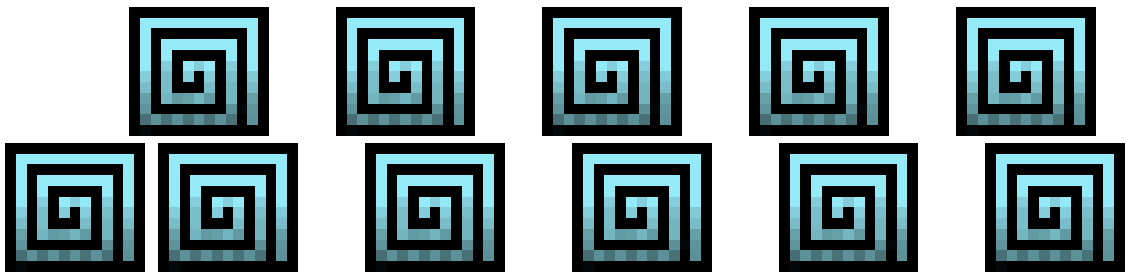


Дискретная математика

В.Е. Алексеев

2017

Глава 1. Множества

1.1. Понятие множества

Под *множеством* математики понимают соединение каких-либо объектов в одно целое. Создатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845-1918) определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью». Он же сформулировал это короче: «множество – это многое, мыслимое нами как единое». На самом деле ни одна из этих фраз не является определением в строгом математическом понимании. Понятие множества вообще не определяется, это одно из первичных понятий математики. Его можно пояснить, приводя более или менее близкие по смыслу слова: коллекция, класс, совокупность, ансамбль, собрание, или примеры: экипаж корабля – множество людей, стая – множество птиц, созвездие – множество звезд. Множества, рассматриваемые в математике, состоят из математических объектов (чисел, функций, точек, линий и т.д.). Объекты, из которых состоит множество, называют его *элементами*. Важно отметить, что в множестве все элементы отличаются друг от друга, одинаковых элементов быть не может.

Тот факт, что элемент x принадлежит множеству A, обозначают так: $x \in A$, а если x не принадлежит A, то пишут $x \notin A$.

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*. Конечное множество может быть задано перечислением его элементов, при этом список элементов заключается в фигурные скобки, например:

$\{1, 2, 4, 8, 16\}$;

$\{a, b, c, d\}$;

{красный, желтый, зеленый}.

Элементы могут перечисляться в любом порядке: $\{a, b, c, d\}$ и $\{c, b, d, a\}$ – одно и то же множество.

Число элементов в конечном множестве называется его *мощностью***.** Мощность множества X обозначается $|X|$.

Иногда и бесконечные множества задаются в форме перечисления элементов с использованием многоточия, например:

$\{1,2,3, \ldots\}$;

$\{1,3,5, \ldots\}$;

$\{1,4,9, \ldots\}$.

При этом предполагается, что читающий подобную запись знает, как должен быть продолжен написанный ряд (или его следует предупредить об этом).

Примеры бесконечных множеств:

$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{N}_{\mathbf{0}} = \{0,1,2, \dots\}$ – множество натуральных чисел с добавленным элементом 0;

$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2, \dots\}$ – множество всех целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел.

Пустое множество обозначается знаком $\emptyset$, оно не содержит ни одного элемента: $|\emptyset| = 0$. Иногда полезно считать, что существует некое *универсальное множество* (*универс*, *универсум*), содержащие все элементы, представляющие интерес в данных обстоятельствах. Например, изучая свойства целых чисел, мы можем выбрать в качестве универса множество $\mathbb{Z}$, а занимаясь геометрией на плоскости – множество всех точек плоскости. Обычно универс обозначают буквой U .

Часто множество задают указанием свойства P , выделяющего элементы этого множества среди всех элементов универса U. Тот факт, что элемент x имеет свойство P, записывают так: $P(x)$. Множество всех элементов из U, имеющих свойство P, представляется в форме: $\{x \in U: P(x)\}$ или $\{x: x \in U \text{ и } P(x)\}$ или просто $\{x: P(x)\}$, если ясно, о каком универсе идет речь. Примеры:

$\{x \in \mathbb{N}: x$ четно$\}$;

$\{x: x \in \mathbb{Z}$ и $x > 0\} = \mathbb{N}$;

$\{x: x^2 - 2 = 0\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

1.2. Подмножества

Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент из A принадлежит B. Символически это записывается так: $A \subseteq B$. Это можно прочитать как "A включено в B". Отметим некоторые свойства отношения включения:

$\emptyset \subseteq A$ для любого множества A.

$A \subseteq A$ для любого множества A.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

Элемент множества сам может быть множеством. Например, множество $X = \{\{a, b\}, \{a\}, \emptyset, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ состоит из 5 элементов.

Если элементами множества X являются подмножества множества A, то говорят, что X есть *семейство подмножеств* множества A. Приведенное выше множество X есть семейство подмножеств множества $A = \{a, b, c\}$.

Семейство всех подмножеств множества A обозначается через 2^A. Если, например, $A = \{a, b\}$, то $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Теорема 1.1 (о числе подмножеств). *Если A – конечное множество, то* $|2^A| = 2^{|A|}$.

Доказательство. Пусть $|A| = n$. Доказательство проводим индукцией по n. При $n = 0$ утверждение верно, так как $2^0 = 1$, а единственным подмножеством пустого множества является оно само. При $n > 0$ возьмем какой-нибудь элемент $x \in A$ и обозначим через B множество всех элементов множества A, отличных от x. Тогда $|B| = n - 1$ и по предположению индукции $|2^B| = 2^{n-1}$. Каждое подмножество множества A либо содержит, либо не содержит элемент x. Подмножества, не содержащие x, являются подмножествами множества B, таких имеется 2^{n-1}. Всякое подмножество, содержащее x, получается добавлением элемента x к некоторому подмножеству множества B. Поэтому таких подмножеств тоже 2^{n-1}. Всего, следовательно, $|2^A| = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$. ■

Для представления подмножеств конечного множества часто используют следующий способ. Пусть U – конечное множество, элементы которого пронумерованы числами 1, 2, …, n: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Подмножество $X \subseteq U$ можно задать последовательностью нулей и единиц:

$$h(X) = (h_1, h_2, \dots, h_n), \text{ где } h_i = \begin{cases} 1, & \text{если } u_i \in X, \\ 0, & \text{если } u_i \notin X. \end{cases}$$

Последовательность $h(X)$ называют *характеристическим вектором* множества X. Пусть, например, $U = \{a, b, c, d, e\}$ и элементы нумеруются в алфавитном порядке. Тогда

$$h(\{a, c, d\}) = (1,0,1,1,0), \quad h(\{d, e\}) = (0,0,0,1,1), \quad h(\emptyset) = (0,0,0,0,0).$$

1.3. Алгебра множеств

Рассмотрим некоторые операции над множествами.

Объединение множеств A и B определяется как множество

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пример: $A = \{0,1,3\}$, $B = \{1,2,3\}$, $A \cup B = \{0,1,2,3\}$.

Пересечение множеств A и B определяется как множество

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пример: $A = \{0,1,3\}$, $B = \{1,2,3\}$, $A \cap B = \{1,3\}$.
Если $A \cap B = \emptyset$, то говорят, что множества A и B *не пересекаются.*

Отметим некоторые свойства операций объединения и пересечения.

1. Для любого множества A выполняются равенства

$A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$,

$A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$.

2. *Коммутативность*: для любых множеств A и B выполняются равенства

$A \cup B = B \cup A$,

$A \cap B = B \cap A$.

3. *Ассоциативность*: для любых множеств A , B и C выполняются равенства

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

4. *Дистрибутивность*: для любых множеств A , B и C выполняются равенства

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Благодаря свойству ассоциативности можно записывать объединение и пересечение любого числа множеств, не пользуясь скобками для указания порядка действий. В этих случаях применяется сокращенная запись:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Разность множеств A и B определяется как множество

$$A - B = (x: x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Пример: $A = \{0,1,3\}$, $B = \{1,2,3\}$, $A - B = \{0\}$, $B - A = \{2\}$.

Дополнение множества A относительно универса U определяется как множество

$$\bar{A} = U - A.$$

Симметрическая разность множеств A и B определяется как множество

$$A \otimes B = (A - B) \cup (B - A).$$

Отметим еще некоторые тождества, справедливые для введенных операций.

5. $A - B = A \cap \bar{B}$.

6. $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = U$.

7. $\bar{\bar{A}} = A$.

8. *Законы де Моргана*:

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$,

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Каждое из приведенных тождеств доказывается непосредственно на основании определений операций: чтобы доказать, что два множества равны, нужно показать, что всякий элемент одного из них принадлежит другому и наоборот. В качестве примера приведем доказательство одного из законов де Моргана:

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ и } x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ и } x \in \bar{B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

С помощью операций можно выразить отношения между множествами:

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$,

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$,

$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$,

$A = B \Leftrightarrow A \otimes B = \emptyset$.

С целью рационализации записи формул иногда принимают некоторые дополнительные соглашения. Можно, например, договориться, что операция пересечения имеет более высокий приоритет, чем другие. Это означает, что в отсутствие скобок, указывающих порядок действий, первой выполняется

операция пересечения. Иногда знак пересечения вовсе опускают: пишут AB вместо $A \cap B$. Если принять эти соглашения, то, например, формула $A \cup (B \cap C)$ запишется как $A \cup BC$.

1.4. Диаграмма Венна

Диаграмма Венна – способ графического представления отношений между множествами и иллюстрации операций над множествами. Множества изображаются в виде кругов или других фигур, а универс, если он есть – в виде прямоугольника, охватывающего другие фигуры. На рисунке 1.1 изображены диаграммы Венна двух множеств с разными типами взаимоотношений между ними. На рисунке 1.2 показаны результаты различных операций над множествами. На рисунке 1.3 представлена диаграмма Венна для трех множеств. На ней представлены всевозможные пересечения этих множеств и их дополнений.

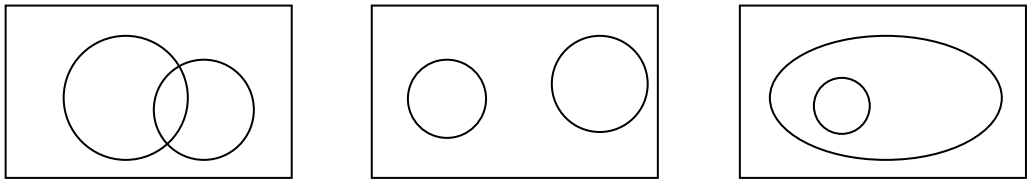
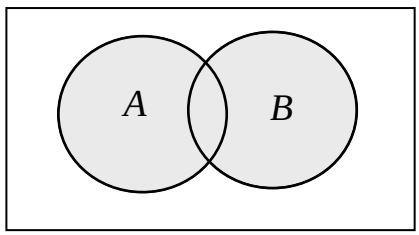
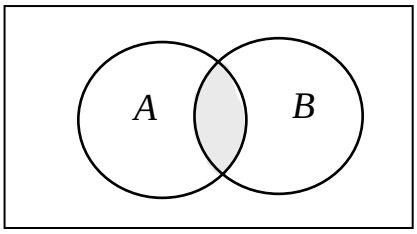


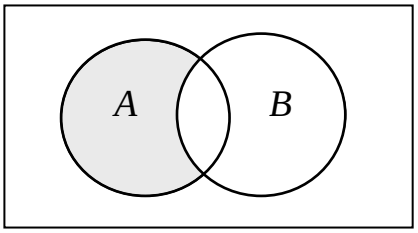
Рис. 1.1. Диаграммы Венна для двух множеств: слева – пересекающихся, в центре – непересекающихся, справа – одно включено в другое.



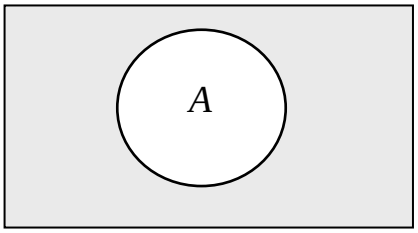
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



$\bar{A}$

Рис. 1.2. Диаграммы Венна, иллюстрирующие операции над множествами, результат операции выделен цветом

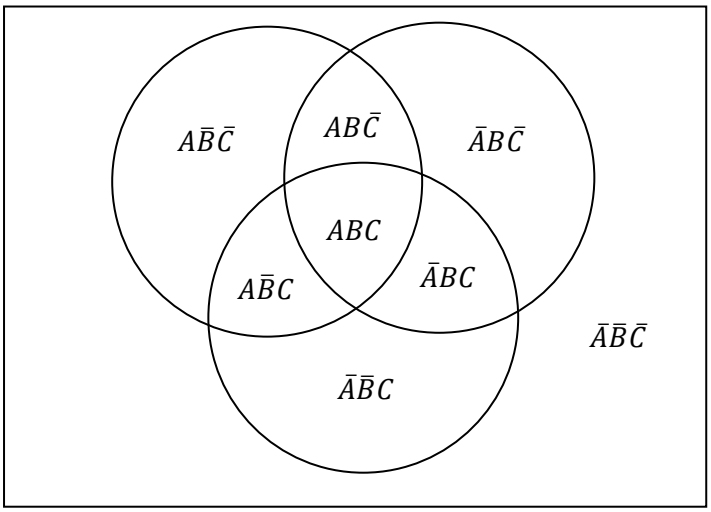


Рис. 1.3. Диаграмма Венна для трех множеств

1.5. Декартово произведение

Пусть A и B – два множества. Их *декартово произведение* (называемое также *прямым произведением*) определяется как множество всех пар (x, y), в которых $x \in A$, $y \in B$:

$$A \times B = \{(x, y): x \in A, y \in B\}.$$

Отметим, что пары здесь имеются в виду упорядоченные: (x, y) и (y, x) – это разные пары (если $x \neq y$).

Множество $A \times A$ называется *декартовым квадратом* множества A и обозначается через A^2.

Примеры:

Если $A = \{a, b, c\}$, а $B = \{1,2\}$, то

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$,

$B^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

Множество дат типа «3 марта» можно рассматривать как декартово произведение множеств $A = \{1,2, \dots ,31\}$ и $B = \{$январь, … , декабрь$\}$.

Множество всех вещественных чисел, заключенных между 0 и 1, геометрически представляется отрезком $[0,1]$ координатной прямой. Множество $[0,1]^2$ состоит из пар чисел, которым соответствуют точки плоскости, заполняющие квадрат.

В общем случае декартово произведение n множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ определяется как множество, состоящее из последовательностей вида $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в которых первый элемент принадлежит множеству A_1, второй – множеству A_2, и т.д.:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n):\ x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n)\}.$$

Произведение n одинаковых множеств $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ называется *n-ой декартовой степенью* множества A и обозначается через A^n. Например, множество $[0,1]^3$ геометрически представляет собой множество точек куба в трехмерном пространстве.

1.6. Мультимножества

Мультимножество – это совокупность элементов, в которую каждый элемент может входить больше одного раза. Как и в множестве, порядок элементов в мультимножестве не важен.

Примеры:

$\{a, a, b, c, c, c\}$ – мультимножество, состоящее из элементов множества $\{a, b, c\}$;

$\{c, a, c, b, c, a\}$ – то же самое мультимножество;

$\{a, b, b, b, c, c\}$ – другое мультимножество.

Глава 2. Отношения

2.1. Понятие отношения, общие свойства отношений

Отношением на множестве A называется любое подмножество множества A^2. Если R – отношение и $(x, y) \in R$, то говорят, что элемент x находится в отношении R с элементом y. Тот факт, что элемент x находится в отношении R с элементом y записывают иногда так: xRy.

Заметим, что элементы множества A^2 – это упорядоченные пары элементов множества A, поэтому из того, что x находится в отношении R с y не следует, что y находится в отношении R с x.

Примеры.

1. Неравенство $<$ является отношением на множестве $\mathbb{N}$ (а также на $\mathbb{Z}$ и на $\mathbb{R}$). Число 2 находится в отношении $<$ с числом 5, но 5 не находится в этом отношении с 2.

2. Равенство $=$ и неравенство $\neq$ являются отношениями на любом множестве A. Каждый элемент находится в отношении $=$ с самим собой и в отношении $\neq$ со всеми остальными.

3. Для любого множества A включение $\subseteq$ является отношением на множестве 2^A.

4. Отношение делимости на множестве $\mathbb{Z}$ определяется следующим образом: x *делит* y (или y *делится* на x), если существует такое целое k, что $xk = y$. Это отношение обозначается так: $x|y$.

5. Пусть A – множество всех прямых на плоскости. Можно определить отношение параллельности $\parallel$ на A : $L_1 \parallel L_2$ означает, что прямая L_1 параллельна прямой L_2.

Если множество A конечно, то и любое отношение на нем конечно и может быть задано перечислением пар элементов, находящихся в этом отношении. В качестве примера рассмотрим отношение делимости на множестве $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Это отношение можно задать как множество пар

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4),$$

$$(5,5), (6,6)\}.$$

Отношение на конечном множестве можно также представить в форме таблицы. Пусть R – отношение на множестве $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Построим таблицу с n строками и n столбцами, в которой на пересечении строки с номером i и столбца с номером j поставим 1, если $(a_i, a_j) \in R$, и 0 в

противном случае. Для приведенного выше примера отношения делимости таблица получается такая:

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

Наглядное представление отношения дает *граф отношения*. Это диаграмма, которая строится следующим образом. Пусть R – отношение на множестве A. Элементы множества A изобразим кружками (или любыми другими значками), эти кружки называют *вершинами* графа. Если xRy, то рисуем стрелку от x к y. На рисунке 2.1 показан граф рассмотренного выше отношения делимости.

