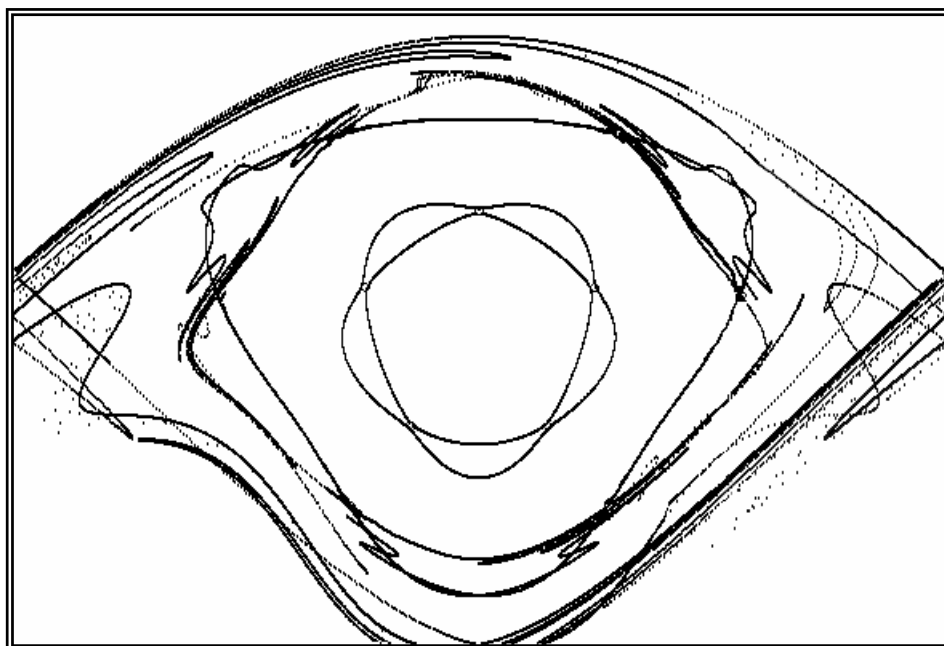


ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского»



**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕАВТОНОМНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

(Методическое описание учебно-лабораторного комплекса)

Нижний Новгород

2007

УДК 519.92

ББК:22.18

Исследование неавтономных динамических систем второго порядка: Методическое описание учебно-лабораторного комплекса/
Сост. Н. А. Ежевская, Н. В. Киселева, А. С. Загранцев, Е. А. Павлов. –
Нижний Новгород: ННГУ, 2007. – 33 стр.

Учебно-лабораторный комплекс NaDyS позволяет строить параметрические и фазовые портреты неавтономных динамических систем второго порядка. Он ориентирован на студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика», и предназначен для выполнения практикума по специальным курсам «Аналитические, качественные и численные методы исследования динамических систем», «Теория нелинейных колебаний», а так же курсовых и дипломных работ.

Методическое описание содержит краткое изложение используемых алгоритмов качественно-численного исследования неавтономных динамических систем, руководство пользователя программного комплекса NaDyS и контрольные примеры.

Составители: Н. А. Ежевская, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. ТУиДМ.
Н. В. Киселева, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. ТУиДМ.
А. С. Загранцев, студент V курса дневного отделения.
Е. А. Павлов, студент V курса дневного отделения.

Рецензент: С. П. Горбиков, доктор физ.-мат. наук, профессор,
зав. каф. прикладной математической статистики
общетехнического факультета ННГАСУ.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
2007

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Введение.	4
I. Алгоритмы качественно-численного исследования неавтономной динамической системы второго порядка.	5
1. Сведение задачи исследования периодических решений к отысканию циклов неподвижных точек отображения Пуанкаре.	5
2. Методы отыскания неподвижных точек отображения Пуанкаре.	6
2.1. Метод Ньютона.	6
2.2. Аналог метода секущих.	11
2.3. Метод последовательных приближений.	12
3. Определение характера устойчивости неподвижных точек.	13
4. Построение инвариантных кривых седловых неподвижных точек.	16
II. Руководство пользователя программного комплекса NaDyS.	19
1. Структура и описание программного комплекса.	19
2. Модуль “Поиск неподвижных точек”.	19
3. Модуль “Построение решения $x(t)$, $y(t)$ ”.	22
4. Модуль “Построение инвариантных кривых”.	24
III. Примеры.	28
1. Уравнение осциллятора с квадратичной нелинейностью.	28
2. Уравнение параметрически возбуждаемого ротора.	31
Литература.	33

ВВЕДЕНИЕ.

Учебно-лабораторный комплекс NaDyS предназначен для качественно-численного исследования нелинейных неавтономных динамических систем второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_1(t, x, y, \mu) \\ \dot{y} &= F_2(t, x, y, \mu)\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь, t – время, x, y – искомые функции, μ – параметр (k -мерный вектор), F_1, F_2 – функции, непрерывные по совокупности переменных, дифференцируемые по переменным x и y , периодические по переменному t периода τ , и, может быть, по переменному x периода 2π .

Задача качественно-численного исследования динамической системы (1.1) состоит в разбиении пространства параметров на области, в каждой из которых система является структурно-устойчивой, и построении фазового портрета, соответствующего каждой области, а также в изучении бифуркаций, происходящих на ограничивающих эти области поверхностях.

Программный комплекс NaDyS позволяет выполнить следующие этапы качественно-численного исследования системы (1.1):

- 1) Отыскание периодических решений.
- 2) Определение типа и характера устойчивости найденных периодических решений.
- 3) Построение инвариантных кривых неподвижных точек отображения Пуанкаре, порождаемого траекториями системы.
- 4) Построение итерационных последовательностей отображения Пуанкаре.
- 5) Построение временных реализаций $x(t), y(t)$.

по алгоритмам [1, 2], разработанным на кафедре теории управления и динамики машин ННГУ. Комплекс может использоваться как для изучения системы (1.1) при конкретных значениях параметров, так и для выяснения ее эволюции и бифуркаций в зависимости от параметров и построения бифуркационных диаграмм в пространстве параметров.

Учебно-лабораторный комплекс NaDyS ориентирован на студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика», и предназначен для выполнения практикума по специальным курсам «Аналитические, качественные и численные методы исследования динамических систем», «Теория нелинейных колебаний», а так же курсовых и дипломных работ.

I. Алгоритмы качественно-численного исследования неавтономной динамической системы второго порядка.

1. Сведение задачи исследования периодических решений к отысканию циклов неподвижных точек отображения Пуанкаре.

Рассматриваемая динамическая система (1.1) является неавтономной и нелинейной. При ее анализе найти аналитическое решение в большинстве случаев невозможно, поэтому используется численное исследование. Для изучения периодических решений используется метод точечных отображений [3], который позволяет задачу изучения структуры фазового пространства динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями, свести к исследованию точечного отображения, порождаемого фазовыми траекториями динамической системы на секущей поверхности.

Обозначим через S_0 плоскость $t=0$, а через S_1 – плоскость $t=\tau$. Фазовая траектория, выходящая из точки $M(0, x(0), y(0))$ плоскости S_0 через время $t=\tau$ пересечет плоскость S_1 в точке $M_1(\tau, x(\tau), y(\tau))$. Спроецируем вдоль оси t точку M_1 на плоскость S_0 , получим точку \bar{M} .

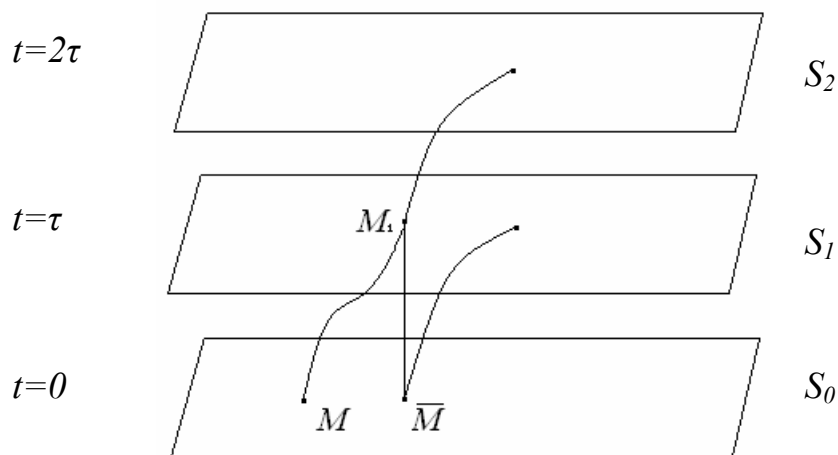


Рис. 1.1

Так как система не меняется при замене t на $t+\tau$, фазовая траектория, проходящая через точку $M_1(\tau, x(\tau), y(\tau))$, получается из фазовой траектории, проходящей через точку $M(0, x(\tau), y(\tau))$, путем параллельного сдвига вдоль оси t на величину $t=\tau$ (см. рис. 1.1). Поэтому достаточно изучить поведение фазовых траекторий в слое $0 \leq t < \tau$.

Траектории системы (1.1) порождают точечное отображение секущей плоскости $t=0$ в себя (отображение Пуанкаре). В случае, когда

система (1.1) периодична по x (не меняется при замене x на $x+2\pi$), то отображение T можно рассматривать как отображение поверхности $H\{x(\text{mod}2\pi), y\}$ кругового цилиндра с образующей, параллельной оси y , в себя.

Таким образом, задача свелась к отысканию неподвижных точек отображения Пуанкаре. При этом тип и характер устойчивости неподвижной точки отображения совпадает с типом и характером устойчивости соответствующего ей стационарного или периодического решения системы.

Для большинства систем получить точечное отображение T в явном виде представляется затруднительным или вообще невозможным, поэтому при построении отображения T воспользуемся численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка [4] интегрирования системы (1.1) в интервале $t \in [0, \tau]$ с постоянным шагом $h=\tau/N$, где N – заданное целое число.

2. Методы отыскания неподвижных точек отображения Пуанкаре.

Пусть оператор T точечного отображения секущей плоскости в себя при фиксированных значениях вектора параметров μ_0 имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \tilde{f}(x, y) \\ \bar{y} &= \tilde{g}(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обозначим через точку $M^*(x^*, y^*)$ его неподвижную точку: $TM^* = M^*$
Представим соотношения (1.2) в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} - x &= \tilde{f}(x, y) - x = f(x, y) \\ \bar{y} - y &= \tilde{g}(x, y) - y = g(x, y) \end{aligned}$$

Тогда задача поиска неподвижной точки сводится к решению системы двух уравнений

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

2.1. Метод Ньютона.

