происходит. Далее выясните возможно ли все же добиться вывешивание шарика перемещая магнит соответствующим образом вверх и вниз (используя линейные стратегии управления по положению и скорости шарика). Если Вам удастся найти такие стратегии управления, объясните почему же реально это не удастся.

**63.** Массы  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные пружиной жесткости  $k$ , движутся вдоль горизонтальной оси, испытывая вязкое трение. К массе  $m_2$  приложена гармоническая сила  $F e^{i\omega t}$ . Составить уравнение движения, найти вынужденные колебания массы  $m_1$  и амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ).

**64.** Найти АФЧХ от входного напряжения  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  к выходному напряжению  $V(t)$  на сопротивлении  $R$  повышающего трансформатора (рис.22), имеющего характеристики  $L_1 = 1/3$ ;  $L_2 = 4$ ;  $R_1 = 0,25$ ;  $R_2 = 0,5$ ;  $R = 5,5$  и коэффициент взаимной индукции  $M = 1$ . При какой частоте  $\omega$  отношение амплитуды напряжения  $V(t)$  к амплитуде  $U_0$  будет наибольшим? Сравнить это отношение с аналогичным отношением для случая идеального трансформатора ( $M^2 = L_1 L_2 = 4/3$ ;  $R_1 = 0$ ;  $R_2 = 0$ ;  $R = 5,5$ ).

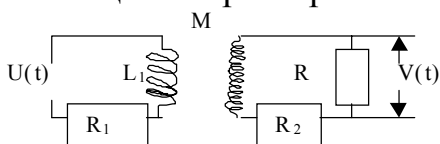


Рис. 22

**65.** Найти АФЧХ от входного напряжения  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  к выходному напряжению  $V(t)$  на сопротивлении  $R$  однозвенного фильтра (рис.23),

имеющего параметры  $L = 4$ ;  $C = 0,75$ ;  $R = 5$ . Почему этот фильтр можно назвать низкочастотным?

**66.** Найти АФЧХ от входного напряжения  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  к выходному напряжению  $V(t)$  на сопротивлении  $R$  однозвенного фильтра (рис.24), имеющего параметры  $L = 1$ ;  $C = 1$ ;  $R = 1,5$ . Почему этот фильтр можно назвать высокочастотным?

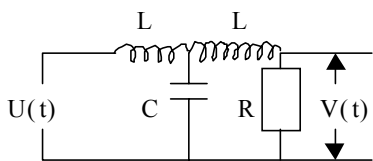


Рис. 23

**67.** Маятник длины  $l$  и массы  $m$  отталкивается от магнита, расположенного ниже точки подвеса на расстоянии  $h > l$  с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния от массы  $m$  до магнита. Написать уравнение движения, построить фазовый портрет.

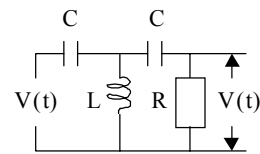


Рис. 24



## РАЗДЕЛ 6

### Волновые движения

**68.** Для бесконечно длинного цилиндрического стержня из линейно упругого материала получить дисперсионное уравнение и найти фазовую и групповую скорости продольных волн.

**69.** Простейшая математическая модель рельсового пути – это бесконечная струна, расположенная на упругом основании, и колеблющаяся в контакте с ним. Реакция упругого основания в точке контакта пропорциональна его смещению в этой же точке (грунт Винклера). Составить уравнение поперечных колебаний струны; получить из него дисперсионное соотношение и найти фазовую и групповую скорости волн.

**70.** Однонаправленные длинные волны в средах с малой нелинейностью и пространственной дисперсией описываются уравнением Кортевега-де-Фриза ( $Kd\Phi$ ):  $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$ , где  $u(x,t)$  – скалярное поле волны;  $\beta$  - параметр среды;  $x \in (-\infty, +\infty)$ ;  $t \geq 0$ .

Получить дисперсионное соотношение и найти фазовую и групповую скорости волн малой амплитуды, удовлетворяющих уравнению ( $Kd\Phi$ ). Найти частные решения в виде бегущих волн (солитоны):  $u(x,t) = f(x-Vt)$ ;  $u \rightarrow 0$ , при  $|x| \rightarrow \infty$

**71.** Полубесконечная струна закреплена в точке  $0$  и совершает поперечно-продольные колебания в плоскости  $0xy$ . Полагая, что материал струны подчиняется закону Гука, составить уравнения колебаний струны, не предполагая их амплитуду малой (так называемые уравнения с учетом геометрической нелинейности).

Указание: точке струны  $A$  приписать значение лагранжевой координаты  $m$ , равное массе участка струны между закрепленной точкой  $0$  и точкой  $A$ .