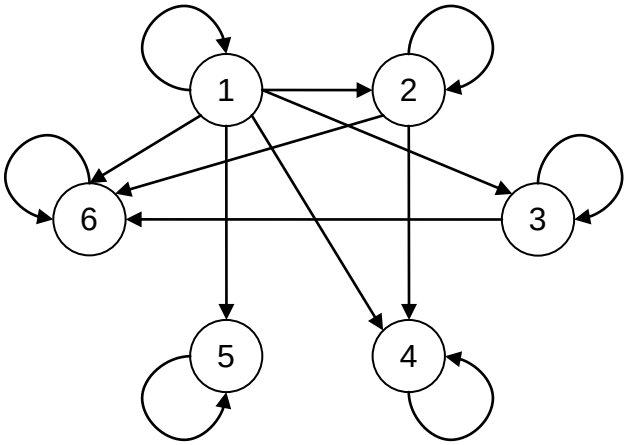


Рис. 2.1. Граф отношения делимости

Так как отношение есть множество (пар), то любые операции над множествами можно применять к отношениям. Если R_1 и R_2 – отношения на множестве A, то $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ и т.д. – тоже отношения на A. Если R – отношение на A, то $\bar{R}$ – дополнение R до множества A^2.

Обратное отношение R^{-1} к отношению R определяется следующим образом:

$$R^{-1} = \{(x, y\}:\ (y, x) \in R\}.$$

На рисунке 2.2 показаны графы двух отношений на множестве $A = \{a, b, c\}$ и результаты различных операций над ними.

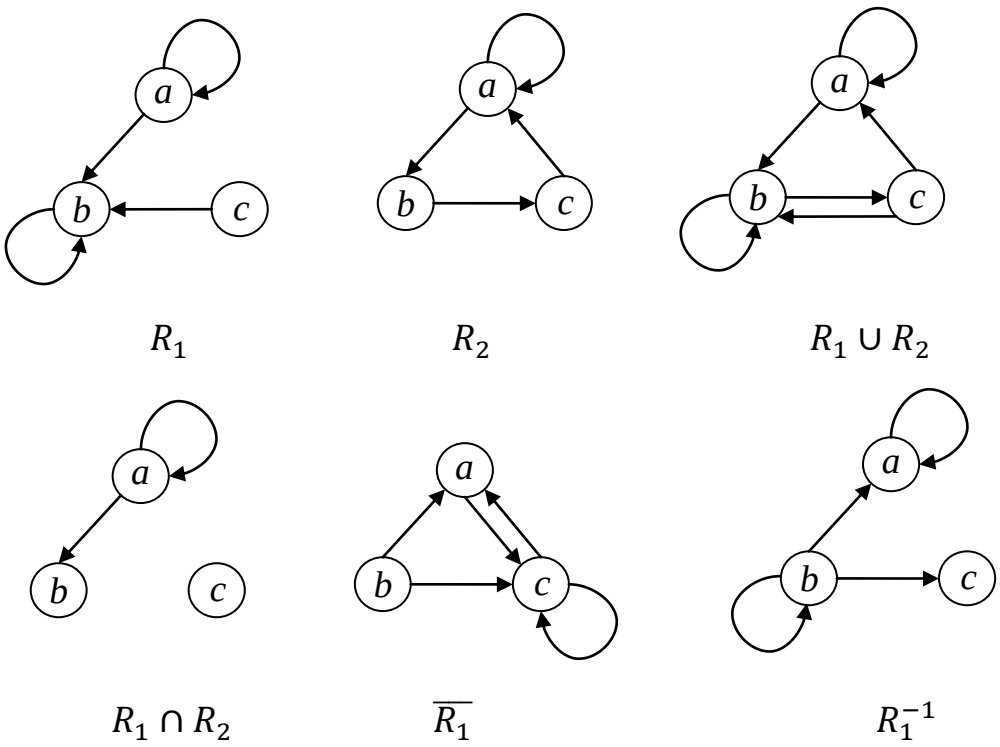


Рис. 2.2. Графическое представление двух отношений и операций над ними

Отношение R на множестве A называется

рефлексивным, если для любого $x \in A$ имеет место xRx;

симметричным, если для любых $x, y \in A$ из xRy следует yRx;

антисимметричным, если для любы $x, y \in A$ х из xRy и yRx следует $x = y$;

транзитивным, если для любых $x, y, z \in A$ из xRy и yRz следует xRz.

2.2. Отношения эквивалентности

Всякое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.

Примеры.

1. Отношение равенства на любом множестве есть отношение эквивалентности.

2. Отношение параллельности прямых на плоскости – отношение эквивалентности.

3. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим следующее отношение R на множестве $\mathbb{Z}$: xRy тогда и только тогда, когда разность $x - y$ делится на n. Очевидно, это отношение рефлексивно и симметрично. Убедимся, что оно транзитивно.

Пусть xRy и yRz. Это означает, что существуют такие p и q, что $x - y = pn$, $y - z = qn$. Складывая эти равенства, получаем $x - z = (p + q)n$, отсюда следует, что xRz. Итак, R – отношение эквивалентности. Если xRy, то говорят, что x *и* y *сравнимы по модулю* n и пишут

$$\boldsymbol{x \equiv y} \pmod{\boldsymbol{n}}.$$

Семейство непустых подмножеств множества A называется *разбиением*, если всякий элемент множества A принадлежит точно одному подмножеству из этого семейства. Эти подмножества называются *частями разбиения*.

Пусть, например, $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Тогда

$$F = \{\{0,5\},\{1,8,9],\{2\},\{3,4,6,7\}\}$$

– разбиение множества A на четыре части.

Пусть F – разбиение множества A. Определим отношение R на A следующим образом:

$xRy \Leftrightarrow x$ и y принадлежат одной части разбиения.

Очевидно, R – отношение эквивалентности. Оказывается, все отношения эквивалентности устроены подобным образом.

Теорема 2.1 (о факторизации). *Для любого отношения эквивалентности R на множестве A существует такое разбиение F этого множества, что два элемента множества находятся в отношении R тогда и только тогда, когда они принадлежат одной части разбиения.*

Доказательство. Определим для каждого $x \in A$ множество $R(x)$ всех элементов, находящихся в отношении R с x: $R(x) = \{y\colon\ xRy\}$. Рассмотрим семейство F, состоящее из всех таких множеств: $F = \{R(x)\colon\ x \in A\}$ (отметим, что некоторые из этих множеств могут совпадать, то есть может быть $R(x) = R(y)$ при $x \neq y$, но в F каждое множество входит не более одного раза).

Покажем, что F является разбиением множества A. В самом деле, так как отношение R рефлексивно, то $x \in R(x)$ для любого $x \in A$. Следовательно, каждый элемент принадлежит хотя бы одному множеству из F. Допустим, x принадлежит, кроме $R(x)$, еще какому-нибудь множеству $R(y)$, т.е. имеет место отношение yRx. Покажем, что $R(y) = R(x)$. Пусть $z \in R(x)$. Тогда xRz. Так как отношение R транзитивно то из yRx и xRz следует, что yRz, то есть $z \in R(y)$. Следовательно, $R(x) \subseteq R(y)$. Обратно, если $z \in R(y)$, то yRz, отсюда по транзитивности zRx, значит, $z \in R(x)$. Следовательно, $R(y) \subseteq R(x)$.

Итак, F – разбиение. Покажем, что оно обладает свойством, о котором говорится в утверждении теоремы. Пусть элементы x и y находятся в отношении R: xRy. Тогда $y \in R(x)$. Но, как мы видели, $x \in R(x)$, значит, оба

элемента принадлежат одной части разбиения F. Обратно, пусть элементы x и y принадлежат одной части разбиения. Так как $x \in R(x)$, то эта часть есть $R(x)$. Значит, $y \in R(x)$, следовательно, xRy. ■

Части разбиения, о котором говорится в этой теореме, называются *классами эквивалентности*.

Примеры.

1. Для отношения равенства каждый класс эквивалентности состоит из одного элемента.

2. Для отношения параллельности прямых на плоскости каждый класс эквивалентности состоит из всех прямых одного направления.

3. Для отношения сравнимости по модулю n каждый класс эквивалентности состоит из чисел, имеющих одинаковый остаток при делении на n. Таким образом, всего будет n классов.

Разбиение на классы эквивалентности называют *факторизацией* множества A по отношению R, отсюда и название теоремы.

2.3. Отношения порядка

Всякое рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением порядка*.

Примеры.

1. Отношение равенства на любом множестве есть отношение порядка.

2. Отношение $\leq$ на множестве $\mathbb{R}$ является отношением порядка.

3. Отношение $<$ на множестве $\mathbb{R}$ не является отношением порядка, так как не рефлексивно.

4. Отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$ – отношение порядка.

Если на множестве A задано отношение порядка R, то пару (A, R) называют *упорядоченным множеством*. Примеры упорядоченных множеств:

$(\mathbb{R}, \leq)$,

$(2^U, \subseteq)$,

$(\mathbb{N}, |)$.

Пусть (A, R) – упорядоченное множество и $x, y \in A$. Говорят, что x и y *сравнимы*, если xRy или yRx, в противном случае они *несравнимы*. Если в

(A, R) любые два элемента сравнимы, то порядок R называется *линейным*, а (A, R) – *линейно упорядоченным множеством.* Если же имеются несравнимые элементы, то говорят, что R – *частичный порядок*, а (A, R) – *частично упорядоченное множество*. Например, $(\mathbb{R}, \leq)$ – линейно упорядоченное, а $(2^U, \subseteq)$ – частично упорядоченное множество.

Пусть (A, R) – упорядоченное множество. Если xRy и $x \neq y$, то говорят, что элемент x *предшествует* элементу y (или, что x *меньше* y). Если при этом не существует такого элемента z, отличного от x и y, что xRz и zRy, то говорят, что x *непосредственно предшествует* y. Таким образом, для всякого отношения порядка R определяется отношение непосредственного предшествования, которое будем обозначать R^*.

Примеры.

1. В упорядоченном множестве $(\mathbb{Z}, \leq)$ каждому элементу x непосредственно предшествует элемент $x - 1$.

2. В упорядоченном множестве $(2^U, \subseteq)$ для множества $A \subseteq U$ непосредственно предшествующими являются все множества, получающиеся из A удалением одного элемента.

3. В упорядоченном множестве $(\mathbb{R}, \leq)$ ни у одного элемента нет непосредственно предшествующих, то есть в этом случае $R^* = \emptyset$.

Пусть R – отношение порядка на множестве A и xRy. Последовательность элементов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ множества A, в которой $z_1 = x$, $z_n = y$, и $z_k R z_{k+1}$ для $k = 1,2, \ldots, n-1$, назовем *цепочкой между x и y.*

Теорема 2.2 (о конечных упорядоченных множествах). *Пусть (A, R) – конечное упорядоченное множество, x и y – различные элементы множества A и xRy. Существует цепочка $z_1, z_2, \ldots, z_n$ между x и y, в которой $z_k R^* z_{k+1}$ для каждого $k = 1,2, \ldots, n-1$.*

Доказательство. Среди всех цепочек между x и y выберем цепочку наибольшей длины, пусть это $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Она обладает требуемым свойством – каждый ее элемент, кроме последнего, непосредственно предшествует следующему элементу. Действительно, если неверно, что $z_k R^* z_{k+1}$, то существует промежуточный элемент u: $z_k R u$ и $u R z_{k+1}$. Но тогда получаем более длинную цепочку $z_1, z_2, \ldots, z_k, u, z_{k+1}, \ldots, z_n$ между x и y. ■

Граф отношения R^* называется *диаграммой Хассе* отношения R. Из доказанной теоремы следует, что диаграмма Хассе дает полное описание отношения R: элемент x предшествует элементу y тогда и только тогда, когда из x можно попасть в y, двигаясь вдоль стрелок диаграммы. Обычно вершины на диаграмме располагают так, чтобы меньший элемент находился ниже большего. Тогда отношение между элементами можно изображать

линией, а не стрелкой. На рисунке 2.3 показана диаграмма Хассе частично упорядоченного множества $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$.

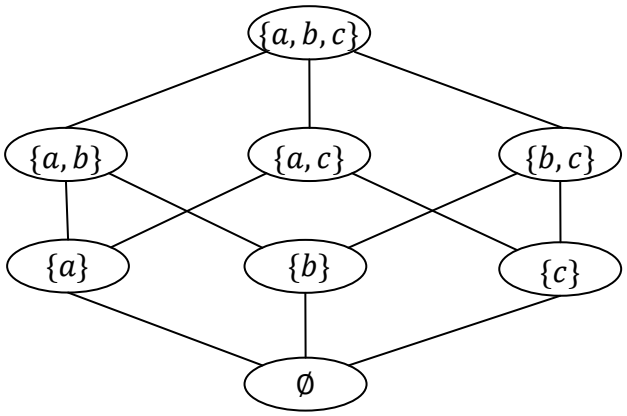


Рис.2.3. Диаграмма Хассе упорядоченного множества $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

Элемент x называется *максимальным элементом* упорядоченного множества (A, R), если не существует такого $y \in A$, что $y \neq x$ и xRy, то есть не существует большего элемента. *Минимальный элемент* – тот, для которого не существует меньшего.

В упорядоченном множестве $(\mathbb{N}, \leq)$ имеется один минимальный элемент и ни одного максимального, а в упорядоченном множестве $(\mathbb{Z}, \leq)$ нет ни максимальных, ни минимальных. В любом конечном упорядоченном множестве имеются и минимальные и максимальные элементы.

Элемент x называется *наибольшим элементом* упорядоченного множества (A, R), если для каждого $y \in A$ выполняется yRx, и *наименьшим*, если для каждого $y \in A$ выполняется xRy.

На рисунке 2.4 показана диаграмма Хассе упорядоченного множества $(\{1,2,3,4,5,6\}, |)$. Видно, что в этом множестве имеется один минимальный элемент, он же наименьший, и три максимальных элемента, а наибольшего элемента нет.

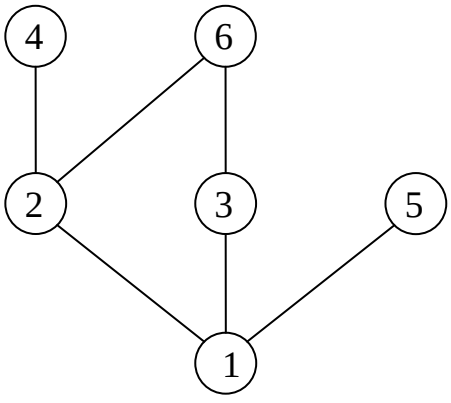


Рис.2.4. Диаграмма Хассе отношения делимости

Глава 3. Комбинаторика

3.1. Принципы подсчета

Комбинаторика (комбинаторный анализ) – раздел дискретной математики, в котором изучаются объекты, составленные из элементов конечных множеств. Одним из основных видов комбинаторных задач являются перечислительные задачи. В этих задачах требуется подсчитать число объектов, обладающих теми или иными свойствами. При решении многих комбинаторных задач используются следующие простые правила.

Правило равенства. *Если между двумя множествами имеется взаимно однозначное соответствие (то есть существует биекция одного из этих множеств на другое), то эти множества равномощны.*

Правило суммы. *Если конечные множества A и B не пересекаются, то* $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Правило произведения. *Для любых конечных множеств A и B выполняется равенство* $|A \times B| = |A||B|$.

Правило суммы очевидно. Правило произведения можно аргументировать так: декартово произведение $A \times B$ состоит из пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Элемент a в такой паре может принимать $|A|$ различных значений, а при каждом значении a элемент b может принимать $|B|$ различных значений. Всего получается $|A||B|$ различных пар.

Правила суммы и произведения можно обобщить на любое число множеств.

Общее правило суммы. *Если никакие два из конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ не пересекаются, то* $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$.

Общее правило произведения. *Для любых конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ выполняется равенство* $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1||A_2| \dots |A_n|$.

Общее правило произведения легко доказать с помощью индукции по числу сомножителей n. Случай $n = 2$ рассмотрен выше. В общем случае множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ состоит из последовательностей вида $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in A_i$ для $i = 1,2, \dots, n$. Такую последовательность можно рассматривать, как пару, в которой первый элемент – это последовательность $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, принадлежащая множеству $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}$, а второй элемент a_n. Первый элемент по предположению

индукции принимает $|A_1||A_2|\ldots|A_{n-1}|$ значений, а второй $|A_n|$ значений. По правилу произведения для двух множеств получается $|A_1||A_2|\ldots|A_n|$ пар.

В случае, когда все сомножители одинаковые, из общего правила произведения получаем $|A^n| = |A|^n$.

3.2. Наборы и слова

Термин *набор* означает конечную последовательность элементов. Понятие набора отличается от понятия множества тем, что

- в наборе могут быть одинаковые элементы,
- порядок расположения элементов в наборе важен (наборы, состоящие из одинаковых элементов, расположенных в разном порядке, считаются различными).