Для решения системы (1.3) применим итерационный метод, разработанный Ньютоном.

Предположим, что точка $M_k(x_k, y_k)$ являемся k -ым приближением неподвижной точки M^* . Разложим функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $M_k(x_k, y_k)$:

$$\begin{aligned} f(x_k + \Delta x, y_k + \Delta y) &= f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k) \Delta x + f_y(x_k, y_k) \Delta y + S_1 \\ g(x_k + \Delta x, y_k + \Delta y) &= g(x_k, y_k) + g_x(x_k, y_k) \Delta x + g_y(x_k, y_k) \Delta y + S_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где S_1, S_2 - члены, содержащие $\Delta x, \Delta y$ во второй и более высоких степенях.

Предполагаем, что переход от точки $M_k(x_k, y_k)$ к $M_{k+1}(x_k + \Delta x, y_k + \Delta y)$ приближает значение функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ к нулю так, что

$$\begin{aligned} f(x_k + \Delta x, y_k + \Delta y) &= 0 \\ g(x_k + \Delta x, y_k + \Delta y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Учитывая (1.5) и отбрасывая в (1.4) члены S_1, S_2 получим систему

$$\begin{aligned} -f(x_k, y_k) &= f'_x(x_k, y_k) \Delta x + f'_y(x_k, y_k) \Delta y \\ -g(x_k, y_k) &= g'_x(x_k, y_k) \Delta x + g'_y(x_k, y_k) \Delta y \end{aligned} \quad (1.6)$$

которая является линейной алгебраической системой уравнений относительно $\Delta x, \Delta y$. По правилу Крамера ее решение запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\begin{vmatrix} -f(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix}}{\Delta} \\ \Delta y &= \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & -f(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & -g(x_k, y_k) \end{vmatrix}}{\Delta} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix}$$

определитель системы (1.6).

Тогда $k+1$ -ое приближение неподвижной точки определяется формулами:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta x \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y \end{aligned} \quad (1.8)$$

Итерационный процесс заканчивается, если выполнено условие

$$|f(x_{k+1}, y_{k+1})| + |g(x_{k+1}, y_{k+1})| < \varepsilon \quad (1.9)$$

где ε – заданное малое положительное число. При этом точку M_{k+1} будем считать неподвижной точкой отображения T .

Из изложенного следует, что для применения метода Ньютона необходимо определить значения функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ и их частных производных по переменным x и y . Однако, в силу нелинейности и неавтономности системы (1.1), эти функции не могут быть найдены в аналитическом виде. Для их отыскания в точке $M(x, y)$ применим следующий способ.

Пусть $\Gamma: x = \varphi(t, x_0, y_0), y = \psi(t, x_0, y_0)$ - решение системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям $t_0 = 0, x_0, y_0$. Полагая $t = \tau$ и переобозначая x_0, y_0 через x, y , получим точку $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}) = TM(x, y)$, где

$$\bar{x} = \varphi(\tau, x, y), \bar{y} = \psi(\tau, x, y) \quad (1.10)$$

Отсюда найдем значения f и g в виде разностей

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \bar{x} - x \\ g(x, y) &= \bar{y} - y \end{aligned} \quad (1.11)$$

Продифференцируем эти выражения по x и y , получим

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - 1 = \frac{\partial \varphi(\tau, x, y)}{\partial x} - 1 \\ g'_x &= \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\tau, x, y)}{\partial x} \\ f'_y &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(\tau, x, y)}{\partial y} \\ g'_y &= \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} - 1 = \frac{\partial \psi(\tau, x, y)}{\partial y} - 1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Поскольку $\Gamma: x = \varphi(t, x, y), y = \psi(t, x, y)$ - решение, системы (1.1), то справедливы тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x, y)}{\partial y} &= F_1(t, \varphi(t, x, y), \psi(t, x, y), \mu_0) \\ \frac{\partial \psi(t, x, y)}{\partial y} &= F_2(t, \varphi(t, x, y), \psi(t, x, y), \mu_0) \end{aligned} \quad (1.13)$$

продифференцируем (1.13) по x и y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_r \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_r \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_r \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_r \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_r \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_r \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_r \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_r \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.14)$$

где частные производные функций F_1 и F_2 вычисляются при тех же значениях аргументов, что и в (1.13). Правые части соотношений (1.14) непрерывны по предположению, поэтому можно изменить порядок дифференцирования смешанных производных.

Обозначим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x, y) & \xi_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, x, y) \\ \eta_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x, y) & \eta_2 &= \frac{\partial \psi}{\partial y}(t, x, y) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Тогда соотношения (1.14) запишутся в виде системы

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_r \xi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_r \eta_1 \\
 \dot{\eta}_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_r \xi_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_r \eta_1 \\
 \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_r \xi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_r \eta_2 \\
 \dot{\eta}_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_r \xi_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_r \eta_2
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

которая совпадает с системой уравнений в вариациях, соответствующей системе (1.1). При $t_0 = 0$ справедливы соотношения: $x = \varphi(0, x, y)$, $y = \psi(0, x, y)$. Дифференцируя эти равенства по x и y , получим начальные условия для решений системы (1.16)

$$\xi_1(0) = 1, \eta_1(0) = 0, \xi_2(0) = 0, \eta_2(0) = 1 \tag{1.17}$$

Таким образом, для вычисления значений f_x, f_y, g_x, g_y необходимо найти решения $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ системы (1.16) при $t = \tau$ и подставить их в формулы (1.12).

Отметим, что решения систем (1.1) и (1.16) могут быть найдены численно, причем в системе (1.16) коэффициенты $\partial F_1/\partial x, \partial F_1/\partial y, \partial F_2/\partial x, \partial F_2/\partial y$ являются функциями переменных

$$x_1 = \varphi(t, x, y), y_1 = \psi(t, x, y)$$

Поэтому в программных модулях, реализующих метод Ньютона отыскания неподвижной точки отображения T , на k -м шаге осуществляется численное интегрирование методом Рунге-Кутты следующей системы шестого порядка:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= F_1(t, x, y, \mu_0) \\
 \dot{y} &= F_2(t, x, y, \mu_0) \\
 \dot{\xi}_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y} \eta_1 \\
 \dot{\eta}_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y} \eta_1 \\
 \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \xi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial y} \eta_2 \\
 \dot{\eta}_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \xi_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y} \eta_2
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Решение системы (1.18), удовлетворяющее начальным условиям $t_0 = 0, x_0 = x_k, y_0 = y_k, \xi_1 = 1, \eta_1 = 0, \xi_2 = 0, \eta_2 = 1$ строится на интервале $[0, \tau]$. Полученные значения функции при $t = \tau$ подставляются в формулы (1.11), (1.12) и затем в (1.7). Координаты точки $M_{k+1} (x_{k+1}, y_{k+1})$ определяются соотношениями (1.8).

Процесс построения последовательности $\{M_k\}$ ($k=1, 2, \dots, k$) заканчивается при выполнении неравенства (1.9) либо, если ее длина стала равной заданному числу k . Отметим, что число итераций существенно зависит от выбора начальной точки M_0 . Последовательность $\{M_k\}$ может оказаться расходящейся, если точка M_0 расположена достаточно далеко от неподвижной точки M^* или в ее окрестности имеется более одной неподвижной точки. Такой случай возможен при значениях параметров, близких к бифуркационным, например, при слиянии неподвижных точек типа седло и узел.

Обычно при первом применении метода Ньютона используется предварительные данные о расположении неподвижной точки отображения T , исходя из качественного исследования системы (1.1), либо численного ее отыскании другими методами.

При изучении зависимости координат неподвижных точек от изменения одного из параметров μ при фиксированных значениях других параметров выбор начальной точки M_0 итерационной последовательности будем производить следующим образом. Пусть μ_1 - заданное (начальное) значение параметра системы (1.1) и $M_0 (x_0, y_0)$ - начальное приближение неподвижной точки $M_1^* (x_1^*, y_1^*, \mu_1)$. Допустим, что необходимо изучить эволюцию периодического движения системы (1.1), соответствующего неподвижной точке M_1^* , в зависимости от изменения параметра μ с постоянным шагом $\Delta\mu$. Тогда в качестве начальной точки при $\mu_2 = \mu_1 + \Delta\mu$ и $\mu_3 = \mu_1 + 2\Delta\mu$ выберем неподвижные точки, найденные при μ_1 и μ_2 соответственно. Полученные три неподвижные точки $M_1^* (x_1^*, y_1^*, \mu_1)$, $M_2^* (x_2^*, y_2^*, \mu_2)$ и $M_3^* (x_3^*, y_3^*, \mu_3)$ используем для определения начальной точки M_0 при $\mu_4 = \mu_1 + 3\Delta\mu$. Координаты точки $M_0 (x_0, y_0)$ будем вычислять с помощью интерполяционных формул

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)} x_1^* + \frac{(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_3)}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} x_2^* + \frac{(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} x_3^* \\ y_0 &= \frac{(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)} y_1^* + \frac{(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_3)}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)} y_2^* + \frac{(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} y_3^* \end{aligned} \quad (1.19)$$

При дальнейшем изменении параметра μ по формуле $\mu_j = \mu_1 + (j-1)\Delta\mu$,

$j=5,6,\dots$ в выражениях (1.19) используем три последние неподвижные точки M_{j-3}^* , M_{j-2}^* , M_{j-1}^* принимая их в качестве точек M_1^* , M_2^* , M_3^* в формулах (1.19).

Для определения характера устойчивости найденной неподвижной точки $M^*(x^*, y^*)$ необходимо построить характеристический полином, соответствующий этой точке. С этой целью найдем решение системы (1.18), удовлетворяющее начальным условиям $t_0=0$, $x_0=x^*$, $y_0=y^*$, $\xi_1^0=1$, $\xi_2^0=0$, $\eta_1^0=0$, $\eta_2^0=1$. По полученным значениям строится характеристический полином и определяется тип неподвижной точки.

2.2. Аналог метода секущих.