**72.** Пусть частицы среды двигаются вдоль оси  $0x$  без столкновений. В макроскопическом описании поле скоростей в движущейся бесстолкновительной среде  $u(x,t)$  удовлетворяет так называемому уравнению простой волны:

$u_t + uu_x = 0$ . Найти формальное решение уравнения простой волны на прямой  $x \in (-\infty, +\infty)$ , удовлетворяющее начальному условию  $u(x,0) = F(x)$ .

Указание к решению: удобно представить движение среды в лагранжевом описании.

**73.** В задаче 72 решение  $u(x,t)$  остается однозначным, вообще говоря, не для всех  $t$ , т.е. динамическая система осуществляется лишь при  $0 \leq t < t^*$ . Найти максимальное значение  $t$ , при котором решение  $u(x,t)$  еще остается однозначным. Рассмотреть случаи начального распределения  $F(\xi)$ , изображенные на рис. 1

**74.** Одномерные волновые движения в среде с амплитудной дисперсией и диссипацией в простейшем случае описываются уравнением Бюргерса:  $u_t +$

$uu_x = \nu u_{xx}$ , где  $u(x,t)$ -поле скоростей. Показать, что решение уравнения Бюргера при  $\nu \rightarrow 0$  качественно отличается от решения при  $\nu=0$ .

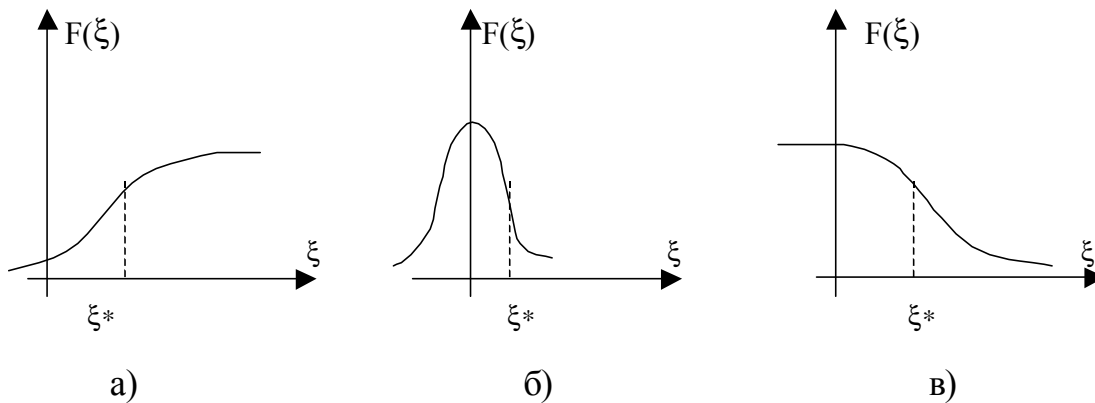


Рис.1

Указание: сравнить решение в виде бегущей волны:  $u(x,t) = u(x - Vt)$ ;  $u \rightarrow u_1, x \rightarrow -\infty$ ;  $u \rightarrow u_2, x \rightarrow +\infty$  при  $\nu \rightarrow 0$  с решением уравнения простой волны ( $\nu=0$ ).

**75.** Уравнение Бюргера для трехмерных движений среды (векторное уравнение Бюргера) записывается в виде:

$$\vec{V}_t + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = \nu\nabla^2\vec{V},$$

где  $\vec{V}(r, t)$  - поле скоростей.

В астрофизике это уравнение используется для описания движения вещества в метagalactic масштабах. Показать, что потенциальные решения векторного уравнения Бюргера выражаются через решения уравнения диффузии.

Указание: воспользоваться трехмерным обобщением подстановки Коула-Хопфа, взяв  $\vec{V}(r, t) = -2\nu \frac{\nabla\varphi}{\varphi}$ , где  $\varphi(r, t)$  - скалярная функция.

**76.** Построить примеры вихревых движений, описываемых векторным уравнением Бюргера.

Указание: представить,  $\vec{V}(r, t) = e_x U(z, t) + e_y W(z, t)$ , где  $x, y, z$  - декартовы координаты.

**77.** Одномерное движение среды с амплитудной дисперсией и диссипацией описывается уравнением:  $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ , где  $u(x,t)$  - поле скоростей;  $\nu$  - коэффициент вязкости. Полагая, что при  $x = 0$  расположена непроницаемая стенка, найти движение среды при заданном начальном условии:  $u(x,0) = u_0(x)$ ;  $x \in [0, +\infty)$ .

Указание: воспользоваться подстановкой Коула-Хопфа:  $u(x, t) = -2v \frac{\varphi_x}{\varphi}$ .