Чтобы отличать наборы от множеств, будем применять круглые скобки для записи наборов: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Число элементов в наборе называется длиной набора.

Пример: (a, a, b, c, c, c) , (c, a, c, b, c, a) , (a, a, b, b, c, c) – разные наборы длины 6, составленные из элементов множества $\{a, b, c\}$.

Задача. Сколько различных наборов длины n можно составить из элементов множества мощности k?

Решение. Наборы длины n, составленные из элементов множества A, – это элементы декартовой степени A^n . Ответ дает общее правило произведения: число таких наборов равно k^n.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ – алфавит, то есть элементы множества A – это буквы. Из букв можно составлять слова: любая последовательность вида $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}$ является словом длины n в алфавите A.

Задача. Сколько различных слов длины n можно составить из букв алфавита мощности k?

Решение. Слово – это упорядоченная последовательность букв, причем одна и та же буква может встречаться в слове несколько раз. Так какая же разница между словами и наборами? Чисто синтаксическая – в записи слов элементы (буквы) не разделяются запятыми и нет скобок. Принципиальной разницы нет, слова – это те же наборы. Поэтому и ответ в задаче о числе слов будет тот же самый: k^n.

Задача. Сколько существует различных бинарных отношений на множестве из n элементов?

Решение. Мы видели, что бинарное отношение на множестве из n элементов можно задать с помощью таблицы размера $n \times n$, заполненной нулями и единицами. Соответствие между отношениями и таблицами взаимно однозначное, так что число отношений равно числу способов заполнить такую таблицу. Если выписать строки таблицы одну за другой, получится слово длины n^2 в алфавите $\{0,1\}$. Таких слов имеется 2^{n^2} . Это и есть число отношений.

3.3. Лексикографический порядок

Для ускорения поиска слов в словарях их располагают в алфавитном порядке. В математике этот порядок называется *лексикографическим* и определяется следующим образом.

Сначала вводится отношение линейного порядка на множестве букв данного алфавита A. Для этого отношения будем использовать символ $\leq$, а для соответствующего строгого порядка – символ $<$ ($a < b$ означает, что $a \leq b$ и $a \neq b$). Обычно это тот порядок, в котором принято перечислять буквы алфавита. Например, в руссом алфавите А < Б < В < ⋯.

Определим сначала лексикографический порядок на множестве слов одинаковой длины. Пусть $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ и $\beta = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$ – слова в алфавите A . Говорят, что слово α *лексикографически меньше* слова β (или α *лексикографически предшествует* β), если существует такое p, что $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_{p-1} = \beta_{p-1}, \alpha_p < \beta_p$.

Это проверяется так: два слова сравниваются буква за буквой слева направо. Сначала сравниваются первые буквы, если они совпадают, то сравниваются вторые и т.д. до тех пор, пока не обнаружатся первые слева несовпадающие буквы. Отношение между словами определяется отношением между этими несовпадающими буквами.

Будем использовать тот же символ $<$ для записи того, что одно слово лескикографически меньше другого и $\leq$ для нестрогой формы, т.е. с добавлением возможности равенства. Очевидно, отношение $\leq$ рефлексивно и антисимметрично. Докажем, что оно транзитивно.

В самом деле, пусть $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \gamma$, где $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, $\beta = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$, $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n$. Покажем, что $\alpha \leq \gamma$. Если $\alpha = \beta$ или $\beta = \gamma$ это очевидно. Допустим, $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$. Тогда существуют такое p , что $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_{p-1} = \beta_{p-1}$, $\alpha_p < \beta_p$, и такое q , что $\beta_1 = \gamma_1$, …, $\beta_{q-1} = \gamma_{q-1}$, $\beta_q < \gamma_q$. Рассмотрим два случая: $p \leq q$ и $p > q$.

Если $p \leq q$, то $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$, …, $\alpha_{p-1} = \beta_{p-1} = \gamma_{p-1}$, $\alpha_p < \beta_p \leq \gamma_p$, следовательно, $\alpha < \gamma$. Если $p > q$, аналогично: $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$, …, $\alpha_{q-1} = \beta_{q-1} = \gamma_{q-1}, \alpha_q = \beta_q < \gamma_q$ и опять $\alpha < \gamma$.

Таким образом, при любом n отношение $\leq$ является отношением порядка на множестве всех слов длины n в алфавите A. Очевидно также, что

любые два слова лексикографически сравнимы, т.е. этот порядок – линейный.

Лексикографический порядок можно распространить на бесконечное множество всех слов в данном алфавите. Достаточно дополнить приведенное определение следующим пунктом: если слово α является началом слова β, то α лексикографически предшествует β.

3.4. Перестановки

Перестановкой из n различных элементов называется набор, в котором каждый из этих элементов встречается точно один раз. Удобно считать, что переставляемыми элементами являются числа $1,2,\dots,n$. Имеется одна перестановка из одного элемента и две перестановки из двух элементов: (1,2) и (2,1). Все перестановки из трех элементов можно получить, добавляя к каждой перестановке из двух элементов третий элемент всеми возможными способами. Имеется ровно три способа вставить элемент 3 в перестановку (1,2): (3,1,2), (1,3,2), (1,2,3). То же относится и к перестановке (2,1). Таким образом, получается $3 \cdot 2 = 6$ перестановок из трех элементов. В свою очередь, в каждую перестановку из трех элементов четвертый элемент можно вставить четырьмя способами и поэтому число перестановок из четырех элементов равно $4 \cdot 6 = 24$. Вообще, в каждую перестановку из элементов $1,2,\dots,n-1$ элемент n можно вставить n способами, поэтому число перестановок из n элементов в n раз больше числа перестановок из $n-1$ элемента. Отсюда следует, что число перестановок из n элементов равно

$$n(n-1)\dots 3 \cdot 2 = n!$$

Для строгого доказательства можно применить индукцию по n.

Другой способ вычислить число перестановок состоит в том, что мы рассматриваем перестановку $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ как результат последовательного выбора элементов $p_1, p_2, \dots, p_n$ и подсчитываем число вариантов выбора на каждом шаге. Сначала выбираем элемент p_1. Это можно сделать n способами. После того, как p_1 выбран, для выбора элемента p_2 остается $n-1$ вариант, так как p_2 должен отличаться от p_1. Следовательно, пару (p_1, p_2) можно выбрать $n(n-1)$ способами. После того, как выбрана эта пара, для выбора элемента p_3 остается $n-2$ варианта – он должен отличаться и от p_1, и от p_2. Значит, тройку (p_1, p_2, p_3) можно выбрать $n(n-1)(n-2)$ способами. В итоге приходим к той же формуле для числа перестановок.

3.5. Последовательный выбор

Принцип последовательного выбора элементов, с помощью которого только что была выведена формула для числа перестановок, применим к решению многих комбинаторных задач. Может показаться, что здесь применяется правило произведения, на самом деле это не так. Первый элемент p_1 мы выбираем из множества $\{1,2,\dots,n\}$. А вот множество, из которого выбирается элемент p_2, зависит от того, какой выбран элемент p_1: если $p_1 = 1$, то p_2 нужно выбирать из множества $\{2,3,\dots,n\}$, а если $p_1 = 2$, то из множества $\{1,3,\dots,n\}$ и т.д. Значит, здесь не идет речь о декартовом произведении некоторых фиксированных множеств и правило произведения, как оно сформулировано выше, не работает. На самом деле при подсчете таким последовательным способом важно не то, из какого множества делается выбор на каждом шаге, а то, что мощность этого множества не зависит от выбора, сделанного на предыдущих шагах. Сформулируем этот принцип подсчета в общем виде.

Теорема 3.1 (о последовательном выборе). *Пусть набор* $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ *формируется в результате последовательного выбора элементов* $x_1, x_2, \dots, x_k$ *, причем*

– *элемент* x_1 *можно выбрать* n_1 *способами,*

– *при любом* x_1 *элемент* x_2 *можно выбрать* n_2 *способами,*

– *при любых* x_1 *и* x_2 *элемент* x_3 *можно выбрать* n_3 *способами,*

⋮

– *при любых* x_1, x_2, …, x_{k-1} *элемент* x_k *можно выбрать* n_k *способами.*

Тогда весь набор можно выбрать $n_1 n_2 \dots n_k$ *способами.*

Фактически это дальнейшее обобщение правила произведения. Доказательство этого утверждения точно такое же, как доказательство правила произведения для k множеств: вначале рассматривается случай $k = 2$, затем проводится индукция по k.

3.6. Размещения

Размещением из n по k называется набор, состоящий из k различных элементов, выбранных из n-элементного множества. Таким образом, перестановка – это размещение из n по n. Размещения из n по k называют также *k-перестановками из n элементов*. Обозначим число размещений из n по k через $P(n,k)$. Это число легко подсчитать с помощью правила последовательного выбора. Первый элемент размещения можно выбрать n способами, второй $n-1$ способом, ..., k -тый $n-(k-1)$ способами. Следовательно, $P(n,k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$. Если правую часть

умножить и разделить на $(n-k)!$, то в числителе образуется $n!$ и получаем формулу

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

3.7. Сочетания

Сочетанием из n по k называют k-элементное подмножество n-элементного множества. Число сочетаний из n по k обозначают C_n^k или $\binom{n}{k}$ (читается «из n по k»). Будем пользоваться вторым обозначением.

Приведем таблицу сочетаний из четырех элементов a,b,c,d.

$k=$	0	1	2	3	4
	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c,d\}$
		$\{b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,d\}$	
		$\{c\}$	$\{a,d\}$	$\{a,c,d\}$	
		$\{d\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c,d\}$	
			$\{b,d\}$		
			$\{c,d\}$		

Подсчитаем число сочетаний из n по k в общем случае. Если взять какое-нибудь сочетание из n по k и расположить его элементы в каком-нибудь порядке, то получится размещение из n по k. Число способов упорядочить k элементов сочетания равно числу перестановок из k элементов, то есть $k!$. Значит, из одного сочетания, упорядочивая его элементы разными способами, можно получить $k!$ размещений. Понятно, что каждое размещение может быть получено таким образом из некоторого сочетания, причем только из одного. Значит, имеет место равенство

$$\binom{n}{k}k!=P(n,k).$$

Отсюда, учитывая, что $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$, получаем формулу для числа сочетаний:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (1)$$

Задача. Сколько имеется слов длины n в алфавите $\{a, b\}$, в которых буква a встречается ровно k раз?

Решение. Пронумеруем позиции букв в слове числами 1, 2, …, n. Любое слово в алфавите $\{a, b\}$ можно задать так: указать номера позиций, в которых располагается буква a. В остальных позициях должна находится буква b. Если буква a встречается ровно k раз, то для задания такого слова нужно выбрать k позиций из n. Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между словами длины n в алфавите $\{a, b\}$, в которых буква a встречается ровно k раз, и k-элементными подмножествами множества $\{1,2, \dots, n\}$. По правилу равенства число слов равно числу подмножеств, то есть $\binom{n}{k}$.

3.8. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты

Вспомним школьную формулу:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Откуда взялся коэффициент 2? Произведение $(a + b)(a + b)$ раскрываем с помощью дистрибутивного закона, не группируя сомножители и слагаемые:

$$(a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = aa + ab + ba + bb.$$

Слагаемые в правой части – это всевозможные слова длины 2 в алфавите $\{a, b\}$. Имеется 2 слова, содержащие каждую из букв a и b по одному разу, отсюда и коэффициент 2 перед произведением ab. Аналогично для третьей степени:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (aa + ab + ba + bb)(a + b) =$$

$$= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb.$$

Слагаемые в правой части – всевозможные слова длины 3. Слов, содержащих ровно две буквы a, имеется ровно $\binom{3}{2} = 3$, а слов, содержащих ровно одну букву a, $\binom{3}{1} = 3$. Поэтому после приведения подобных коэффициенты при a^2b и ab^2 будут равны 3 и получаем известную формулу

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

В общем случае, раскрывая бином $(a + b)^n$ без группирования сомножителей и слагаемых, получим сумму, слагаемыми в которой являются

всевозможные слова длины n в алфавите $\{a, b\}$. Это легко доказать индукцией по n:

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) = (\text{сумма всех слов длины } n-1)(a+b).$$

Когда раскроем скобки в последнем выражении, из каждого слова длины $n-1$ получатся два слова длины n добавлением в конце слова букв a и b. Таким образом, получатся все слова длины n.

Теперь, группируя сомножители, получим слагаемые вида $a^k b^{n-k}$, $k = 0,1, \dots, n$. Такое слагаемое с данным значением k входит в сумму столько раз, сколько имеется слов длины n, в которые буква a входит ровно k раз, то есть $\binom{n}{k}$ раз. Таким образом, группируя слагаемые, получим сумму

$$\binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Тем самым доказана знаменитая формула бинома Ньютона.

Теорема 3.2 (бином Ньютона).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Таким образом, числа $\binom{n}{k}$ выступают в качестве коэффициентов в разложении бинома $(a+b)^n$ по степеням a и b. За это их называют *биномиальными коэффициентами.*

Отметим некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

1. $\binom{n}{0} = 1$ при любом n.

Это получается, если в формуле (1) положить $k = 0$ и учесть, что $0! = 1$ по определению. Но и не пользуясь формулой (1) можно получить это равенство, если вспомнить смысл величины $\binom{n}{0}$ – это число подмножеств мощности 0 у множества из n элементов. Подмножество мощности 0 – это пустое множество, а оно единственно.

2. $\binom{n}{1} = n$.

Комбинаторный смысл этого равенства так же прозрачен, как и предыдущего – у множества из n элементов имеется ровно n одноэлементных подмножеств.

3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Это получается, если в формуле (1) подставить $n-k$ вместо k. Но и здесь имеется простое комбинаторное доказательство: у подмножества мощности k дополнительное подмножество имеет мощность $n-k$. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между подмножествами мощности k и подмножествами мощности $n-k$. Отсюда и следует данное равенство.

4. $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Получается сокращением на $(n-k)!$ в правой части формулы (1). Это выражение удобно применять для вычисления величины $\binom{n}{k}$ при малых k, например,

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

5. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Это равенство легко выводится из формулы (1):

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n}{k(n-k)} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Последнее тождество используется для построения таблицы биномиальных коэффициентов, известной как *треугольник Паскаля*. В этой таблице биномиальные коэффициенты располагаются следующим образом:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

. . . . . .

Крайние элементы в каждой строке равны 1. Каждый из остальных элементов вычисляется как сумма двух расположенных над ним слева и справа элементов предыдущей строки:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Таким образом, можно заполнять строчку за строчкой, используя только операцию сложения:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & . & & . & & . & & . & \end{array}$$

Многие тождества для биномиальных коэффициентов можно получить из бинома Ньютона. Приведем два из них.

6. Если в формуле бинома положить $a = b = 1$, получится равенство

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Оно тоже имеет простой комбинаторный смысл. В левой части перечисляются подмножества мощности $0,1,2,\ldots,n$. Сумма должна быть равна числу всех подмножеств n-элементного множества. Но именно это число и написано в правой части.

7. Если положить $a = -1, b = 1$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Если все слагаемые со знаком минус перенести в правую часть, то получится равенство

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots,$$

которое словами можно выразить так: у каждого конечного множества число подмножеств четной мощности равно числу подмножеств нечетной мощности.

3.9. Упорядоченные разбиения

Каким числом способов можно множество из n элементов разбить на k частей? Вопрос сформулирован не совсем корректно – нужно еще уточнить, считаем ли мы различными разбиения, отличающиеся только порядком частей. Например,

$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,6\} \cup \{2\} \cup \{3,4,5\}$$

и

$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{2\} \cup \{3,4,5\} \cup \{1,6\}$$

– это одно и то же разбиение или разные? Если такие разбиения считаются разными, то есть порядок частей важен, то говорят, что рассматриваются *упорядоченные разбиения*. Если же разбиения, отличающиеся только порядком частей, считаются одинаковыми, то имеются в виду *неупорядоченные разбиения*. Сейчас займемся подсчетом упорядоченных разбиений, неупорядоченные будут рассмотрены позже.

Итак, сколько существует упорядоченных разбиений множества из n элементов на k частей? Еще один пункт нужно уточнить: могут ли некоторые части разбиения быть пустыми множествами? Сейчас будем считать, что пустые части допускаются.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – элементы разбиваемого множества. Части разбиения нумеруем числами от 1 до k. Разбиение можно построить так. Берем элемент a_1 и назначаем ему часть, которой он будет принадлежать, скажем, часть с номером i_1. Затем так же поступаем с элементом a_2, назначая ему часть с номером i_2, и т.д. В результате получается набор $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, в котором для каждого элемента указано, какой части разбиения он принадлежит. Элементы набора принадлежат множеству $\{1,2,\dots,k\}$. Ясно, что имеется взаимно однозначное соответствие между такими наборами и разбиениями. Значит, число разбиений равно числу наборов.

Теорема 3.3. *Число упорядоченных разбиений множества из n элементов на k частей, среди которых могут быть пустые, равно k^n.*

Рассмотрим теперь упорядоченные разбиения с заданными размерами частей. Теперь кроме параметров n и k заданы еще числа $n_1, n_2, \dots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Требуется подсчитать число таких разбиений множества из n элементов на части $P_1, \dots, P_k$, у которых $|P_1| = n_1, \dots, |P_k| = n_k$.