Для решения системы (1.3) применим алгоритм, построенный на основе аналога метода секущих. Предположим, что нам известны значения функций f и g в трех точках M_1 , M_2 и M_3 : $f(M_i)$, $g(M_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Определим две линейные функции от x и y :

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1, \\ L_2 &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2, \end{aligned} \quad (1.20)$$

удовлетворяющее шести условиям: $L_1(M_i) = f(M_i)$ (1.21)
 $L_2(M_i) = g(M_i)$ ($i = 1, 2, 3$)

и разрешим относительно x и y систему уравнений

$$L_1(x, y) = 0, L_2(x, y) = 0 \quad (1.22)$$

Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – начальное приближение неподвижной точки. Точки M_2 и M_3 выберем так, чтобы три точки M_1 , M_2 и M_3 не лежали на одной прямой; для этого потребуем, чтобы выполнялись два условия: $x_3 = x_1$, $y_2 = y_1$, т.е. чтобы точки M_1 , M_2 и M_3 лежали в вершинах прямоугольного треугольника.

$$M_2 = \{x_2 = x_1 + Hx, y_2 = y_1\}, M_3 = \{x_3 = x_1, y_3 = y_1 + Hy\}$$

В качестве следующего приближения к неподвижной точке отображения T возьмем решение системы уравнений (1.22). Обозначим через $M_4(x_4, y_4)$ точку, соответствующую решению системы (1.22).

Для удобства выразим координаты x_4 , y_4 через значения $f(M_i)$, $g(M_i)$ и координаты точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Для этого исключим из уравнения (1.22) коэффициенты a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 .

Получим два уравнения:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x-x_2 & x-x_3 \\ f(x_1, y_1) & f(x_2, y_2) & f(x_3, y_3) \\ g(x_1, y_1) & g(x_2, y_2) & g(x_3, y_3) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y-y_1 & y-y_2 & y-y_3 \\ f(x_1, y_1) & f(x_2, y_2) & f(x_3, y_3) \\ g(x_1, y_1) & g(x_2, y_2) & g(x_3, y_3) \end{vmatrix} = 0$$

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(x_1, y_1) & f(x_2, y_2) & f(x_3, y_3) \\ g(x_1, y_1) & g(x_2, y_2) & g(x_3, y_3) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то решение системы (1.22) имеет следующий вид

$$x_4 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1, y_1) & f(x_2, y_2) & f(x_3, y_3) \\ g(x_1, y_1) & g(x_2, y_2) & g(x_3, y_3) \end{vmatrix}$$

$$y_4 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ f(x_1, y_1) & f(x_2, y_2) & f(x_3, y_3) \\ g(x_1, y_1) & g(x_2, y_2) & g(x_3, y_3) \end{vmatrix}$$

Условие $\Delta \neq 0$ означает, что три точки M_1 , M_2 и M_3 не лежат на одной прямой.

После того, как найдена четвертая точка $M_4(x_4, y_4)$, вычисляем $f(x_4, y_4)$ и $g(x_4, y_4)$. Если

$$|f(x_4, y_4)| + |g(x_4, y_4)| < \varepsilon, \quad (1.23)$$

где ε – заданная точность, то точку $M_4(x_4, y_4)$ будем считать неподвижной точкой.

Если это условие не выполняется, то из точек M_1 , M_2 , M_3 отбрасываем ту, для которой значения величины $\Sigma = |f| + |g|$ наибольшее, а для оставшихся двух точек и точки M_4 вычисления повторяются. Итерационный процесс поиска неподвижной точки продолжается до тех пор, пока либо не выполнится условие (1.23), либо число итераций не станет равным k .

2.3. Метод последовательных приближений.

Метод последовательных приближений позволяет находить устойчивые неподвижные точки при движении в прямом времени, а также неустойчивые – при движении в обратном времени.

Для нахождения неподвижной точки методом последовательных приближений по начальному приближению (x_0, y_0) последовательно

применяем оператор T точечного отображения секущей плоскости в себя вида (1.2). Тогда i -ое приближение неподвижной точки определяется формулами:

$$(x_i, y_i) = T^i(x_0, y_0), \quad i=1, 2, \dots, k \quad (1.24)$$

Таким образом находим последовательность точек $\{M_k(x_k, y_k)\}$, которые являются приближениями искомой неподвижной точки M^* .

Итерационный процесс заканчивается, если выполнено условие

$$|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}| < \varepsilon \quad (1.25)$$

где ε – заданное малое положительное число. При этом точку $M_k(x_k, y_k)$ будем считать неподвижной точкой отображения T .

3. Определение характера устойчивости неподвижных точек.

Вопрос об определении характера устойчивости неподвижных точек, соответствующих периодическим движениям динамических системы, описываемых дифференциальными уравнениями, сводится к отысканию корней характеристического полинома (мультипликаторов). Известно, что если все корни уравнения по модулю меньше единицы, то периодическое движение устойчиво. Если все корни уравнения по модулю больше единицы, то соответствующая неподвижная точка является неустойчивой. Если q корней по модулю больше единицы, а p корней по модулю меньше единицы, то периодическое движение является седловым.

Для нелинейных динамических систем получение явных выражений для решений является затруднительным или вообще невозможным. Интегрирование таких систем осуществляется с помощью численных методов, которые позволяют получить значения искомых переменных в определенные моменты времени. В связи с этим возникает задача построения характеристического полинома и определение его корней для периодических движений нелинейных динамических систем, полученных путем численного интегрирования.

Рассмотрим неавтономную динамическую систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(t, x, y) \\ \dot{y} = Q(t, x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

правые части которой есть непрерывные периодические функции переменного t периода 2π , имеющие непрерывные частные производные

по переменным x и y . Обозначим через Γ периодическое решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ периода 2π , соответствующее неподвижной точке $M_0(x_0, y_0)$ точечного преобразования плоскости $t = 0$ в себя, порождаемое фазовыми траекториями этой системы.

Линеаризуем систему (2.1) в окрестности периодического решения Γ и запишем уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (\partial P / \partial x)|_{\Gamma} \xi + (\partial P / \partial y)|_{\Gamma} \eta \\ \dot{\eta} &= (\partial Q / \partial x)|_{\Gamma} \xi + (\partial Q / \partial y)|_{\Gamma} \eta\end{aligned}\quad (2.2)$$

Здесь частные производные $\partial P / \partial x$, $\partial P / \partial y$, $\partial Q / \partial x$, $\partial Q / \partial y$ вычисляются при $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Поскольку функции P и Q периодические и Γ соответствует периодическому решению, то и эти функции являются периодическими периода τ , а система (2.2) является линейной с периодическими коэффициентами.

Пусть

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) & \xi_2(t) \\ \eta_1(t) & \eta_2(t) \end{pmatrix}$$

фундаментальная матрица системы (2.2), нормированная в точке $t=0$ (матрица монодромии), так что $Z(0) = E$. Вычислим $Z(t)$ при $t = \tau$. Характеристическое уравнение для периодического решения Γ запишется в виде

$$|Z(\tau) - \rho E| = \begin{vmatrix} \xi_1(\tau) - \rho & \xi_2(\tau) \\ \eta_1(\tau) & \eta_2(\tau) - \rho \end{vmatrix} = 0$$

Из уравнения $\rho^2 - \sigma\rho + \Delta = 0$, (2.3)

где $\sigma = \xi_1(\tau) + \eta_2(\tau)$, $\Delta = \xi_1(\tau)\eta_2(\tau) - \xi_2(\tau)\eta_1(\tau)$

находятся корни ρ_1 и ρ_2 (мультипликаторы), определяющие устойчивость периодического решения Γ .

Как следует из изложенного, значения ρ_1 и ρ_2 можно найти, если найдем линейно независимые решения $\xi = \xi_1(t)$, $\eta = \eta_1(t)$ и $\xi = \xi_2(t)$, $\eta = \eta_2(t)$ задачи Коши для системы (2.2), удовлетворяющие начальным условиям $\xi_1(0)=1$, $\eta_1(0)=0$, $\xi_2(0)=0$, $\eta_2(0)=1$. Для системы (2.2) решения не могут быть записаны в явном виде, поскольку коэффициенты $\partial P / \partial x$, $\partial P / \partial y$, $\partial Q / \partial x$, $\partial Q / \partial y$ и есть функции решения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, которое может быть найдено лишь с помощью численных методов.

Для поиска значения $Z(\tau)$ используем численный метод интегрирования Рунге-Кутты с шагом $h = \tau/N$, где N – заданное целое число. На каждом шаге интегрирования выполним следующие операции.

По точке $M_k(t_k, x_k, y_k)$ найдем точку $M_{k+1}(t_{k+1}, x_{k+1}, y_{k+1})$ согласно формул

$$\begin{aligned}
t_{k+1} &= t_k + h \\
x_{k+1} &= x_k + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\
y_{k+1} &= y_k + (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
k_1 &= h P(t_k, x_k, y_k) \\
l_1 &= h Q(t_k, x_k, y_k) \\
k_2 &= h P(t_k + h/2, x_k + k_1/2, y_k + l_1/2) \\
l_2 &= h Q(t_k + h/2, x_k + k_1/2, y_k + l_1/2) \\
k_3 &= h P(t_k + h/2, x_k + k_2/2, y_k + l_2/2) \\
l_3 &= h Q(t_k + h/2, x_k + k_2/2, y_k + l_2/2) \\
k_4 &= h P(t_k + h, x_k + k_3, y_k + l_3) \\
l_4 &= h Q(t_k + h, x_k + k_3, y_k + l_3)
\end{aligned}$$

При $k = 0$ величина $t_0 = 0$, а значения x_0, y_0 соответствуют координатам заданной неподвижной точки отображения плоскости в себя.