**78.** Одномерная диффузия гена, дающего преимущество в борьбе за выживание, описывается уравнением Колмогорова-Пискунова-Петровского:

$$u_t = \chi u_{xx} + F(u).$$

Здесь  $0 \leq u(x, t) \leq 1$  - концентрация особей-носителей гена на прямой  $-\infty < x < +\infty$ ;  $\chi$ - коэффициент диффузии, а функция  $F(u)$  -удовлетворяет условиям: 1)  $F(u) > 0$ ;  $0 < u < 1$ ; 2)  $F(0) = F(1) = 0$ . Полагая граничные условия в виде  $u(x, t) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $u(x, t) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ , показать, что необходимое условие существования решения в виде бегущей волны гена  $u(x, t) = \tilde{u}(x - Vt)$  имеет вид  $V \geq 2\sqrt{\chi F'_u(0)}$ .

Указание к решению: перейти в плоскость переменных  $(p, \tilde{u})$ , где

$$p = \frac{du}{d\xi}; \xi = x - Vt.$$

**79.** Пусть плоская уединенная продольная бегущая волна распространяется в среде вдоль оси  $x$ . Используя уравнение неразрывности (закон сохранения массы)  $\rho_t + (\rho u)_x = 0$ , получить выражение для импульса

среды  $P = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u dx$ , совершающей волновое движение. Здесь

$\rho(x, t), u(x, t)$  – распределения плотности и скорости среды соответственно.

Решение. В плоской бегущей волне  $\rho = R(x - ct), u = U(x - ct)$ , где  $c$ -скорость распространения волны. Из уравнения неразрывности имеем

$$-c \frac{d}{d\xi} R(\xi) + \frac{d}{d\xi} (R(\xi)U(\xi)) = 0 \quad (1)$$

Интегрируя (1) по  $\xi$ , получим  $R(\xi)(U(\xi) - c) = const$ . Поскольку волна уединенная, то функция  $U(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Отсюда следует, что  $const = -c\rho_0$ , где  $\rho_0$  -плотность невозмущенной среды; функция  $R(\xi) \rightarrow \rho_0; \xi \rightarrow \pm\infty$ . В результате

$$\rho u = c(\rho - \rho_0), \quad (2)$$

а импульс среды, совершающей волновое движение

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho - \rho_0) dx.$$

Если «заряд массы» в волне  $\Delta m = \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho - \rho_0) dx \neq 0$ , то уединенная бегущая волна подобно частице массы  $\Delta m$  со скоростью  $c$  обладает импульсом

$P = \Delta t \cdot c$ . При этом, если  $\Delta t < 0$ , то импульс волнового движения антипараллелен направлению распространения волны! Если же  $\Delta t = 0$ , то импульс уединенной бегущей волны отсутствует.

**80.** Рассмотреть плоскую уединенную продольную волну, стационарно распространяющуюся вдоль оси  $x$ , и найти выражение для импульса среды, совершающей волновое движение, а также напряжение в среде.

Решение. Достаточно общие уравнения одномерного движения среды вдоль оси  $x$  в эйлеровом описании имеют вид:

$$u_t + uu_x = \frac{\sigma_x}{\rho}; \rho_t + (\rho u)_x = 0; \sigma = \sigma(\rho, u) \quad (1)$$

Здесь  $u(x, t)$  - распределение  $x$ -компоненты скорости среды;  $\rho(x, t)$  - плотность среды;  $\sigma(x, t)$  - напряжение среды, т.е.  $x$ -компонента силы, с которой внешняя часть действует на внутреннюю часть среды через единицу площади контрольной поверхности. В частном случае это может быть гидродинамическое давление, взятое с обратным знаком, т.е.  $\sigma = -p(\rho, u)$ . Уравнение  $\sigma = \sigma(\rho, u)$  обобщает термодинамическое уравнение состояния.

В случае волны, стационарно распространяющейся (бегущей) вдоль оси  $x$ , входящие в (1)  $u, \rho, \sigma$  зависят только от переменной  $\xi = x - c_0 t$ , где  $c_0$  - постоянная скорость распространения волны. Подстановка искомого решения в (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -c_0 \frac{du}{d\xi} + u \frac{du}{d\xi} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\sigma}{d\xi} \\ -c_0 \frac{d\rho}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\rho u) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Третье уравнение системы (1) переписывается без изменений. Полученные уравнения легко интегрируются. Умножая первое уравнение (2) на  $\rho$ , второе на  $u$  и складывая их получим

$$-c_0 \left( \rho \frac{du}{d\xi} + u \frac{d\rho}{d\xi} \right) + \frac{d}{d\xi}(\rho u^2) = \frac{d\sigma}{d\xi}, \text{ т.е.}$$