Эта задача легко решается с помощью последовательного выбора. Часть P_1 должна быть подмножеством мощности n_1 множества мощности n, следовательно, ее можно выбрать $\binom{n}{n_1}$ способами. После того, как часть P_1 выбрана, в множестве осталось $n - n_1$ элементов и из них нужно выбрать n_2 элементов, чтобы образовать часть P_2. Это можно сделать $\binom{n-n_1}{n_2}$ способами. Часть P_3 можно выбрать $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ способами и т.д. По правилу последовательного выбора, перемножая эти числа, получим искомое число разбиений:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\ \cdots\ \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_{k-1}-n_k)!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Это число обозначают через $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ и называют *полиномиальным коэффициентом* (почему, выяснится немного позже).

Теорема 3.4. *Число упорядоченных разбиений множества мощности n на k частей мощностей* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *равно*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Задача. Сколько имеется слов длины n в алфавите $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, в которых буква a_1 встречается n_1 раз, буква a_2 – n_2 раза, …, буква a_k – n_k раз $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$?

Решение. Пронумеруем позиции букв в слове числами 1, 2, …, n. Чтобы построить слово с заданными параметрами, нужно выбрать n_1 позиций для буквы a_1, n_2 позиций для буквы a_2 и т.д. Пусть P_i – множество позиций, выбранных для буквы a_i, $i = 1,2,\ldots,k$. Тогда семейство множеств $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ является разбиением множества $\{1,2,\ldots,n\}$, причем части разбиения имеют мощности $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Следовательно, искомое число слов равно $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

3.10. Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема – это обобщение бинома Ньютона.

Теорема 3.5.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=\mathrm{n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \ldots {a_k}^{n_k}.$$

Доказательство этой формулы можно провести по тому же плану, что и приведенное выше доказательство бинома Ньютона. Раскрывая скобки, не группируя при этом сомножителей, получаем сумму, слагаемыми в которой выступают всевозможные слова длины n в алфавите $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Группируя затем сомножители, получаем слагаемые вида ${a_1}^{n_1}{a_2}^{n_2} \ldots {a_k}^{n_k}$, причем такое слагаемое появляется столько раз, сколько имеется слов с соответствующим составом букв, то есть $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ раз.

3.11. Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями – это мультимножества, составленные из элементов данного множества. Общее число вхождений элементов в мультимножество будем называть *размером* этого мультимножества. Например, $\{a, a, b, b, b, c\}$ – мультимножество размера 6. Сочетания с повторениями из n по k – это мультимножества размера k, составленные из элементов множества мощности n.

Из трех элементов a, b, c можно составить 10 мультимножеств размера 3:

$\{a, a, a\}$ $\{a, a, c\}$ $\{a, b, c\}$ $\{b, b, b\}$ $\{b, c, c\}$

$\{a, a, b\}$ $\{a, b, b\}$ $\{a, c, c\}$ $\{b, b, c\}$ $\{c, c, c\}$

Подсчитаем число сочетаний с повторениями из n по k в общем случае.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Мультимножеству размера k, состоящему из элементов множества A, поставим в соответствие слово в алфавите $\{0,1\}$ следующим образом. Это слово будет состоять из n групп нулей, разделенных единицами (число таких разделяющих единиц равно $n-1$): число нулей в первой группе равно числу вхождений элемента a_1 в данное мультимножество, во второй – числу вхождений a_2 и т.д.

Например, пусть $k = 9, n = 5$. Мультимножеству

$$\{a_1, a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_4, a_4, a_4\}$$

ставится в соответствие слово

0000100110001.

В общем случае получится слово из k нулей и $n-1$ единиц. Ясно, что каждое слово с такими параметрами соответствует некоторому мультимножеству. Таким образом, имеется биекция между множеством всех

сочетаний с повторениями из n по k и множеством всех слов длины $n+k-1$, состоящих из k нулей и $n-1$ единиц. Значит, число сочетаний с повторениями равно числу таких слов, то есть $\binom{n+k-1}{k}$.

Теорема 3.6. *Число сочетаний с повторениями из n по k равно* $\binom{n+k-1}{k}$.

3.12. Формула включений-исключений

Правило суммы гласит, что

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

для любых непересекающихся конечных множеств A и B. Если множества пересекаются, равенство будет неверным, так как элементы, принадлежащие обоим множествам, оказываются сосчитанными дважды в правой части. Но это легко исправить – нужно вычесть из суммы мощностей число элементов, сосчитанных дважды, то есть мощность пересечения множеств. Получается равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

верное для любых конечных множеств.

Аналогичное равенство справедливо для объединения трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Сначала складываются мощности трех множеств, затем вычитаются мощности всевозможных пересечений двух множеств и прибавляется мощность пересечения всех трех множеств. Чтобы убедиться в справедливости этого равенства для любых трех конечных множеств, достаточно проверить, что каждый элемент множества $A \cup B \cup C$ сосчитан в правой части ровно один раз. При этом нужно учесть, что элемент может принадлежать одному, двум или всем трем множествам A, B, C и рассмотреть все эти возможности. Если элемент принадлежит только одному из трех множеств, скажем, A, то он учтен только в слагаемом $|A|$, следовательно, сосчитан один раз. Если элемент принадлежит в точности двум множествам, скажем, A и B, то он учтен в слагаемых $|A|$ и $|B|$ со знаком плюс и в слагаемом $|A \cap B|$ со знаком минус, значит, общий вклад этого элемента равен $1+1-1=1$. Элемент, принадлежащий всем трем множествам, присутствует во всех слагаемых и его вклад равен $1+1+1-1-1-1+1=1$. Таким образом, вклад каждого элемента из множества $A \cup B \cup C$ в правую часть равенства равен 1, следовательно, вся сумма равна числу элементов в этом множестве.

Можно написать подобное равенство для четырех множеств:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| -$$
$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| +$$
$$+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| -$$
$$-|A \cap B \cap C \cap D|$$

и доказать его аналогичными рассуждениями. Заметим, что слагаемые в правой части соответствуют всевозможным пересечениям множеств из семейства $\{A, B, C, D\}$, причем пересечения нечетного числа множеств входят со знаком плюс, а пересечения четного числа множеств – со знаком минус.

Рассмотрим общий случай. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – конечные множества. Пересечение любых t из этих множеств назовем *t-пересечением*. Обозначим через S_t сумму мощностей всех *t*-пересечений этих n множеств:

$$S_t = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_t}|.$$

Запись $\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$, расположенная ниже знака суммы Σ, указывает, что суммирование производится по всем t-элементным подмножествам множества $\{1,2, \dots, n\}$. Для каждого такого подмножества $\{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ вычисляется мощность t-пересечения $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_t}|$ и все эти мощности складываются. В частности,

$S_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$,

$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$ и т.д.

Теорема 3.7 (формула включений-исключений).

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n.$$

Доказательство. Возьмем любой элемент $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ и обозначим через $s(x)$ вклад, вносимый этим элементом в сумму в правой части утверждения теоремы. Всякий раз, когда элемент x входит в пересечение некоторых из множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$, к этой сумме (и к $s(x)$) прибавляется единица, если это пересечение нечетного числа множеств, если же четного, то единица вычитается. Покажем, что $s(x) = 1$ для каждого $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Допустим, что элемент x принадлежит в точности m из множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тогда имеется

ровно m 1-пересечений (т.е. множеств A_i), содержащих x;

ровно $\binom{m}{2}$ 2-пересечений, содержащих x;

ровно $\binom{m}{3}$ 3-пересечений, содержащих x;

…

Вообще, для любого $t = 1,2,\dots,m$ имеется ровно $\binom{m}{t}$ t-пересечений, содержащих x (вспомним, что $\binom{m}{1} = m$), а для $t > m$ таких t-пересечений нет. Следовательно,

$$s(x) = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}.$$

Одно из следствий бинома Ньютона гласит, что

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \cdots + (-1)^{m}\binom{m}{m} = 0.$$

Отсюда

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1,$$

следовательно, $s(x) = 1$. ■

Пример – задача о беспорядках. Пусть $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – перестановка элементов $\{1,2,\dots,n\}$. Если $p_i = i$ для некоторого i, то элемент i называется *неподвижной точкой* перестановки p. Перестановка, у которой нет неподвижных точек, называется *беспорядком*. Иначе говоря, в беспорядке ни один элемент не стоит на своем месте. Число беспорядков из n элементов обозначим через d_n. Легко проверить, например, что имеется ровно два беспорядка из трех элементов: (2,3,1) и (3,1,2), так что $d_3 = 2$. Применим метод включения-исключения для подсчета числа беспорядков при произвольном n.

Обозначим через A_i множество всех таких перестановок n элементов, у которых i является неподвижной точкой. Тогда $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ – множество всех перестановок, имеющих неподвижные точки. Так как всего имеется $n!$ перестановок из n элементов, то

$$d_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Для подсчета мощности объединения множеств используем формулу включений-исключений:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots - (-1)^{n-1}S_n,$$

где S_t – сумма мощностей всевозможных t-пересечений множеств $A_1, A_2, \dots, A_t$. Каждое такое t-пересечение $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_t}$ состоит из всех перестановок, у которых элементы $i_1, i_2, \dots, i_t$ неподвижны. Число таких перестановок равно числу перестановок остальных $n - t$ элементов, то есть $(n-t)!$. Значит, в сумме S_t каждое слагаемое равно $(n-t)!$. Число

слагаемых в этой сумме равно числу t-элементных подмножеств множества из n элементов, то есть $\binom{n}{t}$. Следовательно,

$$S_t = (n-t)!\binom{n}{t} = \frac{n!}{t!},$$

и получаем формулу для числа беспорядков:

$$d_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}).$$

Глава 4. Линейные рекуррентные уравнения

4.1. Рекуррентные уравнения

Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ – бесконечная последовательность чисел, в которой несколько начальных элементов (*начальные значения*) $x_0, x_1, \ldots, x_k$ заданы, а каждый из последующих вычисляется по предыдущим в соответствии с некоторым правилом. Если это правило задано в виде уравнения, то оно называется *рекуррентным уравнением*. Решением такого уравнения является формула, выражающая x_n как функцию от n и от начальных значений.

Примеры.

1. Рассмотрим уравнение $x_n = x_{n-1} + 2$ с начальным значением $x_0 = 0$. Очевидно, что решением является $x_n = 2n$. Если изменить начальное значение, скажем, положить $x_0 = 1$, то и решение будет другое: $x_n = 2n + 1$.

2. Уравнение $x_n = 2x_{n-1}$, начальное значение $x_0 = 1$. Как и в предыдущем примере, решение очевидно: $x_n = 2^n$.

3. Уравнение $x_n = nx_{n-1}$, начальное значение $x_0 = 1$. Можно догадаться, что решением является $x_n = n!$. Это легко проверить. При $n = 0$ имеем $0! = 1 = x_0$. При $n > 0$ подставляем в уравнение $n!$ вместо x_n и $(n-1)!$ вместо x_{n-1} и убеждаемся, что равенство справедливо: $n! = n \cdot (n-1)!$

4. Уравнение $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$, начальные значения $x_0 = 0, x_1 = 1$. Здесь нужны два начальных значения, поскольку в уравнении элемент последовательности x_n определяется по двум предыдущим элементам. Зная x_0 и x_1, можем последовательно вычислять следующие элементы: $x_2 = 2 \cdot 1 - 0 = 2$, $x_3 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $x_4 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$, … . Наблюдая несколько первых значений, можно предположить, что решением является $x_n = n$. Это предположение справедливо при $n = 0$ и $n = 1$, его справедливость при

$n > 1$ подтверждается подстановкой в уравнение: $n = 2(n-1) - (n-2)$. Далее мы увидим, как можно решать подобные уравнения, не опираясь на догадки.

Рекуррентное уравнение вида

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} + b\,,$$

где $a_1, \ldots, a_k, b$ – константы, называется *линейным рекуррентным уравнением порядка k с постоянными коэффициентами*. Если $b = 0$, оно называется *однородным*. Рассмотрим линейные рекуррентные уравнения порядка 1 и 2.

4.2. Линейные рекуррентные уравнения первого порядка

Линейное рекуррентное уравнение первого порядка имеет вид

$$x_n = a x_{n-1} + b.$$

Если задано начальное значение x_0, то можно вычислить любой элемент последовательности x_n: $x_1 = a x_0 + b$, $x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + ab + b$ и т.д. Найдем общую формулу для x_n. Рассмотрим сначала два частных случая.

1. $a = 1$. Уравнение имеет вид

$$x_n = x_{n-1} + b.$$

Решение очевидно:

$$x_n = x_0 + nb.$$

Это не что иное, как арифметическая прогрессия.

2. $b = 0$. Уравнение имеет вид

$$x_n = a x_{n-1}.$$

Решение тоже очевидно:

$$x_n = a^n x_0.$$

Это геометрическая прогрессия.

Теперь рассмотрим общий случай. Сделаем замену

$$x_n = y_n + s,$$

где y_n – новая неизвестная, s – константа, значение которой определим позже. Подставляя это в исходное уравнение, получаем $y_n + s = a y_{n-1} + as + b$, то есть

$$y_n = ay_{n-1} + (a-1)s + b.$$

Теперь выберем s так, чтобы $(a-1)s + b = 0$, то есть $s = \frac{b}{1-a}$. Это можно сделать, если $a \neq 1$. Но случай $a = 1$ был рассмотрен раньше и теперь мы можем считать, что $a \neq 1$. Уравнение приобретает вид

$$y_n = ay_{n-1}.$$

Этот тип уравнений был уже рассмотрен, решением является

$$y_n = a^n y_0.$$

Так как $y_n = x_n - s$, получаем $x_n - s = a^n(x_0 - s)$ и остается подставить выражение для s:

$$x_n = a^n\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

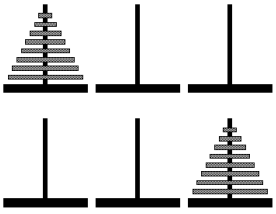
Это и есть решение уравнения при $a \neq 1$.

Замечание 1. Цель замены $x_n = y_n + s$ состоит в сведении неоднородного уравнения к однородному, которое затем легко решается.

Замечание 2. Решение уравнения имеет вид $x_n = \mathrm{c}_1 a^n + \mathrm{c}_2$, где a, c_1, c_2 – константы. Зависимость от n здесь выражена степенной функцией a^n. Это наблюдение оказывается полезным при переходе к уравнениям более высокого порядка, как будет видно далее.

Рассмотрим пример.

Ханойская башня. Три стержня установлены вертикально. На один из них нанизаны n дисков разного диаметра, диаметр убывает снизу вверх. Нужно переместить все диски на другой стержень. Разрешается перекладывать по одному диску, при этом нельзя класть больший диск на меньший. На рисунке показано начальное и финальное расположение дисков. Какое наименьшее число шагов требуется для перемещения всех дисков? (Шаг – перекладывание одного диска). Эту задачу придумал французский математик Люка в XIX в., ее называют задачей о Ханойской башне.



Решение. Обозначим через t_n наименьшее число шагов, требующееся для перемещения всех дисков с одного стержня на другой. Очевидно, $t_0 = 0$ (нет дисков – нет и перекладываний), $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

В общем случае $n-1$ меньших дисков должны быть перемещены на другой стержень прежде, чем мы сможем переложить самый большой диск. Это требует t_{n-1} шагов. Затем перекладывается большой диск. После этого нужно снова переместить $n-1$ меньших дисков так, чтобы уложить их

поверх большого. Для этого опять требуется t_{n-1} шагов. Итак, для перемещения n дисков необходимо не менее $2t_{n-1}+1$ шагов. Но этого количества и достаточно, так как выше фактически описан план решения задачи: перекладываем $n-1$ меньших дисков, затем большой, затем снова $n-1$ меньших. Получаем рекуррентное уравнение

$$t_n = 2t_{n-1} + 1$$

с начальным значением $t_0 = 0$. Для перехода к однородному уравнению делаем замену $t_n = y_n + s$. Получаем $y_n + s = 2y_{n-1} + 2s + 1$. Полагаем $s = -1$. Уравнение приобретает вид $y_n = 2y_{n-1}$, его решение $y_n = 2^n y_0$. Переходим к старым переменным: $y_n = t_n + 1$ и получаем ответ

$$t_n = 2^n - 1.$$

4.3. Линейные рекуррентные уравнения второго порядка

Как и уравнение первого порядка, неоднородное уравнение второго порядка можно с помощью подходящей замены свести к однородному. Поэтому мы будем рассматривать только однородное уравнение второго порядка, общий вид которого

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}. \qquad (2)$$

Необходимо задать еще два начальных значения x_0 и x_1. Тогда, пользуясь равенством (2), можно последовательно вычислять элементы $x_2, x_3, \ldots$:

$x_2 = a_1 x_1 + a_2 x_0$

и т.д. Нашей целью опять является нахождение общей формулы для x_n.

Сначала займемся уравнением (2) безотносительно к начальным значениям. То есть считаем, что начальные значения не заданы, а под решением понимаем любую последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую уравнению (2). Отметим два важных свойства решений.