Вычислим значения частных производных от правых частей системы (2.1) в т. $M_k(t_k, x_k, y_k)$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t_k, x_k, y_k), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(t_k, x_k, y_k), \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(t_k, x_k, y_k), \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(t_k, x_k, y_k)$$

По точке $N_k(t_k, \xi_{1k}, \eta_{1k})$ найдем точку $N_{k+1}(t_{k+1}, \xi_{1k+1}, \eta_{1k+1})$ согласно формул

$$\begin{aligned}
t_{k+1} &= t_k + h \\
\xi_{1k+1} &= \xi_{1k} + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\
\eta_{1k+1} &= \eta_{1k} + (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \left[\frac{\partial P}{\partial x}(t_k, x_k, y_k) \xi_{1k} + \frac{\partial P}{\partial y}(t_k, x_k, y_k) \eta_{1k} \right] \\
l_1 &= h \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(t_k, x_k, y_k) \xi_{1k} + \frac{\partial Q}{\partial y}(t_k, x_k, y_k) \eta_{1k} \right] \\
k_2 &= h \left[\frac{\partial P}{\partial x}(t_k, x_k, y_k) (\xi_{1k} + k_1/2) + \frac{\partial P}{\partial y}(t_k, x_k, y_k) (\eta_{1k} + l_1/2) \right] \\
l_2 &= h \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(t_k, x_k, y_k) (\xi_{1k} + k_1/2) + \frac{\partial Q}{\partial y}(t_k, x_k, y_k) (\eta_{1k} + l_1/2) \right] \\
k_3 &= h \left[\frac{\partial P}{\partial x}(t_k, x_k, y_k) (\xi_{1k} + k_2/2) + \frac{\partial P}{\partial y}(t_k, x_k, y_k) (\eta_{1k} + l_2/2) \right] \\
l_3 &= h \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(t_k, x_k, y_k) (\xi_{1k} + k_2/2) + \frac{\partial Q}{\partial y}(t_k, x_k, y_k) (\eta_{1k} + l_2/2) \right] \\
k_4 &= h \left[\frac{\partial P}{\partial x}(t_k, x_k, y_k) (\xi_{1k} + k_3) + \frac{\partial P}{\partial y}(t_k, x_k, y_k) (\eta_{1k} + l_3) \right] \\
l_4 &= h \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(t_k, x_k, y_k) (\xi_{1k} + k_3) + \frac{\partial Q}{\partial y}(t_k, x_k, y_k) (\eta_{1k} + l_3) \right]
\end{aligned}$$

При $k = 0$ $t_0 = 0$, $\xi_{10} = 1$, $\eta_{10} = 0$.

По точке $L_k (t_k, \xi_{2k}, \eta_{2k})$ найдем точку $L_{k+1} (t_{k+1}, \xi_{2k+1}, \eta_{2k+1})$ согласно формул (2.4), в которых переменные ξ_1 и η_1 заменены на ξ_2 и η_2 соответственно. При $k = 0$ $t_0 = 0$, $\xi_{20} = 0$, $\eta_{20} = 1$.

В результате последовательного выполнения этих операций N раз получим значения $\xi_1(\tau)$, $\eta_1(\tau)$, $\xi_2(\tau)$, $\eta_2(\tau)$. Подставляя их в уравнение (2.3) найдем корни ρ_1 и ρ_2 по формулам

$$\rho_1 = \sigma/2 + \sqrt{\sigma^2/4 - \Delta}, \quad \rho_2 = \sigma/2 - \sqrt{\sigma^2/4 - \Delta},$$

которые определяют тип неподвижной точки M^* . Если они лежат внутри круга единичного радиуса ($|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| < 1$), то точка M^* является асимптотически устойчивой в малом (тип неподвижной точки – сток). Если оба корня расположены вне круга ($|\rho_1| > 1$, $|\rho_2| > 1$), то точка неустойчива (источник). Точка M^* имеет седловой тип, если корни действительны и удовлетворяют неравенствам $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| > 1$. Случай, когда один из них или оба корня лежат на границе круга $|\rho| = 1$, является бифуркационным.

4. Построение инвариантных кривых седловых неподвижных точек.

Для многих динамических систем вида (1.1) точечное отображение T плоскости $t=0$ в себя, порождаемое фазовыми траекториями, не может быть задано в явном виде, но для большинства из них можно указать некоторый вычислительный процесс, позволяющий по точке (x, y) найти точку (\bar{x}, \bar{y}) , так что $(\bar{x}, \bar{y}) = T(x, y)$. В силу этого будем считать заданным оператор T точечного отображения плоскости $t=0$ в себя и оператор T^{-1} обратного преобразования, для которого $(x, y) = T^{-1}(\bar{x}, \bar{y})$.

Обозначим через $M^* (x^*, y^*)$ седловую p -кратную неподвижную точку отображения T , через ρ_1 и ρ_2 - корни ее характеристического уравнения, а через χ_1 и χ_2 - соответствующие им тангенсы углов наклона критических направлений (т.е. касательных к инвариантным кривым в точке M^*). Величины $\chi_{1,2}$ определяются из уравнения

$$\xi_2(p\tau)\chi^2 + (\xi_1(p\tau) - \eta_2(p\tau))\chi - \eta_1(p\tau) = 0,$$

где $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ – элементы фундаментальной матрицы $Z(t)$ системы уравнений в вариациях (2.2), вычисленных при $t = p\tau$ (напомним, что τ - период системы (1.1) по переменной t). Значения $\chi_{1,2}$ связаны со значениями $\rho_{1,2}$ соотношением $\chi_{1,2} = (\rho_{1,2} - \xi_1(p\tau)) / \xi_2(p\tau)$ (если $\xi_2(p\tau) \neq 0$).

Присвоим инвариантным кривым точки M^* индекс $k = 1, 2, 3, 4$ в порядке встречаемости их в окрестности точки M^* при обходе ее против

часовой стрелки от горизонтальной полупрямой $y = y^*$, $x > x^*$. Заметим, что инвариантным кривым с индексом, отличающимся на 2, соответствует одно и то же значение мультипликатора и одно и то же критическое направление (т.е. $S_1, S_3 \sim \rho_1, \chi_1$; $S_2, S_4 \sim \rho_2, \chi_2$).

Для построения инвариантной кривой S_k выберем оператор

$$A = \begin{cases} T^p, & \text{если } \rho_k > 1 \\ (T^{-1})^p, & \text{если } 0 < \rho_k < 1 \\ (T^{-1})^{2p}, & \text{если } -1 < \rho_k < 0 \\ T^{2p}, & \text{если } \rho_k < -1 \end{cases}$$

являющийся растягивающим в окрестности неподвижной точки M^* . Отметим, что в случае $\rho_k < 0$ операторы T^p и $(T^{-1})^p$ осуществляют вращение на угол π и при их применении получается точка на инвариантной кривой S_{k^-} ,

$$\text{где } k^- = \begin{cases} k+2, & \text{если } k+2 \leq 4 \\ k+2-4, & \text{если } k+2 > 4. \end{cases}$$

Построение кривой S_k осуществляется в два этапа. Сначала на критическом направлении χ_k , соответствующем кривой S_k , выбирается точка M_0^0 и строится начальный отрезок $[M_0^0, M_0^1]$, соединяющий точки M_0^0 и $M_0^1 = AM_0^0$. Затем начальный отрезок делится на m частей и к каждой точке деления применяется n раз оператор A .

Начальная точка выбирается из условия: расстояние

$$r(M_0^0, M_0^1) < d_m \quad (2.5)$$

Здесь d_m - максимальная длина начального отрезка, задаваемого пользователем ($d_m \leq 0.05$). Координаты точки M_0^0 для значений $\alpha_k \neq \pm \pi/2$ ($\text{tg } \alpha_k = \chi_k \leq 9999$) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} x_0^0 &= x^* + c_1 d_0 \\ y_0^0 &= y^* + \chi_k c_1 d_0, \end{aligned}$$

где d_0 - задаваемая пользователем величина начального смещения от неподвижной точки, $c_1 = +1$, если кривая S_k лежит справа от точки M^* , и $c_1 = -1$, если - слева. При $\alpha_k = \pm \pi/2$ ($\text{tg } \alpha_k = \chi_k > 9999$) имеем

$$\begin{aligned} x_0^0 &= x^*, \\ y_0^0 &= y^* + c_2 d_0, \end{aligned}$$

причем $c_2 = +1$, если кривая S_k лежит выше точки M^* , и $c_2 = -1$, если - ниже.

В случае невыполнения условия (2.5) вместо d_0 берется $d_0/2$ и процесс поиска точки M_0^0 повторяется, но не более l_d раз. Величина l_d максимального числа делений начального смещения при поиске начального отрезка также задается пользователем ($l_d \leq 20$).

Если за $l \leq l_d$ шагов точку M_0^0 , удовлетворяющую условию (2.5), найти не удается, то работа алгоритма прекращается. Необходимо уточнить координаты неподвижной точки M^* .

Заметим, что величина d_0 влияет на точность построения инвариантной кривой S_k . Чем меньше d_0 , тем точнее представление дуги M_0^0, M_0^1 инвариантной кривой отрезком $[M_0^0, M_0^1]$ касательной. При этом величина d_0 выбирается в зависимости от коэффициента растяжения оператора A вдоль выбранного критического направления χ_k в окрестности точки M^* : чем сильнее растяжение (больше величина $|\rho_k|$ для $|\rho_k| > 1$ или $1/|\rho_k|$ для $|\rho_k| < 1$), тем меньше должно быть значение d_0 . Для структурно устойчивых динамических систем с гладкими инвариантными кривыми величину d_0 допустимо выбрать порядка 10^{-3} . Для систем, значения параметров которых близки к бифуркационным (система не является структурно устойчивой), значение d_0 должно быть выбрано значительно меньшим.

При выполнении условия (2.5) начальный отрезок $[M_0^0, M_0^1]$ делится на m частей и к каждой точке $M_j^0 (x_j^0, y_j^0)$ ($j=0,1,\dots,m-1$) с координатами

$$x_j^0 = x_0^0 + j \frac{x_0^1 - x_0^0}{m}, y_j^0 = y_0^0 + j \frac{y_0^1 - y_0^0}{m}$$

применяется n раз оператор A .