$-c_0 \rho u + \rho u^2 = \sigma + c_1$ , а из второго уравнения (2)  $-c_0 \rho + \rho u = c_2$ , где  $c_1, c_2$  - константы интегрирования. В уединенной волне среда неподвижна при  $|x| \rightarrow \infty$ ; положим  $u \rightarrow 0, \sigma \rightarrow \sigma_0, \rho \rightarrow \rho_0$  при  $x \rightarrow +\infty$ , где  $\sigma_0, \rho_0$  - постоянные напряжение и плотность невозмущенной среды. Тогда из условий при  $x \rightarrow +\infty$  найдем  $c_1 = -\sigma_0; c_2 = -c_0 \rho_0$  и запишем решение системы (2) в виде

$$\sigma - \sigma_0 = \rho u^2 - c_0 \rho u; \rho u = c_0(\rho - \rho_0) \quad (3)$$

Количество движения (импульс) среды, совершающей волновое движение, определяется выражением  $P = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u dx$  и в рассматриваемом случае, в соответствии со второй формулой (3), записывается в виде:

$$P = c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho - \rho_0) dx = c_0 \Delta m, \text{ где } \Delta m - \text{«заряд массы» в волне.}$$

Нетрудно показать (сделайте это сами!), что «заряд массы»  $\Delta m$  интеграл движения.

Таким образом, в случае плоской уединенной продольной стационарно распространяющейся волны импульс  $P$  среды, совершающей волновое движение, отличен от нуля только при  $\Delta m \neq 0$  [1]. Интересно, что при  $\Delta m < 0$  (что возможно при определенных начальных условиях) импульс  $P < 0$ , т.е. антипараллелен направлению распространения волны. Уединенные волны с импульсом  $P > 0$  ( $\Delta m > 0$ ), падая на тела, способны оказывать на них силовое воздействие подобно частицам.

**81.** Для плоской уединенной продольной волны, стационарно распространяющейся (бегущей) по массовой лагранжевой координате найти выражение для импульса среды, совершающей волновое движение.

Решение. Используем для решения поставленной задачи основные уравнения (1) п.80, преобразовав их к лагранжевым переменным. Введем массовую лагранжеву координату  $m(x,t)$  соотношениями:  $m_x = \rho(x,t)$ ;  $m_t + u(x,t)m_x = 0$ . Нетрудно видеть, что эта координата просто масса среды в прямом цилиндре единичного сечения, торцы которого перпендикулярны оси  $x$  и образованы одними и теми же частицами

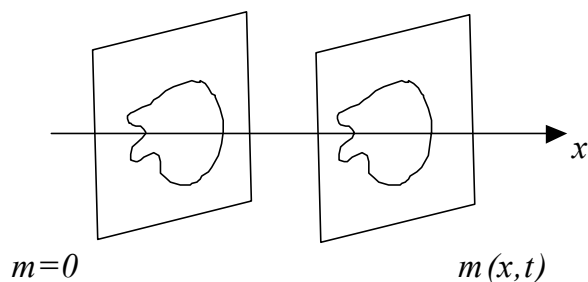


Рис.2

среды (рис.2); частицам левого торца (отсчетного) соответствует значение координаты  $m = 0$ , частицам правого - значение  $m(x, t)$ .

Система уравнений (1) п.80 в переменных  $m, t$  записывается в виде (убедитесь в этом сами, выполнив замену переменных!)

$$u_t = \sigma_m; \rho_t + \rho^2 u_m = 0. \tag{1}$$

Третье уравнение переписывается без изменений.

В случае волны, стационарно распространяющейся по массовой лагранжевой координате,  $u, \rho, \sigma$  зависят только от бегущей координаты

$$\xi = \frac{m}{\rho_0} - c_0 t, \text{ где } \rho_0 - \text{плотность невозмущенной среды, } c_0 - \text{постоянная скорость}$$

распространения волны. Подстановка в (1) решения, зависящего только от  $\xi$ , дает

$$c_o \frac{du}{d\xi} - \frac{1}{\rho_o} \cdot \frac{d\sigma}{d\xi} = 0; -c_o \frac{d\rho}{d\xi} + \frac{\rho^2}{\rho_o} \cdot \frac{du}{d\xi} = 0 \quad (2)$$

Эти два уравнения легко интегрируются и приводят к соотношениям:  $c_o u(\xi) + \frac{1}{\rho_o} \sigma(\xi) = c_1; \frac{c_o \rho_o}{\rho(\xi)} + u(\xi) = c_2$ , где  $c_1, c_2$  – постоянные.