(А). Если последовательность $\{x_n\}$ является решением уравнения (2) и d – любая константа, то последовательность $\{dx_n\}$ – тоже решение этого уравнения.

Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить элементы последовательности $\{dx_n\}$ в уравнение: на d можно сократить и получится равенство для последовательности $\{x_n\}$.

(B). Если последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ являются решениями уравнения (2), то последовательность $\{x'_n + x''_n\}$ – тоже решение этого уравнения.

Для доказательства достаточно написать равенство (2) для каждой из последовательностей $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, а затем сложить эти два равенства, получится равенство (2) для последовательности $\{x'_n + x''_n\}$.

Теперь будем искать решение уравнения (2) в виде $x_n = \alpha^n$. Эта идея навеяна видом решения уравнения первого порядка (см. выше замечание 2). Подставляя это выражение в уравнение (2) и сокращая на α^{n-2}, получаем квадратное уравнение с неизвестной α:

$$\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 = 0,$$

оно называется *характеристическим уравнением*. Дальнейшие действия зависят от того, сколько корней имеет это уравнение – два или один. Рассмотрим оба случая.

1. Характеристическое уравнение имеет два различных корня α_1 и α_2. Тогда каждая из последовательностей $\{\alpha_1^n\}$ и $\{\alpha_2^n\}$ является решением уравнения (2). В силу свойств (A) и (B) при любых c_1 и c_2 последовательность

$$c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n \tag{3}$$

тоже будет решением. Это общий вид решения уравнения (2).

Допустим теперь, что заданы начальные значения x_0 и x_1. Нельзя ли подобрать константы c_1 и c_2 так, чтобы последовательность (3) имела именно такие начальные значения? То есть при $n = 0$ и $n = 1$ элементы этой последовательности должны совпадать с x_0 и x_1:

$$c_1 + c_2 = x_0,$$

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = x_1.$$

Мы получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными c_1 и c_2. Определитель этой системы

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$, так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Следовательно, существует единственное решение c_1, c_2 и мы получаем решение уравнения (2) с начальными значениями x_0, x_1.

2. Характеристическое уравнение имеет один корень α (т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$). Тогда дискриминант этого уравнения равен 0, отсюда следует, что $a_2 = -a_1^2/4$ и $\alpha = a_1/2$. Используя эти соотношения, нетрудно прямой подстановкой показать, что в этом случае последовательность $\{n\alpha^n\}$ также

будет решением уравнения (2). Комбинируя его с решением $\{\alpha^n\}$ на основе свойств (A) и (B), получаем общее решение

$$c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^n.$$

Для вычисления констант c_1 и c_2 опять используются начальные значения:

$c_1 = x_0$,

$c_1\alpha + c_2\alpha = x_1$.

Рассмотрим пример.

Числа Фибоначчи. Найдем решение уравнения $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ с начальными значениями $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Элементы этой последовательности называются *числами Фибоначчи*.

Решение. Характеристическое уравнение

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

имеет два корня $\alpha_1 = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$, $\alpha_2 = \left(1 - \sqrt{5}\right)/2$. Составляем уравнения для констант c_1 и c_2:

$c_1 + c_2 = 0$,

$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = 1$.

Отсюда находим $c_1 = 1/\sqrt{5}$, $c_2 = -1/\sqrt{5}$ и получаем формулу для чисел Фибоначчи (она известна как формула Бине):

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Глава 5. Графы

5.1. Основные понятия теории графов

С понятием графа мы уже встречались, когда рассматривали бинарные отношения. Напомним, что граф отношения – это диаграмма, наглядно изображающая отношение на конечном множестве с помощью стрелок, соединяющих элементы множества. При этом собственно графические подробности несущественны – неважно, какими значками изображены элементы множества, неважно, как выглядят стрелки, важно лишь, какие элементы и в каких направлениях эти стрелки соединяют. Поэтому в математическом определении понятия графа нет ничего графического или геометрического, а говорится лишь о неких элементах и их парах.

Граф состоит из двух множеств – конечного множества V, элементы которого называются *вершинами*, и множества E, состоящего из пар вершин, эти пары называются *ребрами*. Это записывают так: $G = (V, E)$, прочитать эту запись можно так: «граф G с множеством вершин V и множеством ребер E».

Мы уже сталкивались с тем, что пары бывают упорядоченные и неупорядоченные. Разница в том считаем ли мы пары (a, b) и (b, a) различными или одинаковыми. В приведенном определении об этом ничего не говорится и это требует уточнения. Различают два основных вида графов.

Ориентированный граф – ребрами являются упорядоченные пары вершин (*ориентированные ребра*).

Неориентированный граф – ребрами являются неупорядоченные пары вершин (*неориентированные ребра*).

В комбинаторике мы использовали круглые и фигурные скобки, чтобы различать упорядоченные совокупности (наборы) и неупорядоченные (множества). В теории графов сложилась традиция в обоих случаях употреблять круглые скобки. Поэтому по записи пары (a, b) не ясно, ориентированное это ребро или неориентированное. Обычно, начиная разговор о графах, заранее предупреждают, о каких графах пойдет речь.

Ребро типа (a, a) называют *петлей*.

Неориентированный граф, не имеющий петель, называется *обыкновенным графом*. Это один из наиболее распространенных видов графов. В дальнейшем, если не оговаривается иное, под графом будем понимать именно обыкновенный граф.

Для обозначения числа вершин и числа ребер графа будем обычно использовать буквы n и m.

Говорят, что ребро (a, b) *соединяет* вершины a и b, а вершины a и b являются *концами* этого ребра. Если в графе есть ребро (a, b), то говорят, что вершины a и b в нем *смежны*. Заметим, что в графе может быть не более одного ребра, соединяющего данную пару вершин.

Мультиграф – обобщение понятия графа. В мультиграфе могут быть *кратные ребра*, то есть несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин. В мультиграфе ребра – это не пары вершин, а самостоятельные объекты. При этом для каждого ребра должна быть указана пара вершин, которые это ребро соединяет.

Нетрудно подсчитать число графов с фиксированным множеством вершин. Обозначим через g_n число (обыкновенных) графов с множеством вершин $\{1,2, \dots, n\}$.

Теорема 5.1.

$$g_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Доказательство. Графы с одним и тем же множеством вершин различаются только множествами ребер. Каждое ребро – это неупорядоченная пара вершин. Множество всех таких пар состоит из $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ элементов. Значит, у него имеется $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ подмножеств, каждое из которых задает некоторый граф. ■

Пусть $e = (a, b)$ – ребро некоторого графа. Говорят, что ребро e *инцидентно* каждой из вершин a и b, а каждая из этих вершин инцидентна ребру e.

Число ребер, инцидентных вершине x в графе, называется *степенью* вершины x и обозначается через $\deg(x)$.

Если сложить степени всех вершин графа, то каждое ребро внесет в эту сумму вклад, равный 2. Следовательно, сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер графа. Это утверждение называют теоремой о рукопожатиях.

Теорема 5.2 (о рукопожатиях). *Для любого графа выполняется равенство*

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2m.$$

Из этой теоремы следует, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

Существует много способов представить граф, назовем только самые распространенные.

1. Перечисление элементов. Исходя из определения, для того, чтобы задать граф, достаточно перечислить его вершины и ребра (т.е. пары вершин). Пусть, например, $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, $E = \{(a, f), (a, d), (b, c), (c, d), (c, f)\}$. Тем самым задан граф с 6 вершинами и 5 ребрами.

2. Изображение. Если граф не очень велик, его можно нарисовать. Вершины изображают какими-нибудь значками (кружками, прямоугольниками и т.п.), ребра – в неориентированном графе ребра линиями, в ориентированном стрелками. На рисунке 5.1 показан граф, заданный выше перечислением вершин и ребер.

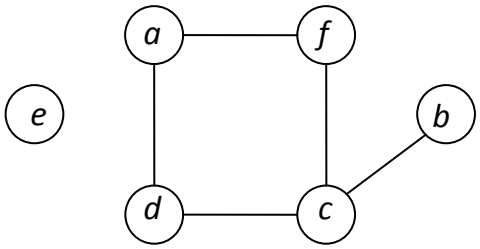


Рис. 5.1. Изображение графа

3. Матрица смежности. Это квадратная матрица порядка n. Для ее построения вершины графа нумеруются числами от 1 до n. Элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, равен 1, если вершины с номерами i и j смежны, он равен 0, если эти вершины не смежны. Вот матрица смежности описанного выше графа (вершины пронумерованы в алфавитном порядке):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отметим две особенности матрицы смежности обыкновенного графа:

1) на главной диагонали стоят нули (нет петель);

2) матрица симметрична относительно главной диагонали (граф неориентированный).

4. Списки смежности. Этот способ часто используется для компьютерного представления графов. Состоит он в том, что для каждой вершины задается список всех смежных с ней вершин. Для рассматриваемого графа это может выглядеть так (пишется номер вершины и после двоеточия перечисляются номера смежных с ней вершин):

1: 4, 5
2: 3
3: 2, 4, 6
4: 1,3
5:
6: 1, 3

В структурах данных, применяемых в программировании, списки смежности могут быть реализованы как массив линейных списков.

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. Всякий подграф может быть получен из графа удалением некоторых вершин и ребер (при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей ребра).

Дополнением (*дополнительным графом*) к графу $G = (V, E)$ называется граф $\bar{G}$, у которого множество вершин то же, что у графа G, а множество ребер является дополнением множества E до множества всех неупорядоченных пар различных вершин. Иначе говоря, две различные вершины смежны в графе $\bar{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в графе G. На рисунке 5.2 показаны граф, его подграф и дополнительный к нему граф.

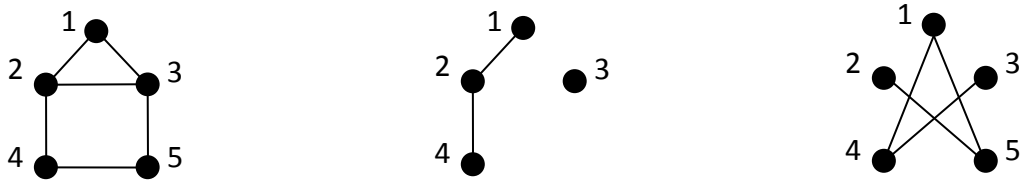


Рис. 5.2. Граф (слева), его подграф (в центре) и дополнительный граф (справа)

Некоторые часто встречающиеся графы имеют собственные названия и обозначения. Назовем наиболее важные из них

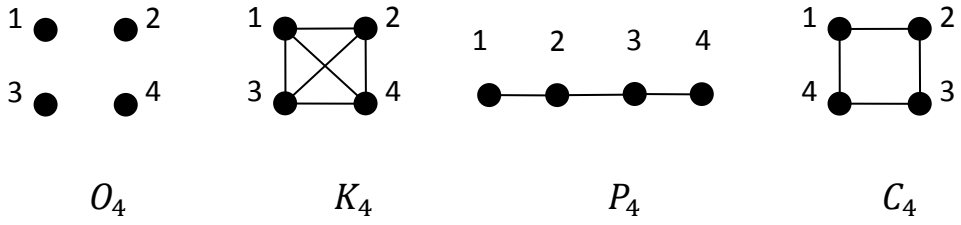
Пустой граф – граф, не содержащий ни одного ребра. Пустой граф с множеством вершин $\{1,2, \dots, n\}$ обозначается O_n.

Полный граф – граф, в котором каждые две вершины смежны. Полный граф с множеством вершин $\{1,2, \dots, n\}$ обозначается K_n.

Путь P_n имеет множество вершин $\{1,2,\dots,n\}$, ребрами его являются пары $(i, i+1)$, $i = 1,2,\dots n-1$.

Цикл C_n получается из графа P_n добавлением ребра $(1, n)$.

Все эти графы при $n = 4$ показаны на рисунке 5.3.



O_4 K_4 P_4 C_4

Рис. 5.3. Пустой граф, полный граф, путь и цикл

Следующие утверждения очевидны.

- $K_n = \overline{O_n}$.
- У всякого графа имеется пустой подграф.
- Всякий граф является подграфом полного графа.
- Граф P_n является подграфом графа C_n.
- Для всякого графа выполняется равенство $\bar{\bar{G}} = G$.
- Если граф G_1 является подграфом графа G_2, а граф G_2 – подграфом графа G_3, то G_1 – подграф графа G_3 (то есть отношение «быть подграфом» транзитивно).

5.2. Изоморфизм

На рисунке 5.4 изображены два графа с одним и тем же множеством вершин $\{a, b, c, d\}$. При внимательном рассмотрении можно обнаружить, что это разные графы – в графе, нарисованном слева, имеется ребро (a, d), в правом графе такого ребра нет. В то же время, если не обращать внимания на наименования вершин, то эти графы явно одинаково устроены: каждый из них – цикл из четырех вершин. Во многих случаях при исследовании

G_1 G_2

Рис. 5.4. Изоморфные графы

строения графов имена или номера вершин не играют роли, и такие графы, один из которых получается из другого переименованием вершин, удобнее

было бы считать одинаковыми. Для того чтобы это можно было делать «на законном основании», вводится понятие изоморфизма графов. Если говорить не совсем формально, то два графа считаются изоморфными, если один из них можно превратить в другой переименованием вершин. Придание точного смысла понятию «переименование» приводит к следующему определению изоморфизма.

Определение. Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция f множества V_1 на множество V_2, что $(a, b) \in E_1$ тогда и только тогда, когда $(f(a), f(b)) \in E_2$. Отображение f в этом случае называется *изоморфизмом* графа G_1 на граф G_2.

Тот факт, что графы G_1 и G_2 изоморфны, записывается так: $G_1 \cong G_2$.

Для графов, изображенных на рисунке 4, изоморфизмом является, например, отображение, задаваемое таблицей:

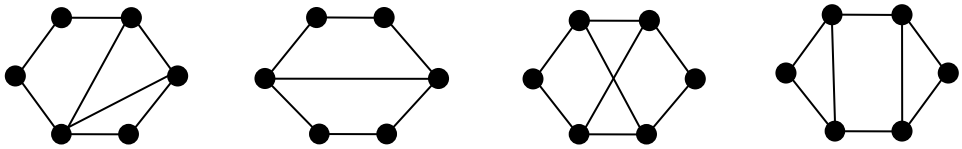
x (вершина графа G_1)	a	b	c	d
$f(x)$ (вершина графа G_2)	a	b	d	c

Заметим, что в этом примере есть и другие изоморфизмы первого графа на второй.

Сформулированное определение изоморфизма годится и для ориентированных графов, нужно только обе упоминаемые в нем пары вершин считать упорядоченными.

Изоморфизм – бинарное отношение на множестве графов. Очевидно, это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются *абстрактными графами*. Когда говорят, что рассматриваются абстрактные графы, это означает, что изоморфные графы считаются одинаковыми. Абстрактный граф можно представлять себе как граф, у которого стерты имена (пометки) вершин, поэтому абстрактные графы иногда называют также *непомеченными* графами.

Узнать, изоморфны ли два графа, бывает непросто. Если буквально следовать определению, то нужно перебрать все биекции множества вершин одного из них на множество вершин другого и для каждой из этих биекций проверить, является ли она изоморфизмом. Для n вершин имеется $n!$ биекций и эта работа становится практически невыполнимой уже для не очень больших n (например, $20! > 2 \cdot 10^{18}$). Однако во многих случаях бывает довольно легко установить, что два данных графа неизоморфны. Рассмотрим, например, графы, изображенные на рисунке 5.5.



G_1 G_2 G_3 G_4

Рис. 5.5. Неизоморфные графы

Так как при изоморфизме пара смежных вершин переходит в пару смежных, а пара несмежных – в пару несмежных, то ясно, что число ребер у двух изоморфных графов должно быть одинаковым. Поэтому сразу можно сказать, что графы G_1 и G_2 , у которых разное количество ребер, неизоморфны.

Характеристики графов (не обязательно количественные), которые сохраняются при изоморфизме, называются *инвариантами*. Иначе говоря, инвариант – это свойство графа, которое не зависит от того, как называются его вершины. Простейшие инварианты – число вершин и число ребер.

У графов G_1 и G_3 на рисунке 5.5 одинаковое число ребер, но они тоже неизоморфны. Это можно установить, сравнивая степени вершин. Очевидно, при изоморфизме каждая вершина переходит в вершину той же степени. Но у графа G_1 есть вершина степени 4, а у графа G_3 такой вершины нет. Можно ли сказать, что степень вершины является инвариантом? Нет, инвариант – это характеристика всего графа, а не одной вершины. А вот наличие у графа вершины данной степени – это инвариант. Число вершин данной степени – инвариант. Полную информацию о степенях дает *набор степеней* – последовательность степеней всех вершин графа, выписанных в неубывающем порядке. У графа G_1 набор степеней (2,2,2,3,3,4), а у графа G_3– (2,2,3,3,3,3).

С графами G_3 и G_4 дело обстоит немного сложнее – у них и наборы степеней одинаковы. Все же и эти графы неизоморфны: можно заметить, что в графе G_4 есть полный подграф из трех вершин, а в графе G_3 таких подграфов нет. Ясно, что при изоморфизме каждый подграф одного графа переходит в изоморфный ему подграф другого. Значит, наличие подграфа определенного вида является инвариантом.