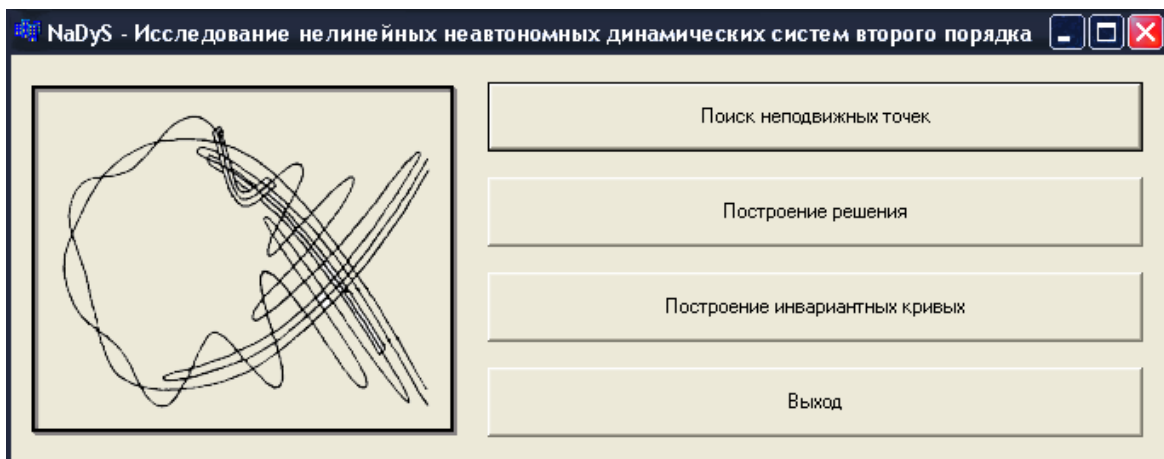
Таким образом, на инвариантной кривой S_k строится последовательность точек $\{M_j^i\}$, ($j=0,1,\dots,m-1$), ($i=0,1,\dots,n$). Здесь j обозначает номер точки на начальном отрезке, i – число применений оператора A к этой точке. При этом дуга M_0^0, M_0^1 переходит в дугу M_0^1, M_0^2 , дуга M_0^1, M_0^2 – в дугу M_0^2, M_0^3 и т.д., дуга M_0^{n-2}, M_0^{n-1} преобразуется в дугу M_0^{n-1}, M_0^n . Число n определяет длину инвариантной кривой S_k . Увеличив n , можно продолжить ее построение.

Поскольку оператор A является растягивающим в окрестности седловой неподвижной точки M^* , то длины получаемых дуг M_0^i, M_0^{i+1} могут оказаться большими. Увеличив число m , можно продолжить деление начального отрезка $[M_0^0, M_0^1]$ и, построив итерационные последовательности для каждой из дополнительных точек, уточнить построение инвариантной кривой S_k .

II. Руководство пользователя программного комплекса NaDyS.

1. Структура и описание программного комплекса.

Программный комплекс NaDyS позволяет проводить качественно-численное исследование нелинейных динамических систем второго порядка, описываемых системами дифференциальных уравнений, зависящих от параметров. Установка программного комплекса не требует дополнительных действий, кроме непосредственного запуска исполняемого файла NaDyS.exe. После запуска появится главное окно комплекса:



В этом окне располагаются кнопки запуска соответствующих модулей программного комплекса:

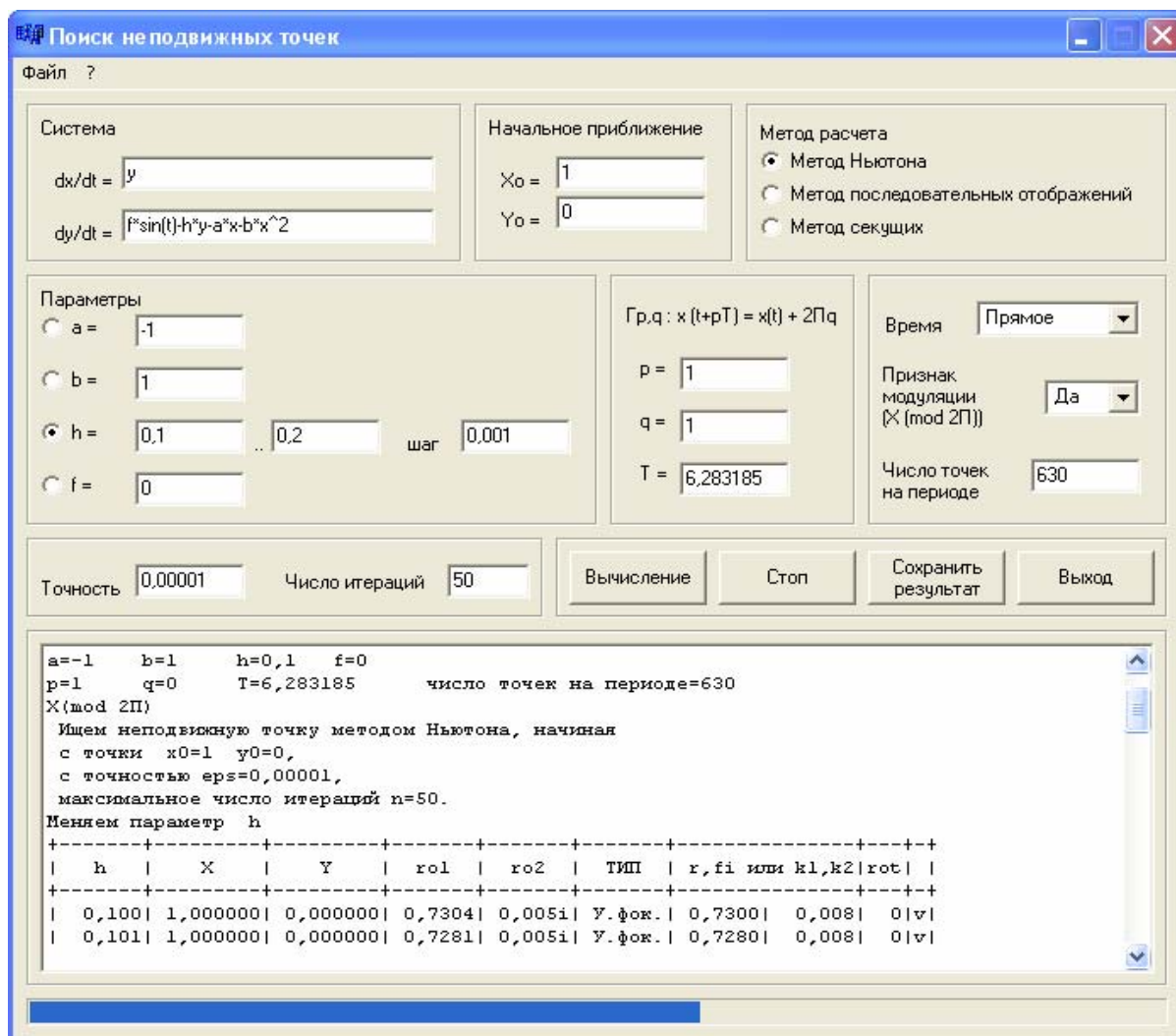
- Поиск неподвижных точек
- Построение решения
- Построение инвариантных кривых

2. Модуль “Поиск неподвижных точек”.

Модуль “Поиск неподвижных точек” предназначен для отыскания координат неподвижных точек системы вида

$$\begin{cases} dx/dt = P(t, x, y, a, b, h, f) \\ dy/dt = Q(t, x, y, a, b, h, f), \end{cases}$$

при изменении одного (называемого активным) параметра с заданным шагом (остальные параметры при этом имеют постоянные значения).



Опишем каждый элемент окна подробнее.

Ниже заголовка окна располагается меню, содержащее следующие пункты:

Файл→Новая система:

Убирает значения всех полей ввода, кроме точности, числа итераций и периода T.

Файл→Сохранить систему:

Вызывает стандартный диалог сохранения файла. Сохраняет на диске в указанный пользователем файл правые части системы, значения параметров, пределы и шаг изменения активного параметра, начальное приближение, точность вычисления, значение признака модуляции, период T, значения r и q.

Файл→Загрузить систему:

Вызывает стандартный диалог загрузки файла. Загружает из файла правые части системы, значения параметров, пределы и шаг

изменения активного параметра, начальное приближение, точность вычисления, значение признака модуляции, период T , значения p и q .

Файл→Сохранить результат:

Вызывает стандартный диалог сохранения файла. Сохраняет в указанный пользователем файл результаты расчетов.

Файл→Выход:

Выход из программы.

?:

Показывает правила построения правых частей системы.

Инициализация программного модуля состоит в задании правых частей системы, начального приближения неподвижной точки, точности ее отыскания и задании длины итерационной последовательности, задании изменения активного параметра в некоторой области с постоянным шагом, т.е. для этого параметра задаются начальное значение, конечное значение и шаг по параметру. Поиск координат неподвижной точки может осуществляться методом Ньютона, методом последовательных отображений и методом секущих.

Правые части системы задаются выражениями, строящимися по определенным правилам. Разрешено использовать:

- переменные x , y , t
- параметры a , b , h , f
- операции
 - « + » – сложение
 - « - » – вычитание
 - « * » – умножение
 - « / » – деление
 - « ^ » – возведение в степень
- круглые скобки
- функции: $\sin()$, $\cos()$, $\operatorname{tg}()$, $\operatorname{ctg}()$, $\exp()$, $\operatorname{sh}()$, $\operatorname{ch}()$, $\operatorname{th}()$, $\operatorname{cth}()$, $\operatorname{sqr}()$, $\operatorname{sqrt}()$, $\operatorname{arcsin}()$, $\operatorname{arccos}()$, $\operatorname{arctg}()$, $\operatorname{arcctg}()$, π , $\ln()$, $\lg()$, $\operatorname{sec}()$, $\operatorname{cosec}()$, $\operatorname{sech}()$, $\operatorname{cosech}()$, $\operatorname{arcsec}()$, $\operatorname{arccosec}()$, $\operatorname{arsh}()$, $\operatorname{arch}()$, $\operatorname{arth}()$, $\operatorname{arcth}()$, $\operatorname{arsech}()$, $\operatorname{arcosech}()$.

Вычисление осуществляется после нажатия кнопки “Вычисление”. Результаты вычислений заносятся в таблицу, в которой указаны текущее значение активного параметра, координаты x , y найденной неподвижной точки, значения мультипликаторов $ro1$ и $ro2$, характер устойчивости и тип неподвижной точки, критические наклоны

k_1 и k_2 (в случае действительных мультипликаторов), модуль r и угол поворота f_i (в случае комплексных сопряженных мультипликаторов), число вращений rot , т.е. число применений модуляции $x \pmod{2\pi}$, а также признак совпадения полученного режима с заданным (v).

h	X	Y	ro1	ro2	ТИП	r,fi или k1,k2	rot	v
0,100	0,89743	-0,008	0,73	0,04i	У.фок.	0,730 0,054	0	v
0,101	0,89744	-0,008	0,72	0,04i	У.фок.	0,728 0,054	0	v

Полученные результаты можно сохранить в виде файла с расширением *.dat* нажатием кнопки “Сохранить результат”.

При больших найденных значениях координат точки (точка “ушла”) программа выдает соответствующее сообщение об ошибке: “Получены большие значения координат $x = \dots$, $y = \dots$ ”. Также при счете возможно превышение заданного числа итераций, тогда программа выдает сообщение: “Счет закончен – число итераций =...”. В том случае если неподвижную точку одним из предложенных методов найти не удастся, имеет смысл проверить начальное приближение точки, либо сменить точность, либо воспользоваться другим (не использовавшимся) методом отыскания неподвижной точки.