В уединенной волне при  $x \rightarrow +\infty$  среда не возмущена, т.е.  $u(x, t) \rightarrow 0, \rho(x, t) \rightarrow \rho_o, \sigma(x, t) \rightarrow \sigma_o; x \rightarrow +\infty$ . Поскольку плотность среды  $\rho(x, t) > 0$ , то  $m_x > 0$ ; при больших значениях  $x$  производная  $m_x \rightarrow \rho_o u$ , и следовательно,  $m \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Отсюда  $u(\xi) \rightarrow 0; \sigma(\xi) \rightarrow \sigma_o, \rho(\xi) \rightarrow \rho_o$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ , а константы интегрирования имеют значения:  $c_1 = \frac{\sigma_o}{\rho_o}, c_2 = c_o$ . Здесь всюду  $\sigma_o$  – постоянное

напряжение невозмущенной среды. С учетом сказанного получаем

$$\sigma(\xi) = \sigma_o - c_o \rho_o u(\xi); \rho(\xi) u(\xi) = c_o (\rho(\xi) - \rho_o). \quad (3)$$

В рассматриваемом случае количество движения (импульс) среды, совершающей волновое движение, определяется выражением

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \left( \frac{m(x, t)}{\rho_o} - c_o t \right) \cdot u \left( \frac{m(x, t)}{\rho_o} - c_o t \right) dx, \text{ которое в соответствии со второй}$$

формулой (3) принимает вид  $P = c_o \Delta m$ , где  $\Delta m = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \rho \left( \frac{m(x, t)}{\rho_o} - c_o t \right) - \rho_o \right) dx$  –

«заряд массы» в волне.

Таким образом, в случае плоской уединенной продольной волны, стационарно распространяющейся по массовой лагранжевой координате, выражение для импульса среды, совершающей волновое движение, определяется формулой  $P = \Delta m c_o$  [2]. Важно при этом подчеркнуть, что в отличие от п.80, рассмотренная здесь волна не является стационарно распространяющейся в эйлеровом описании (*подумайте, почему?*)

**82.** Найти зависимость  $\sigma(\rho, u)$  (обобщенное «уравнение состояния» среды), при которой существует рассмотренная в п.81 плоская уединенная продольная стационарно распространяющаяся (бегущая) волна.

Решение. Система уравнений (3) относительно  $\sigma(\xi), \rho(\xi), u(\xi)$ , полученная в п.81,  $\sigma - \sigma_o = -c_o \rho_o u; \rho u = c_o (\rho - \rho_o); \sigma = \sigma(\rho, u)$ , вообще говоря, имеет только постоянные решения – корни системы (3). Лишь в случае, когда уравнения зависимы, можно взять одну из функций, например  $u(\xi)$ , произвольно, задав тем самым профиль волны, а функции  $\sigma(\xi), \rho(\xi)$  определить из системы (3). Потребуем, чтобы после исключения  $u(\xi)$  из первых двух уравнений системы (3) получилось третье уравнение; такая

зависимость  $\sigma(\rho, u)$ , очевидно, обеспечит существование решения в виде бегущей волны. В результате исключения  $u(\xi)$  найдем

$$\sigma = \sigma_o - c_o^2 \rho_o \left(1 - \frac{\rho_o}{\rho}\right) \quad (1)$$

или, введя давление  $p = -\sigma$ ,  $p = (\rho_o + \rho_o c_o^2) - c_o^2 \rho_o^2 / \rho$ . Эта зависимость  $p(\rho)$  соответствует так называемому газу Чаплыгина.

**83.** Найти зависимость  $\sigma(\rho, u)$ , при которой существует рассмотренная в п.80 плоская уединенная продольная волна, стационарно распространяющаяся вдоль оси  $x$ .

**84.** Исходя из закона сохранения массы показать, что “заряд массы” в плоской уединенной волне сохраняется.

Решение. По определению “заряд массы”  $\Delta m = \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho - \rho_o) dx$ , где

$\rho(x, t)$  – плотность,  $\rho_o$  – невозмущенная плотность среды, в которой распространяется волна. Дифференцируя  $\Delta m$  по времени получим, с использованием уравнения неразрывности,

$$\frac{d}{dt} \Delta m = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_t dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho u)_x dx = - \rho u \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

В уединенной волне  $u(x, t) \rightarrow 0, \rho(x, t) \rightarrow \rho_o$  при  $|x| \rightarrow +\infty$ ; отсюда  $\frac{d}{dt} \Delta m = 0$ . “Заряд массы” в волне, таким образом, является интегралом движения.

**85.** Показать, что уравнение состояния  $p = A - \frac{B}{\rho}$  (газ Чаплыгина)

осуществляется при деформациях одномерной среды, подчиняющейся закону Гука.

Решение. Рассмотрим одномерную среду в лагранжевом описании, введя массовую лагранжеву координату  $m$  (см. решение задачи в п.81).

Относительное удлинение элемента среды  $\varepsilon = \frac{dl - dl_o}{dl_o}$ , где  $dl_o, dl$  –

соответственно, длины элемента до и после деформирования, выражается через единственную компоненту вектора смещения  $u(m, t)$  по формуле  $\varepsilon = \rho_o u_m$ , где  $\rho_o$  – плотность недеформированной среды. (Получите сами эту формулу, исходя из кинематических представлений; см. рис.3). По закону Гука напряжение в сечении рассматриваемого элемента среды

$$\sigma(m, t) = E \rho_o u_m(m, t), \quad (1)$$

где  $E$  – модуль Юнга. Выразим теперь  $\sigma$  через плотность элемента среды.