Если удается установить, что для двух исследуемых графов некоторый инвариант принимает разные значения, то эти графы неизоморфны. Нельзя ли придумать такой инвариант или систему инвариантов, что совпадение всех этих инвариантов у двух исследуемых графов гарантировало бы, что эти графы изоморфны? Можно, и такие полные системы инвариантов известны. К сожалению, пока от них мало пользы, так как все известные полные системы инвариантов требуют большого объема вычислений. Поиск быстро вычисляемых полных систем инвариантов ведется давно и пока без особых успехов.

Для того чтобы доказать, что два графа изоморфны, необходимо предъявить соответствующую биекцию. Например, графы, показанные на рисунке 5.6, изоморфны. Это доказывает таблица, представляющая изоморфизм между ними.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	6	1	5	3	2

Рис. 5.6. Изоморфные графы и изоморфизм между ними

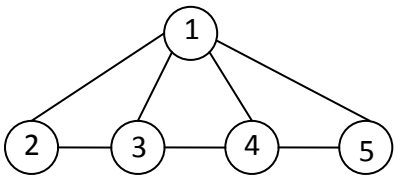
5.3. Пути и циклы

Путь и цикл в предыдущем разделе были определены как графы специального вида. Но в теории графов эти слова употребляются еще и в другом смысле.

Путь в графе – это последовательность вершин $x_1, x_2, \dots, x_k$, такая, что при каждом $i = 1,2, \dots, k-1$ пара (x_i, x_{i+1}) является ребром графа, причем все эти ребра различны. Эти $k-1$ ребер называются ребрами пути, а число $k-1$ – длиной пути. Путь *проходит* через вершины $x_1, x_2, \dots, x_k$ и *соединяет* вершины x_1 и x_k. Путь называется *простым*, если через каждую вершину он проходит не больше одного раза, то есть вершины $x_1, x_2, \dots, x_k$ все различны.

Цикл – это путь $x_1, x_2, \dots, x_k$, в котором $x_k = x_1$. Цикл *простой*, если вершины $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ все различны.

На рисунке 5.7 показаны последовательности вершин разных типов.



2, 3, 4, 5, 1, 4, 3 – не путь (дважды проходит по ребру (3,4));
3, 1, 4, 5, 1, 2 – путь (не простой);
2, 3, 1, 4, 5 – простой путь;
2, 3, 1, 4, 5, 1, 2 – цикл (не простой);
2, 3, 4, 5, 1, 2 – простой цикл.

Рис. 5.7. Пути и циклы в графе

Теорема 5.3 (о существовании цикла). *Если в графе n вершин, m ребер и $m \geq n$, то в этом графе есть цикл.*

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно, тогда существует граф с $m \geq n$, не имеющий циклов. Среди всех таких графов выберем граф G с наименьшим числом вершин.

В графе G не может быть вершин степени 0 и 1. Действительно, если есть такая вершина, то, удалив ее, получим граф, в котором число ребер по-прежнему не меньше числа вершин (число вершин уменьшилось на 1, а число ребер либо не изменилось, либо тоже уменьшилось на 1) и нет циклов. Но это противоречит выбору графа G, как графа с наименьшим числом вершин, имеющего такие свойства.

Итак, в графе G степень каждой вершины больше или равна 2. Выберем в этом графе простой путь наибольшей длины. Пусть это путь $P = x_1, x_2, \dots, x_k$. Степень вершины x_k не меньше 2, значит, кроме вершины x_{k-1}, в графе есть еще по крайней мере одна вершина, смежная с x_k. Пусть y – такая вершина. Если предположить, что y не принадлежит множеству $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, то получается простой путь $x_1, x_2, \dots, x_k, y$, длина которого больше длины пути P. Значит, $y \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, то есть $y = x_i$ при некотором i, причем $i < k - 1$. Но тогда $y, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k, y$ – цикл. ■

Граф называется *связным*, если для любых двух вершин в нем имеется путь, соединяющий эти вершины.

Если граф не связен, то он распадается на связные части, называемые *компонентами связности*. Компонента связности – это максимальный по включению связный подграф, то есть связный подграф, не являющийся частью другого связного подграфа. Граф на рисунке 5.8 имеет четыре компоненты связности.

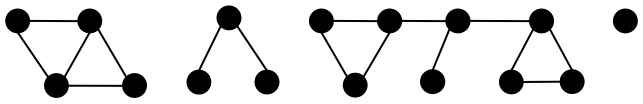


Рис. 5.8. Несвязный граф

Теорема 5.4 (о числе ребер в связном графе). *Если граф с n вершинами и m ребрами связен, то $m \geq n - 1$.*

Доказательство. Каждый граф с n вершинами можно построить, взяв пустой граф с n вершинами и добавляя к нему ребра. У пустого графа n компонент связности, при добавлении ребер их число будет уменьшаться. Допустим, мы уже построили некоторый граф G и добавляем к нему еще одно ребро. Как может измениться при этом число компонент связности? Если две вершины этого нового ребра принадлежат одной компоненте связности графа G, то число компонент не изменится. Если же они принадлежат разным компонентам, то после добавления такого ребра эти две

компоненты объединятся в одну и общее число компонент уменьшится на единицу. Итак, при добавлении нового ребра число компонент связности либо не изменяется, либо уменьшается на единицу. Значит, для превращения пустого графа в связный граф, то есть в граф с одной компонентой, число добавленных ребер должно быть не меньше $n - 1$. ■

Вершина графа называется *точкой сочленения* или *шарниром*, если в результате ее удаления число компонент связности увеличивается.

Ребро, при удалении которого увеличивается число компонент связности, называется *перешейком*.

У графа, изображенного на рисунке 8, имеется четыре шарнира и пять перешейков.

Теорема 5.5 (о перешейках). *Ребро является перешейком в том и только том случае, если в графе нет цикла, содержащего это ребро.*

Доказательство. Если ребро (a, b) принадлежит какому-нибудь циклу, то после удаления этого ребра вершины a и b оставшаяся часть этого цикла образует путь, соединяющий эти вершины. Поэтому число компонент связности не увеличится и это ребро – не перешеек.

Обратно, если ребро (a, b) не перешеек, то после его удаления вершины a и b останутся в одной компоненте связности. Значит, в графе с удаленным ребром имеется путь, соединяющий эти вершины. При добавлении к этому пути ребра (a, b) образуется цикл, содержащий это ребро. ■

5.4. Расстояния. Метрические характеристики

Расстояние между двумя вершинами в графе определяется как наименьшая длина пути, соединяющего эти вершины. Расстояние между вершинами a и b обозначается через $d(a, b)$. Если граф связный, то эта величина определена для любой пары вершин. Далее в этом разделе предполагаем, что рассматриваемый граф связен.

Отметим некоторые свойства расстояния в графе.

$d(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

$d(a, b) = d(b, a)$.

$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Первые два свойства очевидны. Третье, оно называется *неравенством треугольника*, легко доказать: в объединении кратчайшего пути между a и b

и кратчайшего пути между b и c содержится некоторый путь между a и c, но он не может быть короче кратчайшего пути между a и c.

В математике функцию двух переменных, обладающую свойствами 1) – 3), называют *метрикой или расстоянием*, а множество, на котором она определена – *метрическим пространством*. Наиболее известный пример – евклидово расстояние и евклидово пространство. Таким образом, всякий связный граф можно рассматривать как метрическое пространство.

Характеристики графа, связанные с расстоянием, называют *метрическими характеристиками*. Одна из них – *диаметр* графа, он определяется как наибольшее расстояние между вершинами. Диаметр графа G обозначается $\mathrm{diam}(G)$:

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y).$$

Наименьший возможный диаметр равен 1, такой диаметр имеет только полный граф. Наибольший возможный диаметр у связного графа с n вершинами равен $n - 1$, таков диаметр графа P_n.

Эксцентриситет вершины – это расстояние от нее до самой удаленной вершины. Эксцентриситет вершины x обозначается $\mathrm{ecc}(x)$:

$$\mathrm{ecc}(x) = \max_{y \in V} d(x, y).$$

Диаметр графа, таким образом, – это максимальный из эксцентриситетов его вершин:

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{x \in V} \mathrm{ecc}(x).$$

Минимальный из эксцентриситетов вершин называется *радиусом* графа и обозначается $\mathrm{rad}(G)$:

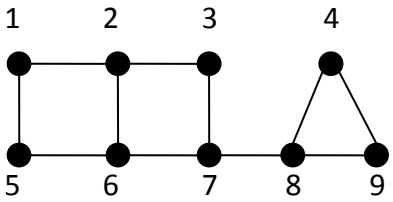
$$\mathrm{rad}(G) = \min_{x \in V} \mathrm{ecc}(x).$$

У полного графа эксцентриситеты всех вершин равны 1, значит, и его радиус равен 1. У графа P_n радиус равен $\frac{n}{2}$ при четном n и $\frac{n-1}{2}$ при нечетном. Используя обозначение $\lfloor x \rfloor$ для целой части числа x, можно написать: $\mathrm{rad}(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Вершина графа, имеющая минимальный эксцентриситет, называется *центральной*. Иначе говоря, центральная вершина – это такая, эксцентриситет которой равен радиусу графа. *Центр* графа – множество всех его центральных вершин, он обозначается $C(G)$. У полного графа все вершины центральные, а у графа P_n одна или две центральные вершины, в зависимости от четности числа n.

На рисунке 5.9 показаны граф и таблица эксцентриситетов его вершин.

Радиус этого графа равен 3, диаметр равен 5, центр состоит из вершин 3, 6, 7.



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ecc(x)	5	4	3	5	4	3	3	4	5

Рис. 5.9. Граф и эксцентриситеты его вершин

Теорема 5.6 (о радиусе и диаметре). *Для любого связного графа G выполняются неравенства*

$$\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G) \le 2\mathrm{rad}(G).$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно, так как радиус – это минимальный эксцентриситет, а диаметр – максимальный. Докажем правое неравенство.

Пусть x и y – вершины, расстояние между которыми максимально в графе, то есть $d(x,y) = \mathrm{diam}(G)$. Пусть z – центральная вершина, то есть $\mathrm{ecc}(z) = \mathrm{rad}(G)$. Применим неравенство треугольника:

$\mathrm{diam}(G) = d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \le 2\mathrm{ecc}(z) = 2\mathrm{rad}(G)$. ■

5.5. Эйлеровы циклы и пути

В 1736 году Леонард Эйлер сообщил в письме о своем решении задачи о Кенигсбергских мостах. Это событие считается моментом рождения теории графов, хотя называться теорией графов она стала двумя столетиями позже.

В городе Кенигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Преголь, соединяющих разные части суши (два берега и два острова). Схема расположения мостов показана на рисунке 5.10 слева, буквами обозначены участки суши. В популярной в то время головоломке спрашивалось, можно ли придумать такой маршрут, чтобы обойти все мосты, пройдя по каждому один раз, и вернуться в исходную точку. Эйлер доказал, что это невозможно, и дал общее правило, с помощью которого можно для любой системы мостов определить, существует ли такой обход.

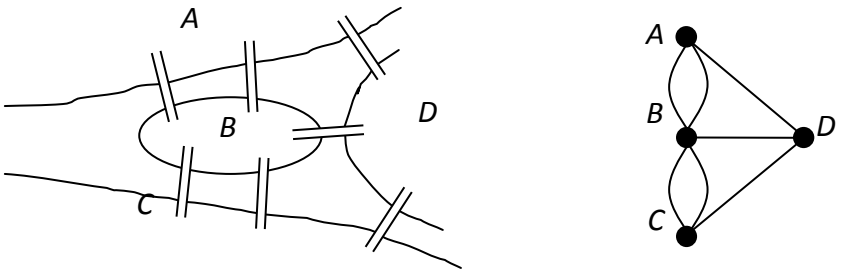


Рис. 5.10. Схема кенигсбергских мостов и ее представление мультиграфом

Задача о кенигсбергских мостах легко переводится на язык теории графов. Поставим в соответствие каждой части суши вершину графа, а каждому мосту – ребро. Получается мультиграф, изображенный на рисунке 5.10 справа. Нужно обойти все ребра этого мультиграфа, пройдя по каждому один раз, и вернуться в стартовую вершину. Рассмотрим эту задачу в общем случае, только для обыкновенных графов (решение, которое будет получено, можно распространить и на мультиграфы, но для этого нужно определить понятия пути и цикла в мультиграфе, чего мы делать не будем).

Определение. Цикл, проходящий через все ребра графа, называется *эйлеровым циклом*.

Цикл, проходя через вершину, каждый раз использует два ребра – по одному входит, по другому выходит. Если он проходит через вершину k раз, то будут использованы $2k$ инцидентных этой вершине ребер. Если этот цикл эйлеров, то все ребра будут пройдены, значит, степень вершины – четное число. Это относится к каждой вершине. Значит, необходимое условие существования эйлерова цикла – четность степеней всех вершин графа (заметим, что в мультиграфе задачи о кенигсбергских мостах степени всех вершин нечетны).

Теорема 5.7 (об эйлеровом цикле). *Эйлеров цикл в связном графе существует тогда и только тогда, когда степени всех вершин этого графа четны*.

Доказательство. О необходимости условия четности уже было сказано. Докажем его достаточность.

Пусть G – связный граф с четными степенями всех вершин. Выберем в этом графе самый длинный путь $P = x_1, x_2, \dots, x_k$. Покажем, что этот путь – цикл и что он содержит все ребра графа, т.е. P – эйлеров цикл.

Допустим, что P – не цикл, т.е. $x_1 \neq x_k$. Путь P проходит через все ребра, инцидентные вершине x_k, иначе он не был бы самым длинным путем (если есть не пройденное ребро (x_k, y), то вершину y можно добавить к пути). Если вершина x_k встречается в пути P ровно s раз, то $s-1$ раз при ее прохождении используются два инцидентных ей ребра, а последний раз – одно. Значит, всего имеется $2(s-1)+1$ ребер, инцидентных этой вершине.

Но это противоречит четности ее степени. Значит, P – цикл, $P = x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_1$.

Допустим, что P проходит не через все ребра графа. Так как граф связен, то имеется не пройденное ребро, инцидентное какой-нибудь вершине из P. Пусть это ребро (x_i, z) (вершина z может принадлежать, а может не принадлежать пути). Но тогда можно построить более длинный путь:

$$x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_1, x_2, \dots, x_i, z,$$

а это противоречит выбору пути P. ■

Если не требовать возвращения в исходный пункт, то получается задача об эйлеровом пути.

Определение. Путь, проходящий через все ребра графа, называется *эйлеровым путем*.

Теорема 5.8 (об эйлеровом пути). *Эйлеров путь в связном графе существует тогда и только тогда, когда в нем имеется не более двух вершин нечетной степени*.

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как для эйлерова цикла. Если имеется эйлеров путь, то всякая вершина, кроме начальной и конечной вершин пути, должна иметь четную степень. Докажем достаточность условия.

Если нет вершин нечетной степени, то по предыдущей теореме существует эйлеров цикл, а цикл – это частный вид пути.

Не может быть в графе только одна вершина нечетной степени, так как сумма степеней должна быть четной (теорема о рукопожатиях).

Остается рассмотреть случай, когда в связном графе G есть ровно две вершины нечетных степеней, a и b. Построим новый граф H, добавив к графу G новую вершину c и ребра (a, c) и (b, c). В графе H степени всех вершин четны. Значит, в нем существует эйлеров цикл. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_1$ – такой цикл. Существует единственное i, при котором $x_i = c$. Тогда путь $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{k-1}, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ является эйлеровым путем в графе G. ■

5.6. Деревья

Связный граф, не имеющий циклов, называется *деревом*.

Если в графе нет циклов, то каждая его компонента связности является деревом. Такой граф называют *лесом*.

На рисунке 5.11 показаны все непомеченные деревья с числом вершин, не превосходящим 5.

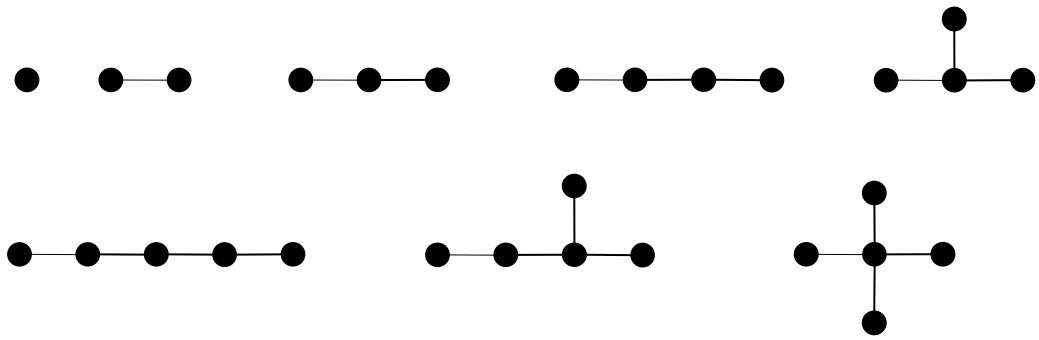


Рис. 5.11. Все деревья с числом вершин 1, 2, 3, 4, 5

Напомним, что мы договорились обозначать число вершин графа буквой n, а число ребер буквой m.

Теорема 5.9 (о свойствах деревьев).