3. Модуль “Построение решения”.

Модуль “Построение решения” предназначен для построения временных реализаций $x(t)$, $y(t)$ системы вида

$$\begin{cases} dx/dt = P(t, x, y, a, b, h, f) \\ dy/dt = Q(t, x, y, a, b, h, f). \end{cases}$$

Опишем каждый элемент окна подробнее.

Ниже заголовка окна располагается меню, содержащее следующие пункты:

Файл→Новая система:

Убирает значения всех полей ввода, кроме точности, числа значений выводимых в таблицу и периода T .

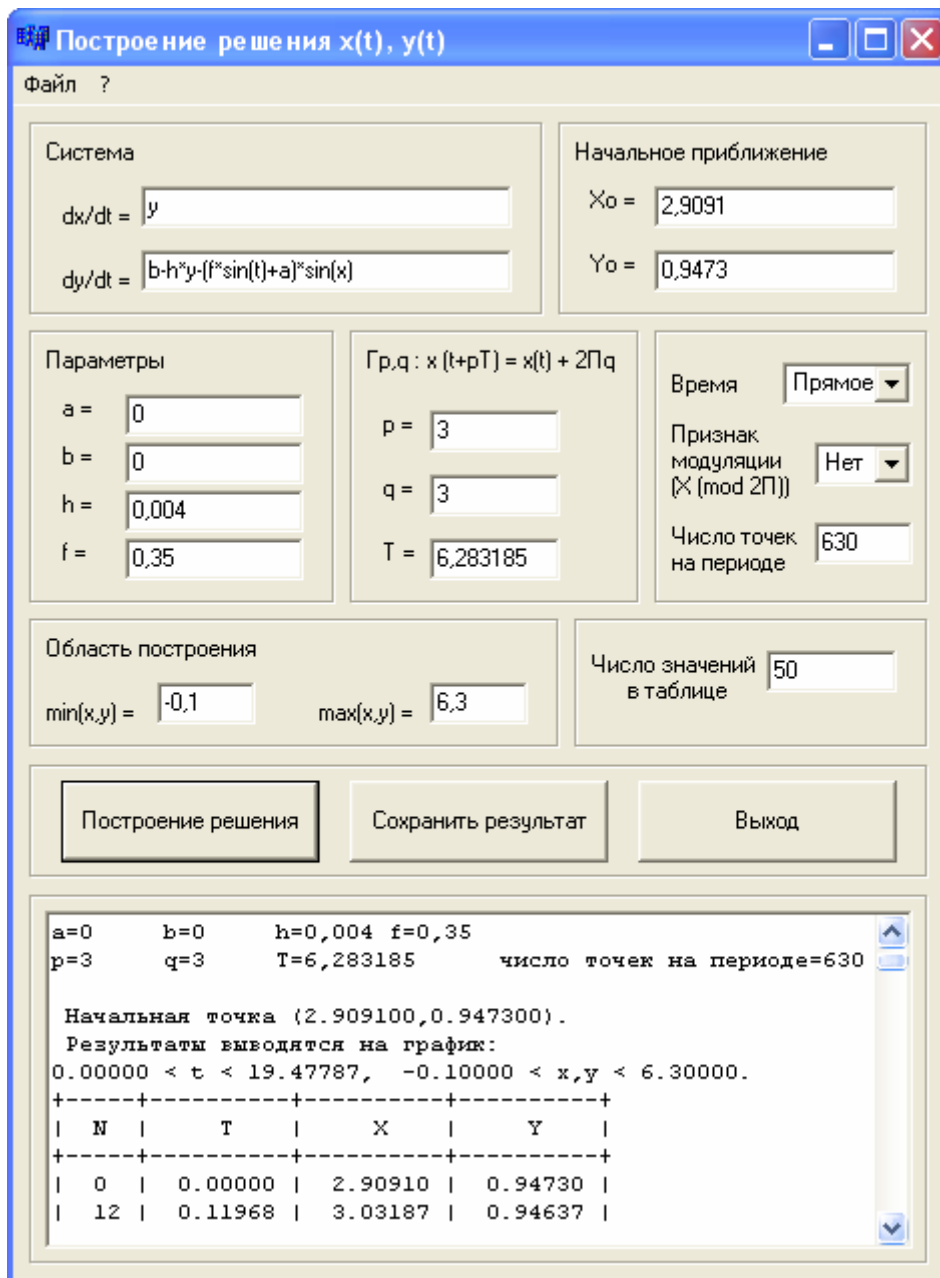
Файл→Сохранить систему:

Вызывает стандартный диалог сохранения файла. Сохраняет на диске в указанный пользователем файл правые части системы, значения параметров, начальное приближение, минимальное и максимальное

значения x и y , значение признака модуляции, период T , значения p и q , число значений, выводимых в таблицу.

Файл→Загрузить систему:

Вызывает стандартный диалог загрузки файла. Загружает из файла правые части системы, значения параметров, начальное приближение, минимальное и максимальное значения x и y , значение признака модуляции, период T , значения p и q , число значений, выводимых в таблицу.



Файл→Сохранить результат:

Вызывает стандартный диалог сохранения файла. Сохраняет в

указанный пользователем файл результаты расчетов.

Файл→Выход:

Выход из программы.

?:

Показывает правила построения правых частей системы.

Инициализация программного модуля состоит в задании правых частей системы, начального приближения, значений параметров, минимального и максимального значений x и y . После нажатия кнопки “Построение решения” осуществляется построение реализации $x(t)$, $y(t)$, которое отображается в виде появления соответствующего графического изображения в новом окне. Информация о построении заносится в таблицу, в которой указаны номер N итерации, соответствующее значение времени T и координаты точек x , y .

N	T	X	Y
0	0.00000	2.90910	0.94730
12	0.11968	3.03187	0.94637

Полученные результаты можно сохранить в виде файла с расширением **.dat* нажатием кнопки “Сохранить результат”.

4. Модуль “Построение инвариантных кривых”.

Модуль “Построение инвариантных кривых” реализует построение инвариантных кривых седловых неподвижных точек системы вида

$$\begin{cases} dx/dt = P(t, x, y, a, b, h, f) \\ dy/dt = Q(t, x, y, a, b, h, f), \end{cases}$$

Он использует линейное приближение инвариантной кривой в окрестности неподвижной точки и путем последовательного применения прямого и обратного отображений находит последовательность точек на кривой, лежащих на расстоянии, не превышающем некоторую заданную величину.

Опишем каждый элемент окна подробнее.

Ниже заголовка окна располагается меню, содержащее следующие пункты:

Файл→Новая система:

Убирает значения всех полей ввода, кроме значений параметров построения, значения периода T . Количество седловых точек устанавливается равным 1, цвета кривых устанавливаются равными значениям по умолчанию.

Построение инвариантных кривых

Файл ?

Система

$dx/dt = y$

$dy/dt = b \cdot h \cdot y - (f \cdot \sin t + a) \cdot \sin x$

Область построения

$-2 < x < 6,3$

$-2 < y < 2$

Параметры

$a = 0,01$

$b = 0,02$

$h = 0$

$f = 0,35$

Гр, q : $x(t+pT) = x(t) + 2\pi q$

$p = 1$

$q = 1$

$T = 6,283185$

Время

Признак модуляции (X (mod 2П))

Число точек на периоде

Параметры построения

отход от точки =

max расстояние до точки =

max число итераций =

число точек на отрезке =

число отображений на шаге =

Седловые точки

Число точек

Другие неподвижные точки

Число точек

максимальное расстояние от ее отображения до точки 0,10000
максимальное число итераций 20
число точек на начальном отрезке 20
число отображений на одном шаге 3
Инвариантные кривые неподвижной точки 1 (1,383, 0,332)
Мультипликаторы:
ro1= 4,226, ro2= 0,237
направления соответствующих кривых:
tg1= 5,685, tg2= -3,708

Файл→Сохранить систему:

Вызывает стандартный диалог сохранения файла. Сохраняет на

диске в указанный пользователем файл правые части системы; значения параметров системы и параметров построения; начальные и конечные значения отрезков для построения координатных осей x и y ; количество, координаты и цвета седловых точек; количество и координаты неподвижных точек; значение признака модуляции, период T , значения p и q .

Файл→Загрузить систему:

Вызывает стандартный диалог загрузки файла. Загружает из файла правые части системы; значения параметров системы и параметров построения; начальные и конечные значения отрезков для построения координатных осей x и y ; количество, координаты и цвета седловых точек; количество и координаты неподвижных точек; значение признака модуляции, период T , значения p и q .

Файл→Сохранить результат:

Вызывает стандартный диалог сохранения файла. Сохраняет в указанный пользователем файл результаты расчетов.

Файл→Выход:

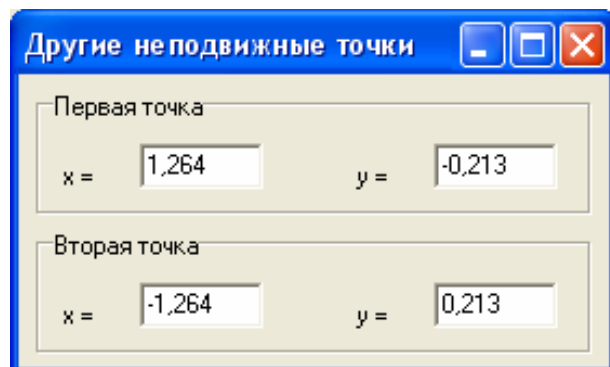
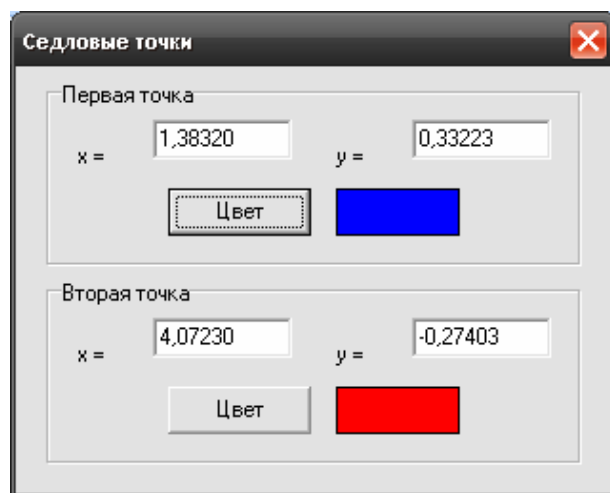
Выход из программы.