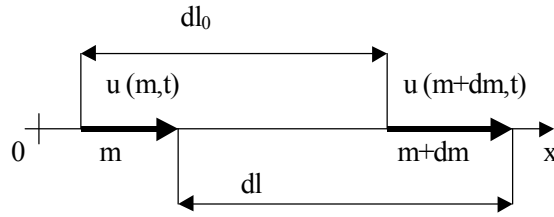


Рис. 3

Плотность

$$\rho(m, t) = \frac{dm}{dl} = \frac{dm}{dl_0 + u_m dm} = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 u_m} \quad (2)$$

Отсюда  $\rho_0 u_m = \frac{\rho_0}{\rho} - 1$  и, далее,

$$\sigma(m, t) = E \left( \frac{\rho_0}{\rho(m, t)} - 1 \right) \quad (3)$$

Введя давление  $p = -\sigma$  (положительному давлению в среде отвечает напряжение  $\sigma < 0$ ) получим из (3) уравнение состояния газа Чаплыгина  $p = A - B/\rho$ , где  $A = E$ ;  $B = \rho_0 E$ .

**86.** Представить закон Гука в случае одномерной среды, расположенной вдоль оси  $x$ , в эйлеровом описании.

Решение: воспользуемся выражением (1) п.85 для закона Гука в лагранжевых переменных  $m, t$ . Переходя к эйлеровым переменным  $x, t$

получим:  $\left. \frac{\partial m}{\partial x} \right|_t = \rho(x, t)$ ;  $u_m(m, t) = \tilde{u}_m(x(m, t), t) = \tilde{u}_x \frac{\partial x}{\partial m} \Big|_t = \frac{1}{\rho} \tilde{u}_x(x, t)$

Отсюда

$$\sigma(x, t) = \frac{E \rho_0}{\rho} \tilde{u}_x(x, t), \quad (1)$$

где  $\tilde{u}(x, t)$  - смещение, выраженное через эйлерову координату  $x$ . Это и есть закон Гука в эйлеровом описании. В случае малых деформаций  $\rho \approx \rho_0$  и выражение (1) в линейном приближении принимает вид:  $\sigma = E \tilde{u}_x$ .

**87.** В случае одномерной среды найти связь лагранжевой массовой координаты  $m$  с эйлеровыми переменными  $x, t$ .

Решение. По определению  $\left. \frac{\partial m}{\partial x} \right|_t = \rho$ ; для плотности среды  $\rho(m, t)$  в п.85

получена формула (2)  $\rho(m, t) = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 u_m}$ . Отсюда  $\int \frac{dm}{\rho(m, t)} = x$  или



$$x - x_0(t) = \frac{1}{\rho_0} \int_0^m (1 + \rho_0 u_m) dm, \text{ т.е. } x - x_0(t) = \frac{m}{\rho_0} + u(m, t) - u(0, t). \text{ Если } m = 0$$

соответствует закрепленной точке среды ( $u(0, t) \equiv 0$ ), то взяв начало координаты  $x$  в этой точке ( $x_0(t) \equiv 0$ ) получим

$$x = \frac{m}{\rho_0} + u(m, t) \quad (1)$$

Зависимость  $m(x, t)$  определяется неявной функцией (1).

**88.** Найти выражение для импульса среды, совершающей волновое движение, в случае плоской уединенной продольной *простой* волны.

Решение. Продольная простая волна - волновое движение, поле скоростей которого  $u(x, t) = F(\xi)$ ;  $\xi = x - (c + u)t$ . Здесь  $F(\xi)$  - произвольная функция,  $c(u)$  - скорость распространения возмущения по частицам среды,  $x$  - декартова координата вдоль направления распространения волны,  $t$  - время. Прямые вычисления показывают, что в простой волне

$$u_t + (c + u)u_x = 0, \quad (1)$$

т.е. скорость  $u(x, t)$  постоянна вдоль характеристик  $x(t)$ , удовлетворяющих уравнению  $\frac{dx}{dt} = c(u) + u$ , а сами характеристики прямолинейны.