1) *Для любого дерева справедливо равенство* $m = n - 1$.

2) *Если в графе нет циклов и* $m = n - 1$*, то этот граф – дерево.*

3) *Если граф связен и* $m = n - 1$*, то этот граф – дерево.*

Доказательство. Согласно теореме 5.3, если $m \geq n$, то в графе есть цикл. Так как в дереве циклов нет, то должно выполняться неравенство $m \leq n - 1$. Так как дерево – связный граф, то по теореме 5.4 выполняется неравенство $m \geq n - 1$. Из этих двух неравенств следует, что $m = n - 1$. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть G – граф без циклов, с n вершинами и m ребрами, причем $m = n - 1$. Нужно доказать, что граф G связен. Допустим, что это не так. Возьмем две вершины из разных компонент связности и добавим к графу G ребро, соединяющее эти вершины. Ясно, что при добавлении такого ребра циклов не появится. Но в новом графе n вершин и n ребер, по теореме 5.3 в нем должен быть цикл. Противоречие. Значит, G – связный граф, то есть дерево.

Докажем третье утверждение. Пусть G – связный граф с n вершинами и m ребрами, причем $m = n - 1$. Нужно доказать, что в этом графе нет циклов. Допустим, что циклы есть. Возьмем любое ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу, и удалим из графа. Граф останется связным. Но в новом графе n вершин и $n - 2$ ребра, по теореме 5.4 этот граф не может быть связным. Противоречие. Значит, в графе G нет циклов и этот граф – дерево. ■

Теорема 5.10. *В любом дереве для любых двух вершин существует единственный путь, соединяющий эти вершины.*

Доказательство. Так как дерево – связный граф, то путь между любыми двумя вершинами существует. Предположим, что в некотором дереве есть два различных пути, P_1 и P_2, соединяющих вершины a и b.

Начальные отрезки этих путей совпадают (оба пути начинаются в одной вершине a). Пусть x – последняя вершина этого совпадающего начального участка, а далее в пути P_1 следует вершина y_1, в пути P_2 – вершина y_2. Рассмотрим ребро (x, y_1). Если удалить его из графа, он останется связным, так как в нем останется путь, соединяющий вершины x и y_1 – следуем вдоль пути P_1 от вершины y_1 до первой вершины, принадлежащей пути P_2 (такая существует, так как оба пути заканчиваются в одной вершине b), а затем вдоль пути P_2 в обратном направлении до вершины x. Значит, ребро (x, y_1) не является перешейком. По теореме 5.5 оно принадлежит какому-нибудь циклу. Следовательно, в графе есть цикл. Противоречие, так как наш граф – дерево. ■

Вершина степени 1 в дереве называется *листом*. Отметим два факта, связанных с листьями.

Утверждение 5.1. *В дереве с $n > 1$ для любой вершины любая наиболее удаленная от нее вершина является листом.*

Действительно, пусть a – вершина дерева, b – одна из наиболее удаленных от нее вершин. Допустим, b не лист, тогда имеется вершина c, смежная с b и не принадлежащая единственному пути между a и b. Но тогда $d(a, c) = d(a, b) + 1$, а это противоречит тому, что b – наиболее удаленная от a вершина.

Утверждение 5.2. *В любом дереве с $n > 1$ имеется не менее двух листьев.*

В самом деле, пусть a – вершина дерева, b – наиболее удаленная от нее вершина. Как доказано выше, b – лист. Пусть c – вершина, наиболее удаленная от b. Тогда c – тоже лист.

При любом $n > 1$ существует дерево, имеющее ровно два листа – это граф P_n.

В графе может быть сколько угодно центральных вершин. Есть графы, у которых все вершины центральные, например, K_n или C_n при любом n. Для деревьев имеется гораздо более узкий диапазон возможностей.

Теорема 5.11 (о центре дерева). *Центр любого дерева состоит из одной вершины или из двух смежных вершин.*

Доказательство. Для деревьев с одной и двумя вершинами это, очевидно, верно. Далее проводим индукцию по числу вершин.

Пусть T – дерево с вершинами, $n \geq 3$. Если a – лист, b – вершина, смежная с a, то b не является листом (иначе было бы $n = 2$) и все пути, соединяющие вершину a с другими вершинами, проходят через вершину b. Поэтому для любой вершины x, отличной от a, выполняется равенство $d(b, x) = d(a, x) - 1$. Отсюда следует, что $ecc(b) = ecc(a) - 1$. Значит, ни

один лист не является центральной вершиной, так как смежная с ним вершина имеет меньший эксцентриситет.

Удалим из дерева T все листья. Так как при удалении листа связность не нарушается, то в результате получится дерево T'. Ни одна центральная вершина дерева Т не является листом, поэтому все они сохранятся в T'. Из утверждения 5.1 следует, что при одновременном удалении всех листьев эксцентриситет каждой из оставшихся вершин уменьшается на 1. Значит, вершины с наименьшим эксцентриситетом в дереве T останутся вершинами с наименьшим эксцентриситетом и в дереве T', поэтому $C(T) = C(T')$. По предположению индукции $C(T')$ состоит из одной вершины или из двух смежных вершин. ■

Таким образом, все деревья делятся на два класса: деревья с одной центральной вершиной и деревья с двумя центральными вершинами. Оба класса непустые – граф P_n при нечетном n имеет одну центральную вершину, а при четном две.

Любой способ представления графов, конечно, годится и для представления деревьев. Но есть и специфические способы представления именно деревьев. Самым компактным представлением помеченного дерева является его *код Прюфера.*

Код Прюфера строится для дерева с множеством вершин $\{1,2,\dots,n\}$. Строится он следующим образом. В дереве T находим наименьший лист a_1 и смежную с ним вершину b_1. Вершину b_1 запоминаем, а вершину a_1 удаляем из дерева. В полученном дереве T_1 снова отыскиваем наименьший лист a_2 и смежную с ним вершину b_2. Запоминаем b_2, удаляем a_2, получается дерево T_2. Такие действия повторяем до тех пор, пока не дойдем до дерева T_{n-2}, состоящего из двух вершин. К этому моменту мы запомнили вершины $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$. Этот набор чисел и есть код Прюфера дерева T , он обозначается $p(T)$:

$$p(T) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-2}).$$

Отметим, что каждый элемент кода Прюфера – это целое число в диапазоне от 1 до n.

На рисунке 5.12 показан пример, иллюстрирующий процесс построения кода Прюфера.

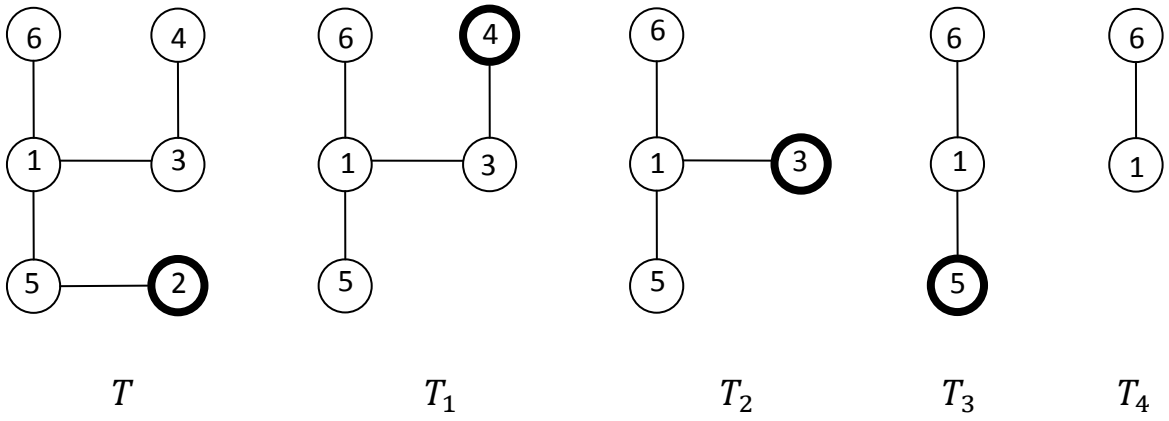


Рис.12. Построение кода Прюфера. Результат: $p(T) = (5,3,1,1)$.

По коду Прюфера можно однозначно восстановить дерево. Число вершин узнать легко – нужно к числу элементов кода прибавить 2. Нетрудно узнать и степени вершин.

Лемма. *Степень вершины в дереве T на 1 больше числа вхождений этой вершины в $p(T)$.*

Доказательство. Пусть a – вершина степени k в дереве T, покажем, что a входит в $p(T)$ ровно $k-1$ раз. В процессе построения кода вершина a либо будет удалена из дерева, либо останется в числе двух последних вершин. В любом случае она в какой-то момент превратится в лист. Для того, чтобы она превратилась в лист, должны быть удалены $k-1$ из смежных с ней вершин. Каждый раз, когда удаляется вершина, смежная с вершиной a, сама вершина a добавляется к коду. Значит, она будет добавлена к коду $k-1$ раз, после этого станет листом и больше добавляться к коду не будет. ■

Для того, чтобы восстановить дерево, нужно узнать его ребра (вершины нам известны). Всего в дереве $n-1$ ребро. Из них $n-2$ ребра – это пары (a_i, b_i), $i = 1,2,\dots,n-2$, где $a_1,\dots,a_{n-2}$ – это листья, последовательно удаляемые при построении кода Прюфера, $b_1,\dots,b_{n-2}$ – смежные с ними вершины. Последние известны из кода Прюфера. Остается найти $a_1,\dots,a_{n-2}$. Кроме того, есть еще ребро, принадлежащее дереву T_{n-2}, на котором завершается процесс построения кода. Значит, нужно еще найти две вершины этого ребра. Продемонстрируем на примере, как можно решить эти задачи.

Пусть задан код Прюфера $p(T) = (5,1,4,5,4)$. Процесс восстановления дерева отражен в таблице:

i	1	2	3	4	5	6	7	a_i	b_i
1	2	1	1	3	3	1	1	2	5
2	2	0	1	3	2	1	1	3	1
3	1	0	0	3	2	1	1	1	4
4	0	0	0	2	2	1	1	6	5
5	0	0	0	2	1	0	1	5	4
6	0	0	0	1	0	0	1	4	7

Код состоит из пяти чисел, следовательно, дерево имеет 7 вершин. Их номера выписаны в верхней строке таблицы. Следующая строка содержит степени вершин, вычисленные по коду с помощью леммы. При кодировании число a_1 определялось как наименьший лист в дереве. Листья – это вершины степени 1. Из таблицы видно, что наименьшим листом является вершина 2. Значит, $a_1 = 2$. Вписываем это значение в соответствующую клетку таблицы, а в соседнюю клетку – число $b_1 = 5$ из кода. Это дает ребро (2,5). Далее в процессе кодирования удаляется вершина 2, при этом степень вершины 5 уменьшается на 1. Это отражено в следующей строке таблицы, представляющей степени вершин дерева T_1. Удаленные вершины в таблице отмечаются нулем. Далее процесс повторяется, каждая следующая строка представляет набор степеней вершин дерева, полученного после удаления очередного листа. В последней строке остались две единицы, они указывают на две оставшиеся вершины, образующие последнее ребро. Вписываем эти вершины в два последних столбца. Теперь два последних столбца таблицы представляют все ребра дерева. Само дерево изображено на рисунке 5.13.

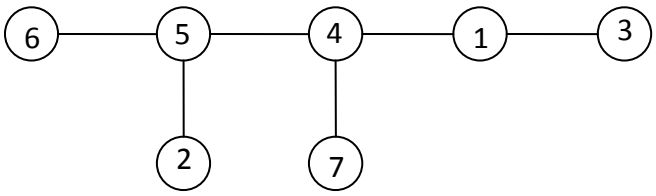


Рис. 5.13. Дерево с кодом Прюфера $p(T) = (5,1,4,5,4)$

Дадим общее описание алгоритмов построения кода Прюффера и его декодирования.

Алгоритм построения кода Прюфера.

Вход: дерево $\boldsymbol{T}$ с множеством вершин $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$.

Выход: набор чисел $p = (b_1, b_2, \dots, b_{n-2})$.

Процедура:

1 для i от 1 до $n - 2$ выполнить

2 найти в дереве $\boldsymbol{T}$ наименьший лист $\boldsymbol{a}$;
3 найти вершину $\boldsymbol{b}$, смежную с $\boldsymbol{a}$;
4 удалить $\boldsymbol{a}$ из $\boldsymbol{T}$;
5 положить $b_i = b$.

Алгоритм восстановления дерева по коду Прюфера.

Вход: набор $p = (b_1, b_2, \dots, b_{n-2})$ чисел из множества $\{1,2, \dots, n\}$.

Выход: множество E, состоящее из пар элементов множества $\{1,2, \dots, n\}$.

Процедура:

1 для i от 1 до n положить $\deg(i) = 1$;
2 для i от 1 до $n-2$ положить $\deg(b_i) = \deg(b_i) + 1$;
3 для i от 1 до $n-2$ выполнить
4 найти наименьшее a с $\deg(a) = 1$;
5 добавить к E пару (a, b_i) ;
6 положить $\deg(a) = 0$;
7 положить $\deg(b_i) = \deg(b_i) - 1$
8 найти a и b с $\deg(a) = \deg(b) = 1$ и добавить к множеству E пару (a, b).

Можно доказать, что множество ребер, которое строит процедура восстановления, всегда образует дерево. Следовательно, функция $P(T)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством деревьев с множеством вершин $\{1,2, \dots, n\}$ и множеством наборов $\{1,2, \dots, n\}^{n-2}$. Число наборов нам известно, по правилу равенства таково же и число деревьев. Получаем следующий результат, известный как *формула Кэли*.

Теорема 5.12 (формула Кэли). *Число деревьев с множеством вершин* $\{1,2, \dots, n\}$ *равно* n^{n-2}.

Корневым деревом называется дерево с особо выделенной вершиной, называемой *корнем*.

Деревья, встречающиеся в приложениях – это чаще всего именно корневые деревья. Схема подчиненности в организации, структура папок и файлов на компьютерном диске, различные системы классификации – примеры корневых деревьев. Корневые деревья лежат в основе многих эффективных структур хранения, поиска, сортировки данных.

Если в корневом дереве вершина b лежит на пути, соединяющем вершину a с корнем, то вершину b называют *предком* вершины a, а вершину a – *потомком* вершины b. Если при этом a и b смежны, то говорят, что вершина b – *отец* вершины a, а вершина a – *сын* вершины b (иногда

используют термины «родитель» и «ребенок»). Пример корневого дерева показан на рисунке 5.14, корень расположен сверху. В этом дереве вершина 4 является предком вершин 5, 6, 7 и отцом вершины 5, у вершины 3 три сына, у вершины 5 – два, у вершины 8 сыновей нет.

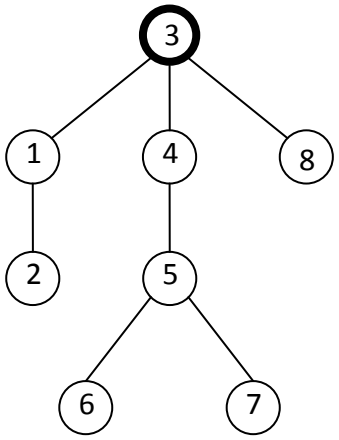


Рис. 5.14. Корневое дерево

В корневом дереве у каждой вершины, кроме корня, имеется единственный отец. Это дает компактный и удобный во многих применениях способ задания корневых деревьев с помощью таблицы, указывающей для каждой вершины ее отца. Иногда считают, что отцом корня является сама эта вершина. Для дерева на рисунке 5.14 получается такая таблица:

Вершина	1	2	3	4	5	6	7	8
Отец	3	1	3	3	4	5	5	3

В помеченном дереве с n вершинами корень можно выбрать n способами, поэтому число помеченных корневых деревьев в n раз больше числа помеченных деревьев, то есть равно n^{n-1}.

Каркас (применяются также термины *остов*, *остовное дерево*) связного графа – это дерево, являющееся подграфом этого графа и содержащего все его вершины. На рисунке 5.15 показан граф и его каркасы.

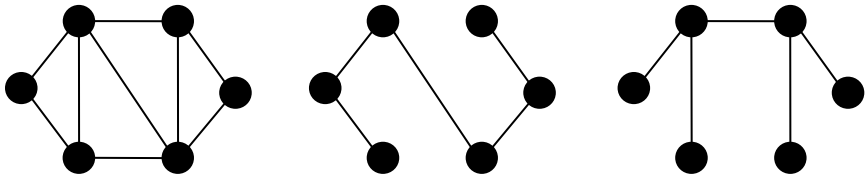


Рис. 5.15. Граф (слева) и два его каркаса

У всякого связного графа имеется хотя бы один каркас. Действительно, если в связном графе нет циклов, то этот граф – дерево и он сам является своим каркасом. Если же циклы есть, то удалив цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу), получим связный подграф.

Продолжая удалять цикловые ребра, в конце концов придем к связному подграфу, не имеющему циклов, то есть дереву. Оно и будет каркасом исходного графа.