?:

Показывает правила построения правых частей системы.

Инициализация модуля состоит в задании правых частей системы, параметров системы, параметров построения, координат седловых неподвижных точек, размеров областей изображения и цвета кривой (в программе допускается одновременное построение инвариантных кривых не более шести седловых точек).

Параметрами счета являются отход от точки на начальном отрезке, максимальное расстояние от ее отображения до точки, максимальное число итераций точек начального отрезка, число точек на начальном отрезке и число точек на одном шаге.



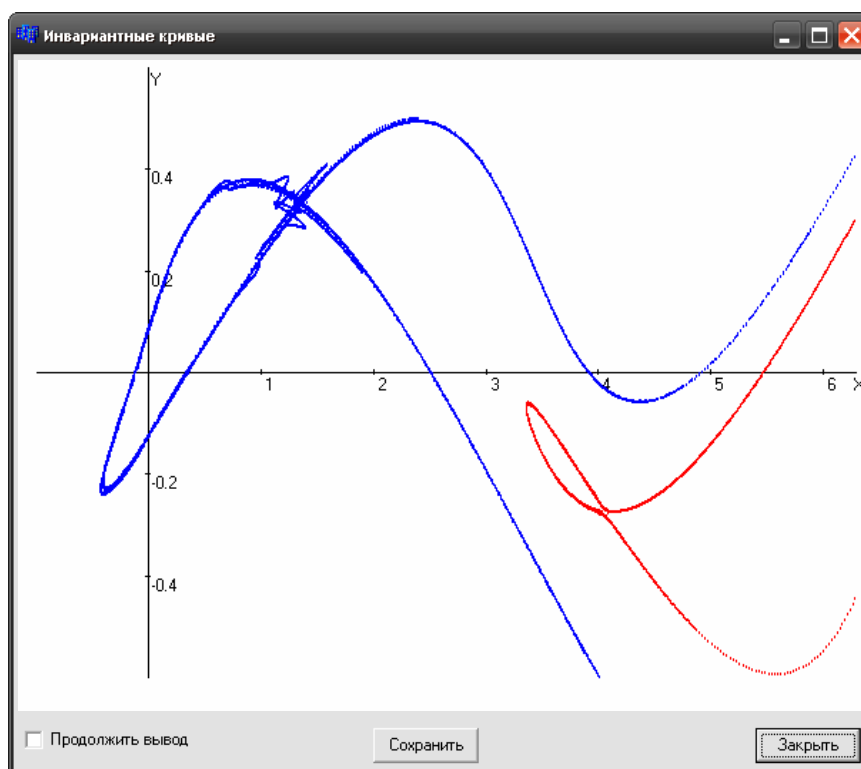
Задание графических областей изображений осуществляется с помощью начальных и конечных значений для построения координатных осей x и y . После нажатия кнопки “Построение кривых” осуществляются итерации начального отрезка по указанным направлениям, которое отображается в появлении соответствующего графического изображения в новом окне, а также в выводе информации о построении каждой кривой в виде таблицы, в которой указаны номер K полученной точки на кривой, число N повторного применения отображения к начальному отрезку и координаты точек x , y на кривых.

K	N	X	Y
6	0	1,48	0,36
7	0	1,49	0,36

Информацию о построении кривых можно сохранить нажатием кнопки “Сохранить результат” в виде файла с расширением **.dat*.

Если на том же графике необходимо построить инвариантные кривые других седловых точек, необходимо поставить галочку «Продолжить вывод» и ввести новые данные.

Построенные кривые можно сохранить. Для этого нужно нажать кнопку «Сохранить». При этом будет вызван стандартный диалог сохранения картинки.

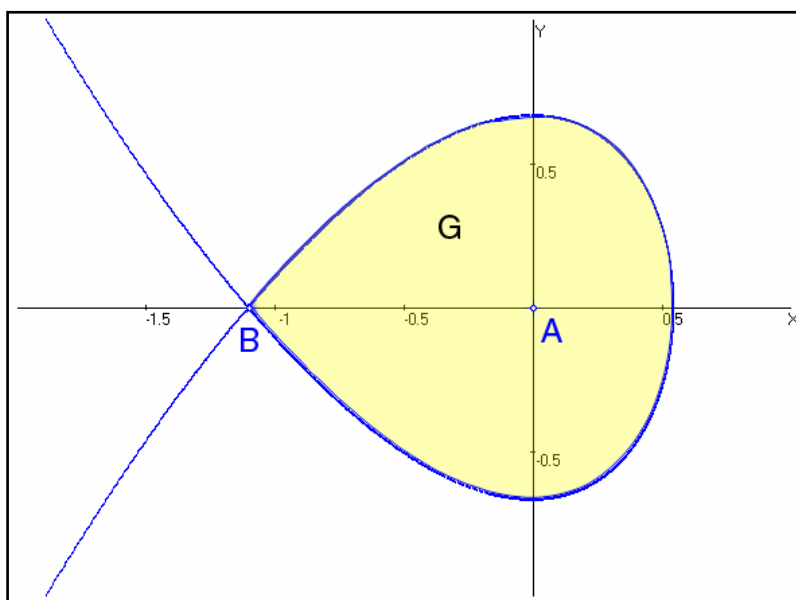


III. Примеры.

1. Уравнение осциллятора с квадратичной нелинейностью.

Уравнение имеет вид $\ddot{x} + h \dot{x} + a x + b x^2 = f \cos(t)$

В гамильтоновом случае ($h=0$) при отсутствии внешнего воздействия ($f=0$) фазовый портрет имеет вид



$$a = 1.1, b = 1, h = 0, f = 0$$

2 неподвижные точки: A (0, 0) – центр, B (-1.1, 0) – седло.

Сепаратрисные инвариантные кривые седловой неподвижной точки B $(-a/b, 0)$, образующие петлю, ограничивают область G колебательного типа, которая заполнена замкнутыми инвариантными кривыми, охватывающими эллиптическую точку A (0, 0), среди которых есть резонансные и нерезонансные кривые. При малых f в окрестности резонансных уровней энергии возникают периодические решения $\Gamma_{p,q}$ периода $T = 2\pi r$ (q – число колебаний за период) при бифуркационном значении параметра $a^* = (q/p)^2$.

Фиксируя параметры $a=1.1, b=1, h=0$, будем следить за эволюцией

периодического решения $\Gamma_{1,1}$ основного периода при изменении параметра f . При слабом внешнем воздействии (малых $f > 0$) сепаратрисные инвариантные кривые точки B “расщепляются” и возникает гомоклиническая структура. Внутри области G существуют два решения $\Gamma_{1,1}^1$ и $\Gamma_{1,1}^2$ соответствующие неподвижным точкам M – эллиптического типа, N – гиперболического типа.

$a = 1.1, b = 1, h = 0, f = 0.011$

Периодическое решение $\Gamma_{1,0}$

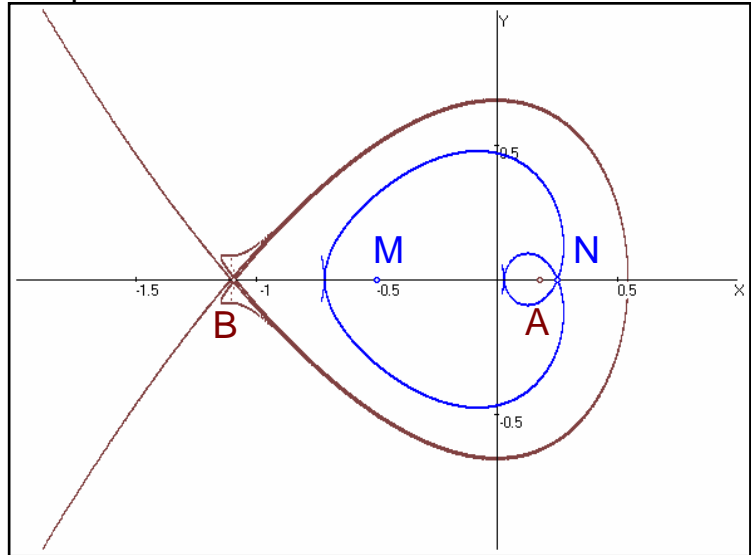
$A (0.1199, 0)$ – центр.

$B (-1.1, 0)$ – седло.

Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$

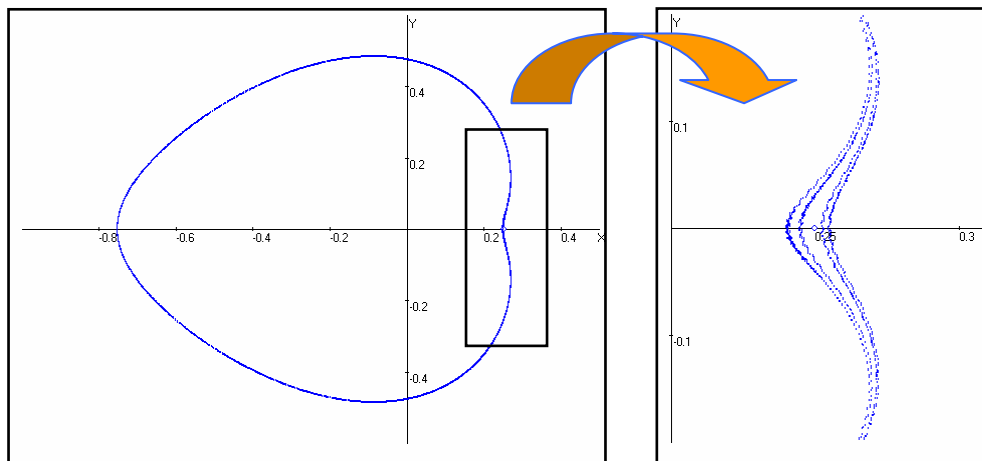
$M (-0.48372, -0.005)$ – центр.

$N (0.2397, -0.0057)$ – седло.