Подставим  $\rho(\xi), u(\xi)$  в уравнение неразрывности  $\rho_t + (\rho u)_x = 0$ ; получим

$$\frac{d\rho}{d\xi} (-(c + u) - t(c + u)_t) + \frac{d}{d\xi} (\rho u) \cdot (1 - t(c + u)_x) = 0.$$

Далее, с учетом (1),

$$(c + u)_t = u_t \frac{d}{du} (c + u) = -(c + u)u_x \frac{d}{du} (c + u) = -(c + u)(c + u)_x.$$

В результате подстановка в уравнение неразрывности даст

$$\left( -(c + u) \frac{d\rho}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} (\rho u) \right) (1 - t(c + u)_x) = 0. \text{ Отсюда в общем случае следует, что}$$

$$-(c + u) \frac{d\rho}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} (\rho u) = 0. \quad (2)$$

Из соотношения (2) получим

$$\rho u = \int_{\rho_0}^{\rho} (c - c_0 + u) d\rho + c_0 (\rho - \rho_0), \quad (3)$$

где  $\rho_0, c_0$  - соответственно, плотность и скорость звука в невозмущенной среде. Интегрируя (3) по области  $(\Delta)$  локализации возмущения, получим выражение для импульса среды в рассматриваемом волновом движении:

$$P = \int_{(\Delta)} \rho u dx = \int_{(\Delta)} q dx + \Delta m \cdot c_0, \quad (4)$$

где  $q = \int_{\rho_0}^{\rho} (c + u - c_0) d\rho$ ;  $\Delta m = \int_{(\Delta)} (\rho - \rho_0) dx$ .

Если скорость распространения возмущения в неподвижном пространстве  $(c+u)$  возрастает вместе с  $\rho$ , то  $(c + u - c_0)(\rho - \rho_0) \geq 0$  и, следовательно,

$$q = \int_{\rho_0}^{\rho} (c + u - c_0) d\rho \geq 0, \text{ причем } q=0 \text{ лишь при } \rho = \rho_0.$$

Этот случай имеет место, например, для простых волн изэнтропических движений термодинамически идеального газа (см., например, [3], поскольку

для них  $\frac{d}{d\rho}(c + u) = \frac{c}{\rho} + \frac{dc}{d\rho} > 0$ .

В этом случае, в соответствии с (4),  $P > 0$  при  $\Delta m = 0$ .

Таким образом, среда, совершающая движение в уединенной *простой* волне, может обладать суммарным импульсом в направлении распространения волны даже при нулевом «заряде массы» [4]. В этом одно из отличий простых волн от рассмотренных в пп.80,81 стационарно распространяющихся (бегущих) волн.

## РАЗДЕЛ 7

### Анализ размерности и автомодельные решения

89. Математический маятник при  $t=0$  отклонен на угол  $\varphi_0$ ; начальная скорость маятника  $\dot{\varphi}_0$  равна нулю. С помощью анализа размерности получить формулу для периода колебаний  $\tau$ .

90. Тело массы  $m$  брошено под углом  $\alpha$  к горизонту со скоростью  $V_0$  в поле тяжести  $g$ . С помощью анализа размерности найти формулу для дальности полета  $l$ .

91. Используя дополнение Хантли, рассмотреть предыдущую задачу и найти вид функции  $l(\alpha)$ .

Решение. Следуя Хантли, введем класс систем единиц  $ML_xL_yT$ , в котором две независимые размерности длины  $L_x, L_y$  ( по координатам  $x, y$  соответственно). Системы единиц этого класса, вообще говоря, должны содержать размерный коэффициент  $k$ : « $x$ - эквивалент длины по  $y$ »:  $[k] = L_xL_y^{-1}$ .

Предполагая, что в рассматриваемой задаче о бросании тела *движения по координатам  $x, y$  происходят независимо*, исключим  $k$  из числа определяющих величин и запишем искомую зависимость в виде  $l(m, g, V_{ox}, V_{oy})$ . Размерности определяющих величин в классе  $ML_xL_yT$  таковы:  $[m] = M; [g] = L_yT^{-2}; [V_{ox}] = L_xT^{-1}; [V_{oy}] = L_yT^{-1}$ . Все четыре аргумента функции  $l(m, g, V_{ox}, V_{oy})$  имеют независимые размерности. Применяя П-

теорему, получим  $l = c \frac{V_{ox} \cdot V_{oy}}{g}$ , где  $c$ -безразмерная постоянная. Полученная

формула справедлива, в частности, и при  $L_x = L_y$ ; подставляя в нее выражения для  $V_{ox}, V_{oy}$  через  $V_0, \alpha$ , перепишем ее в виде  $l = c \frac{V_0^2}{2g} \cdot \sin 2\alpha$ . Зависимость  $l$  от

угла  $\alpha$  установлена с точностью до безразмерного множителя в рамках анализа размерности.

92. Мгновенный точечный источник вещества испускает  $N$  молекул примеси в одномерной среде, расположенной по оси  $0x$ . С использованием анализа размерности найти распределение концентрации примеси на прямой  $x \in (-\infty, +\infty)$  при  $t > 0$ .

93. Два однородных полупространства  $x > 0$  и  $x < 0$  из одного и того же материала с постоянными температурами  $u_1, u_2$  соответственно при  $t = 0$  приведены в тепловой контакт. Найти распределение температуры и  $u(x, t)$  при  $x \in (-\infty, +\infty); t > 0$ .