Если в графе есть циклы, то у него больше одного каркаса. Определить точное число каркасов связного графа позволяет так называемая матричная теорема Кирхгофа. Приведем ее без доказательства. Для графа G с множеством вершин $\{1,2,\dots,n\}$ определим матрицу Кирхгофа $K(G)$ – квадратную матрицу порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$K_{ij} = \begin{cases} -1, \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ смежны,} \\ 0, \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ не смежны и } i \neq j, \\ \deg(i), \text{ если } i = j. \end{cases}$$

Иначе говоря, $K(G)$ получается из матрицы смежности, если заменить все 1 на -1, а вместо нулей на главной диагонали поставить степени вершин. Заметим, что матрица $K(G)$ – вырожденная, так как сумма элементов каждой строки равна 0, то есть столбцы линейно зависимы.

Теорема 5.13 (матричная теорема Кирхгофа). *Если G – связный граф с не менее чем двумя вершинами, то алгебраические дополнения всех элементов матрицы $K(G)$ равны между собой и равны числу каркасов графа G.*

5.7. Двудольные графы

Граф называется *двудольным***,** если множество его вершин можно так разбить на две части, что каждое ребро соединяет вершины из разных частей. Эти подмножества называются *долями*. На рисунке 5.16 показан пример двудольного графа.

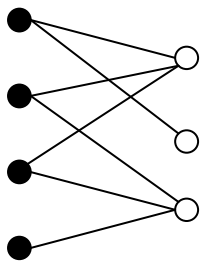


Рис. 5.16. Двудольный граф

Двудольные графы часто встречаются в приложениях – с их помощью моделируются отношения между объектами двух типов. Таковы, например, отношения «продукт x используется в приготовлении блюда y» или «работник x владеет профессией y».

Путь P_n при любом n является двудольным графом: одна доля состоит из вершин с четными номерами, другая – с нечетными. Цикл C_3 – пример графа, не являющегося двудольным: при любом разбиении множества его вершин на два подмножества в одном из этих подмножеств окажутся две смежных вершины. Цикл C_4 – двудольный граф – это показано на рисунке 5.17.

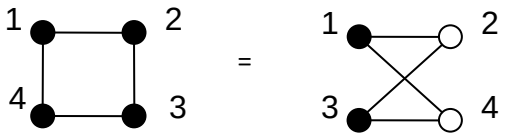


Рис. 5.17. C_4 как двудольный граф

Рассмотрим цикл C_5 и попытаемся распределить его вершины по двум долям. Поместим вершину 1 в первую долю. Тогда вершина 2 должна быть во второй доле, так как она смежна с вершиной 1. Вершина 3, смежная с вершиной 2, должна быть в первой доле, вершина 4, смежная с вершиной 3 – во второй, а вершина 5, смежная с вершиной 4 – в первой. Но теперь ребро (1,5) соединяет вершины одной доли (рисунок 5.18)., чего быть не должно, если граф двудольный. Процесс распределения вершин по долям происходит однозначно, и вершины 1 и 5 неизбежно оказываются в одной доле. Следовательно, граф C_5 не двудольный.

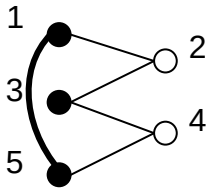


Рис. 5.18. Граф C_5 не является двудольным

Эти рассуждения можно распространить на циклы с любым числом вершин и становится ясно, что цикл C_n – двудольный граф при четном n и не двудольный при нечетном (рисунок 5.19).

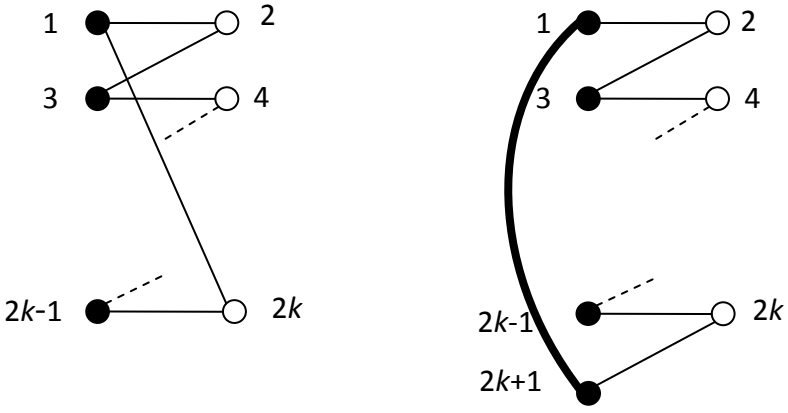


Рис. 5.19. Четный и нечетный циклы

Оказывается, присутствие в графе нечетных циклов (т.е. циклов нечетной длины) – единственная причина, по которой граф не является двудольным.

Теорема 5.14 (теорема Кёнига). *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит нечетных циклов в качестве подграфов.*

Доказательство. Мы уже видели, что это условие необходимо – нечетный цикл не является двудольным графом, следовательно, любой граф, содержащий такой цикл, – не двудольный. Докажем достаточность.

Очевидно, что граф двудольный тогда и только тогда, когда каждая его компонента связности – двудольный граф. Поэтому достаточно рассмотреть связные графы.

Пусть G – связный граф, не имеющий нечетных циклов. Возьмем какую-нибудь вершину a в этом графе и разделим все вершины графа на два подмножества: V_1 – множество всех вершин, расстояние от которых до вершины a нечетно, V_2 – множество вершин с четным расстоянием до a. Покажем, что нет ребер, соединяющих вершины из одного подмножества. Отсюда будет следовать, что G – двудольный граф с долями V_1 и V_2.

Допустим, что (b, c) – такое ребро. Расстояния от вершины a до вершин b и c могут быть различными или одинаковыми. Рассмотрим обе возможности.

1) $d(a,b) \neq d(a,c)$. Пусть $d(a,b) < d(a,c)$. Если $x_1, x_2, \dots, x_k$ – кратчайший путь от a до b, то, очевидно, $x_1, x_2, \dots, x_k, c$ – кратчайший путь от a до c. Значит, $d(a,c) = d(a,b) + 1$. Но это противоречит тому, что числа $d(a,b)$ и $d(a,c)$ имеют одинаковую четность (вершины b и c принадлежат одному подмножеству).

2) $d(a,b) = d(a,c)$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k$ и $y_1, y_2, \dots, y_k$ – кратчайшие пути от вершины a до вершин b и c, то есть $x_1 = y_1 = a$, $x_k = b$, $y_k = c$. Эти два пути начинаются в одной вершине, а заканчиваются в разных. Пусть $x_i = y_i$ – последняя вершина, принадлежащая обоим путям, то есть $x_j \neq y_j$ при $j > i$ (рисунок 5.20). Но тогда $x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_i$ – цикл длины $2(k-i)+1$, чего не может быть, так как в графе нет нечетных циклов. ■

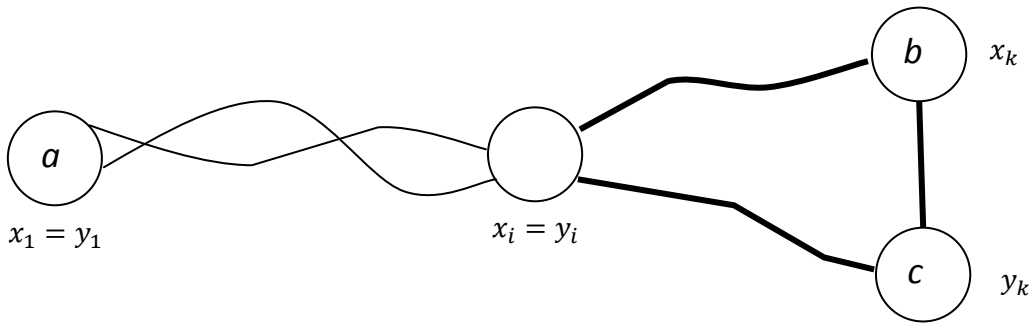


Рис. 5.20. К доказательству теоремы 5.14

Двудольный граф называется *полным двудольным графом*, если в нем каждая вершина одной доли смежна с каждой вершиной другой доли. Полный двудольный граф, в котором одна доля состоит из p вершин, а другая – из q вершин, обозначается $K_{p,q}$. На рисунке 5.21 показан граф $K_{2,3}$.

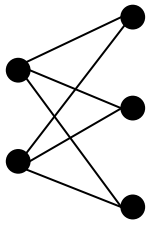
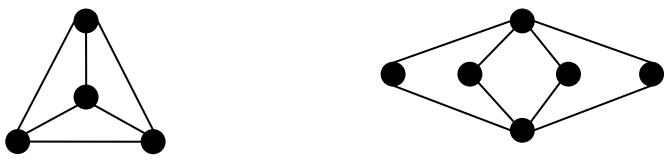


Рис. 5.21. Граф $K_{2,3}$

5.8. Планарные графы

Мы уже не раз пользовались возможностью изобразить граф в виде фигуры на плоскости. Некоторые графы можно нарисовать так, чтобы линии, представляющие ребра, не пересекались. Такое изображение называют *плоским графом*. Более точно, плоский граф – это граф, вершинами которого являются точки плоскости, а ребра представлены линиями, соединяющими смежные вершины, при этом никакие два ребра не должны иметь общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Граф называется *планарным***,** если он изоморфен плоскому графу. Этот плоский граф называют также *плоской укладкой* планарного графа. На рисунке 5.22 показаны плоские укладки графов K_4 и $K_{2,4}$. А вот у графов K_5 и $K_{3,3}$ плоских укладок не существует – вскоре будет доказано, что эти графы не планарны.



K_4 $K_{2,4}$

Рис. 5.22. Плоские укладки двух графов

Если плоскость разрезать по ребрам плоского графа, она распадется на связные части, которые называют *гранями*. Всегда имеется одна неограниченная *внешняя* грань, все остальные грани называются *внутренними*. Если в плоском графе нет циклов, то у него имеется только одна грань. Если же циклы есть, то граница каждой грани содержит цикл, но

не обязательно является циклом. На рисунке 5.23 показан плоский граф с пятью пронумерованными гранями. Граница грани с номером 2 состоит из двух циклов, а граница грани с номером 3 кроме цикла длины 5 включает еще дерево из трех ребер.

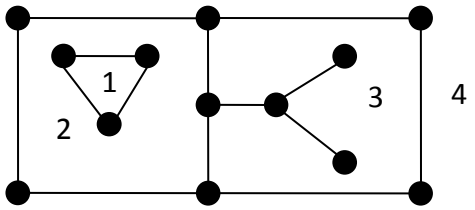


Рис. 5.23. Плоский граф и его грани

Следующая теорема дает формулу для числа граней, называемую *формулой Эйлера.*

Теорема 5.15 (формула Эйлера). Количество граней в любой плоской укладке планарного графа, имеющего n вершин, m ребер и k компонент связности, равно $m - n + k + 1$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение теоремы при $k = 1$. Проведем индукцию по числу ребер.

Согласно теоремам 5.4 и 5.9 наименьшее число ребер в связном графе с n *вершинами равно* $n - 1$ и всякий связный граф с таким числом ребер является деревом. Очевидно, любое дерево – планарный граф, в любой плоской укладке которого имеется единственная грань, и формула верна: $n - 1 - n + 1 + 1 = 1$.

Допустим, в связном плоском графе $m > n - 1$. Тогда по теореме 5.3 в графе есть цикл. Возьмем какое-нибудь ребро e, принадлежащее некоторому простому циклу. Это ребро содержится в границе двух граней, одна из которых целиком лежит внутри цикла, другая – снаружи. Если удалить ребро e из графа, то эти две грани сольются в одну. Граф, полученный удалением ребра e, очевидно, будет плоским и связным, в нем на одно ребро и на одну грань меньше, чем в исходном графе, а число вершин осталось прежним. По предположению индукции в новом графе имеется ровно $m - 1 - n + 2 = m - n + 1$ грань, значит, в исходном было $m - n + 2$ грани. Таким образом, формула верна для любого связного плоского графа.

Если граф несвязен, то в компоненте связности, имеющей n_i вершин и m_i ребер, как доказано выше, будет $m_i - n_i + 1$ внутренняя грань. Суммируя по всем компонентам и прибавляя 1 для учета внешней грани, убеждаемся в справедливости формулы в общем случае. ■

Следствие 1. *Если в планарном графе* n *вершин,* $n \geq 3$, *и* m *ребер, то* $m \leq 3n - 6$.

Доказательство. Если в графе нет циклов, то $m \leq n-1$ и неравенство выполняется при $n \geq 3$. Рассмотрим плоский граф с f гранями, в котором имеются циклы. Занумеруем грани числами от 1 до f и обозначим через a_i количество ребер, принадлежащих границе грани с номером i. Так как граница каждой грани содержит цикл, то $a_i \geq 3$ для каждого i, следовательно, $\sum_{i=1}^{f} a_i \geq 3f$. С другой стороны, каждое ребро принадлежит границе не более чем двух граней, поэтому $\sum_{i=1}^{f} a_i \leq 2m$. Из этих двух неравенств следует, что $3f \leq 2m$. Применяя формулу Эйлера, получаем

$m \leq 3n - 3k - 3 \leq 3n - 6$. ■

Следствие 1 дает необходимое условие планарности, которое в некоторых случаях позволяет установить, что граф не является планарным. Рассмотрим, например, полный граф K_5. У него $n = 5$, $m = 10$ и неравенство из следствия 1 не выполняется. Значит, этот граф не планарный.

В то же время существуют графы, не являющиеся планарными, для которых неравенство следствия 1 выполняется. Пример – полный двудольный граф $K_{3,3}$. У него 6 вершин и 9 ребер. Неравенство выполняется, но мы сейчас установим, что он не планарный. Заметим, что в этом графе нет циклов длины 3 (так как он двудольный, в нем вообще нет нечетных циклов). Поэтому граница каждой грани содержит не менее четырех ребер. Повторяя рассуждения из доказательства следствия 1, но используя неравенство $a_i \geq 4$ вместо $a_i \geq 3$ получаем следующий результат.

Следствие 2. *Если в планарном графе* n *вершин,* $n \geq 3$, m *ребер и нет циклов длины* 3, *то* $m \leq 2n - 4$.

Для графа $K_{3,3}$ неравенство следствия 2 не выполняется, и это доказывает, что он непланарен.

Известно несколько критериев планарности, сформулируем без доказательства два из них.

Операция *подразбиения ребра* (a, b) состоит в том, что это ребро удаляется из графа, добавляются новая вершина c и ребра (a, c), (b, c). Это можно трактовать как замену ребра путем длины 2. Многократное применение операции подразбиения равносильно замене некоторых ребер графа путями произвольной длины. Полученный в результате граф назовем *подразбиением* исходного графа. На рисунке 5.24 изображено подразбиение графа K_4.

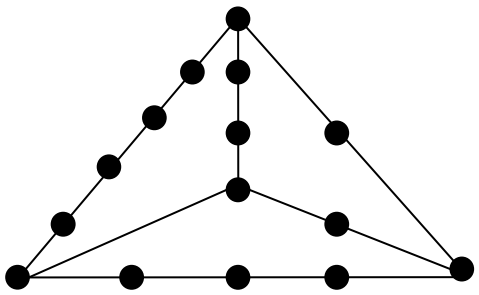


Рис. 5.24. Подразбиение графа K_4

Теорема 5.16 (критерий Понтрягина–Куратовского). *Граф планарен тогда и только тогда, когда у него нет подграфа, являющегося подразбиением графа* K_5 *или* $K_{3,3}$.

Операция *стягивания* ребра (a, b) определяется следующим образом. Вершины a и b удаляются из графа, к нему добавляется новая вершина c и она соединяется ребром с каждой вершиной, с которой была смежна хотя бы одна из вершин a, b (рисунок 5.25). Граф G называется *стягиваемым* к графу H, если H можно получить из G последовательностью стягиваний ребер.

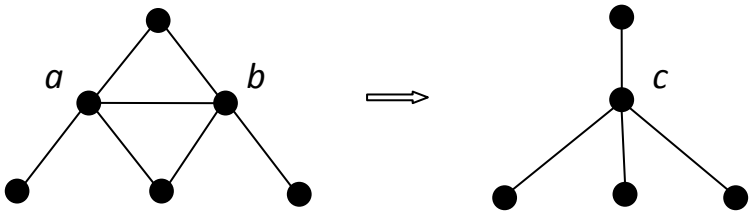


Рис. 5.25. Стягивание ребра

Теорема 5.17 (критерий Вагнера). *Граф планарен тогда и только тогда, когда у него нет подграфов, стягиваемых к графу* K_5 *или* $K_{3,3}$..

В качестве примера рассмотрим граф, изображенный на рисунке 5.26, его называют графом Петерсена. В нем нет подграфа, являющегося подразбиением графа K_5. К такому выводу легко придти, если заметить, что в графе K_5 каждая вершина имеет степень 4. Значит, и в любом его подразбиении будет 5 вершин степени 4, а в графе Петерсена степень каждой вершины равна 3. В то же время легко видеть, что граф Петерсена можно превратить в K_5 стягиванием пяти выделенных на рисунке ребер.

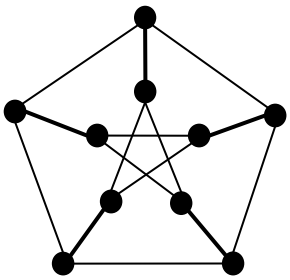


Рис. 5.26. Граф Петерсена