94. Рассмотреть задачу о ламинарном пограничном слое на плоской полубесконечной пластинке, обтекаемой однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости (задача Блазиуса).

Указание: воспользоваться анализом размерности в классе систем единиц  $ML_xL_yT$  с независимыми размерностями длины по  $x$  (в направлении обтекания) и по  $y$  (перпендикулярно пластинке).

95. В случае очень высоких температур (звезды) перенос тепла в среде осуществляется за счет лучеиспускания (фотонами). Уравнение лучистой теплопроводности в одномерном случае имеет вид:

$u_t = \chi(u^{n+1})_{xx}$ , где  $u(x,t)$  - распределение температуры по координате  $x$  в момент  $t$ ;  $n \approx 5$ ;  $\chi$  - коэффициент температуропроводности. Рассмотреть задачу о сильной тепловой волне, распространяющейся вдоль оси  $x$ , и вызванной мгновенным точечным источником тепла.

Указание: воспользовавшись анализом размерности найти автомодельное решение уравнения лучистой теплопроводности.

96. Пусть перенос тепла осуществляется вдоль длинного стержня (одномерная теплопроводность). Найти законы сохранения для процесса теплопроводности, полагая, что температура  $u(x,t) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Указание: рассмотреть производные по времени от степенных моментов

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) x^k dx; k = 0, 1, 2, \dots \text{ в силу уравнения теплопроводности } u_t = \chi u_{xx}.$$

97. Даны размерные величины  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и величины  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ ; величины с одинаковыми индексами одной размерности. Можно ли выбрав систему единиц сделать значения  $\bar{a}_i$  в новой системе (обозначим их  $\bar{a}'_i$ ) равными значениям  $a_i$  в старой? Если да, то, наборы величин  $a_i$  и  $\bar{a}'_i$  назовем *подобными*. Найти условия подобия наборов величин.

98. Найти критерий подобия фигур равновесия вращающейся однородной жидкости в собственном гравитационном поле.

99. Пусть идеальная несжимаемая жидкость заполняет трехмерное пространство вне сферической полости радиуса  $a$  с центром в точке  $O$  и покоится в начальный момент времени. Пренебрегая давлением в полости и считая постоянным давление жидкости на бесконечности получить формулу для времени схлопывания полости  $\tau$ .

Указание: воспользоваться анализом размерности.

100. В задаче о коллапсе (п.99) найти зависимость радиуса полости от времени на заключительной стадии коллапса (в рамках анализа размерности).

Решение. В процессе коллапса сохраняется энергия жидкости  $E$ . Ее значение равно (с точностью до знака) работе вытеснения жидкости при образовании полости радиуса  $a$ , поскольку кинетическая энергия жидкости при  $t = 0$  по условию задачи равна нулю. Работа вытеснения равна произведению объема полости  $4/3 \cdot \pi a^3$  на постоянное давление  $p_\infty$  с обратным знаком, т.к. при вытеснении жидкости силы давления на поверхности полости и перемещение границы полости противоположно направлены; отсюда  $E = (4/3) \cdot \pi a^3 p_\infty$ . На

заклучительной стадии коллапса ( $R \ll a$ ) несущественны детали начальных условий, а определяющим является значение интеграла энергии. На этом основании будем полагать, что радиус полости на заключительной стадии коллапса зависит только от  $E, \rho, t - \tau$ . В классе систем единиц MLT эти три определяющие величины имеют независимые размерности, т.е. из них нельзя составить безразмерный комплекс. Размерность радиуса имеет комплекс  $\left( \frac{E(t - \tau)^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}}$ . Применяя  $\Pi$ -теорему получим  $R(t) = c \left( \frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot (t - \tau)^{\frac{2}{5}}$  при  $t \rightarrow \tau$ , где  $\tau$  - время схлопывания,  $c$  - безразмерная постоянная, которую в рамках анализа размерности найти нельзя. Сравнивая с точным решением задачи [3], видим, что  $c = (2\pi)^{-\frac{1}{5}} \cong 0,69$ .

### Литература к разделам 6 и 7.

1. Г.Г. Денисов. О волновом импульсе и усилиях, возникающих на границе одномерной упругой системы. //Изв.РАН.МГТ. 1994. №1. С.42-51.
2. Н.В.Дерендяев. О силовом воздействии волн на тела. //Испытания материалов и конструкций; сб. научн. тр. Вып.2.-Н.Новгород: 2000. С.191-196.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика.- М.: Наука, 1986.
4. Г.Г.Денисов. К вопросу об импульсе волны, радиационном давлении и других величинах в случае плоских движений идеального газа. //ПММ. 1999. Т.63. Вып. 3. С.390-402.