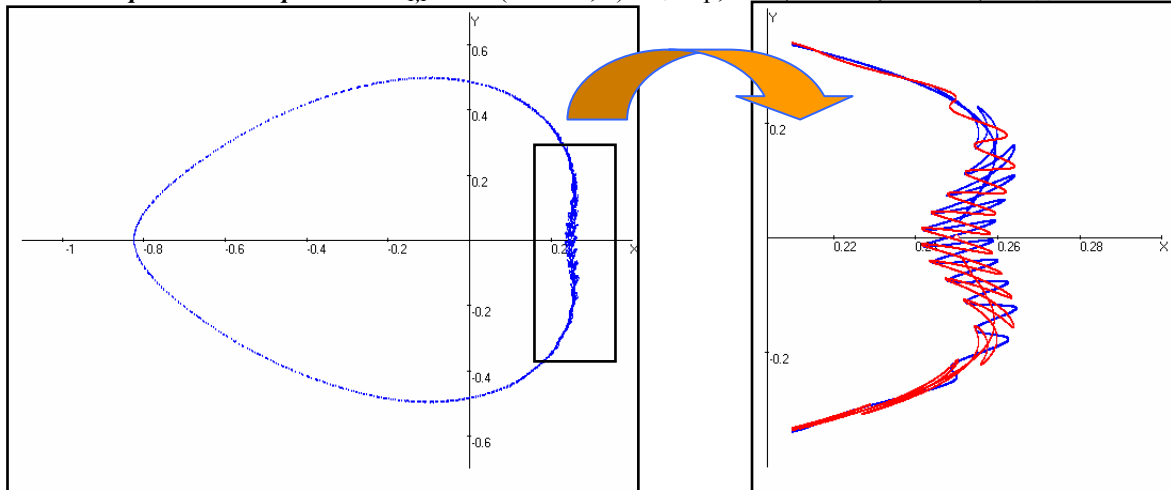
С ростом параметра f точка N стремится к основной неподвижной точке A и сливается с ней. При этом роль основной точки начинает играть точка M . В приведенной ниже таблице показано изменение координат седловой точки N при движении по параметру f .

f	X	Y	ro1	ro2	ТИП	r,fi или k1,k2	rot	
0.0100	0.23948	-0.00919	1.186	0.843	Седло	0.639 -0.690	0	v
0.0110	0.23970	-0.00552	1.184	0.844	Седло	0.637 -0.668	0	v
0.0120	0.24705	0.00010	1.191	0.840	Седло	0.554 -0.554	0	v
0.0200	0.24810	0.02973	1.167	0.857	Седло	0.532 -0.397	0	v
0.0300	0.24833	0.06704	1.126	0.888	Седло	0.478 -0.193	0	v
0.0400	0.24722	0.10461	1.048	0.954	Седло	0.333 0.083	0	v



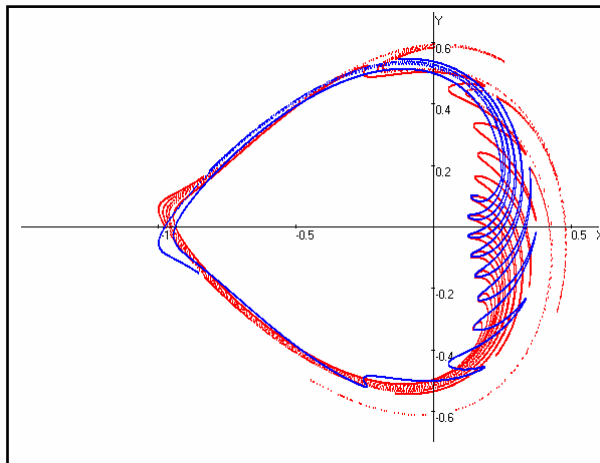
$$a = 1.1, b = 1, h = 0, f = 0.014$$

Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$: т. М (-0.4655, 0) – центр, т. N (0.24738, 0.00749) – седло.



$$a = 1.1, b = 1, h = 0, f = 0.02$$

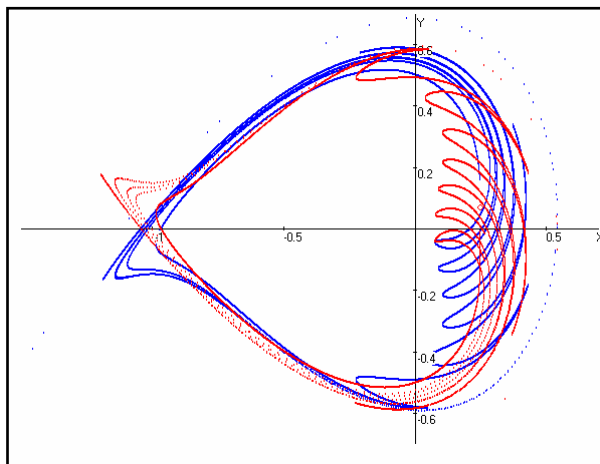
Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$: т. М (-0.48239, 0) – центр, т. N (0.24810, 0.02973) – седло.



$$a = 1.1, b = 1, h = 0, f = 0.03$$

Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$

т. М (-0.92574, 0) – центр,
т. N (0.24833, 0.06704) – седло.



$$a = 1.1, b = 1, h = 0, f = 0.033$$

Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$

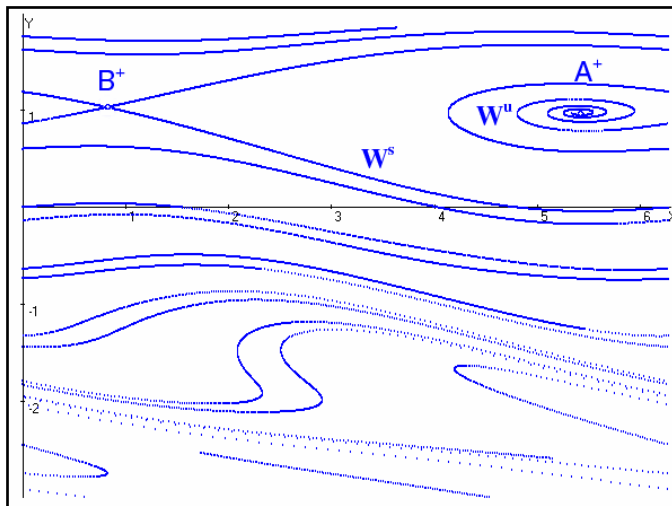
т. М (-0.95626, 0) – центр,
т. N (0.24814, 0.07828) – седло.

На вынесенных рисунках более детально показано поведение инвариантных кривых в окрестности седловой точки N при изменении параметра f .

2. Уравнение параметрически возбуждаемого ротора.

Уравнение имеет вид $\ddot{x} + h \dot{x} + (a + f \sin(t)) \sin(x) = b$

Фиксируя параметры $a=0$, $b=0.1$, $h=0.05$, будем следить за изменением фазового портрета отображения цилиндра в себя при изменении параметра f от 0 до 1.2. Первая существенная бифуркация происходит при $f = 0.11$. При этом возникает сложная неподвижная точка типа седло-узел, которая с ростом параметра f распадается на две: устойчивую A^+ и седловую B^+ , отвечающие режиму $\Gamma_{1,1}$.



$a = 0, b = 0.1, h = 0.05, f = 0.15$

Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$

A^+ (5.429, 0.972) – устойчивый фокус.

B^+ (0.829, 1.028) – седло.

$p=1$ $q=1$ $T=6,283185$

$X(\text{mod } 2\pi)$ число точек на периоде = 630

При построении начального отрезка:

отход от точки = 0,00300

максимальное расстояние

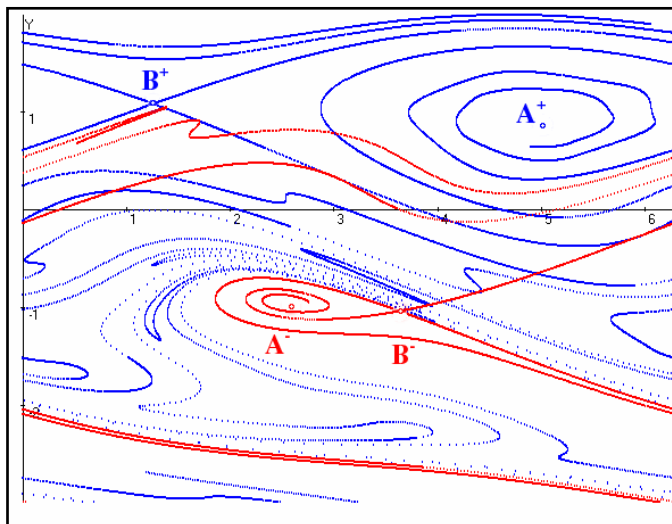
от ее отображения до точки = 0,18000

максимальное число итераций = 20

число точек на начальном отрезке = 20

число отображений на одном шаге = 3

При $f = 0,301$ рождаются еще две неподвижные точки: устойчивая A^- и седловая B^- , отвечающие режиму $\Gamma_{1,-1}$.



$a = 0, b = 0.1, h = 0.05, f = 0.35$

Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$

A^+ (4.988, 0.914) – устойчивый фокус.

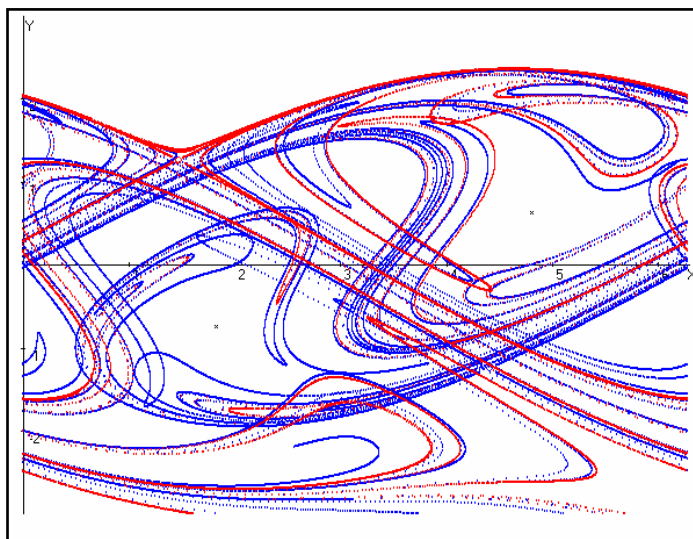
B^+ (1.269, 1.081) – седло.

Периодическое решение $\Gamma_{1,-1}$

A^- (2.565, -0.952) – устойчивый фокус.

B^- (3.643, -1.042) – седло.

С дальнейшим ростом параметра f возникают сначала касания, а затем и пересечения инвариантных многообразий не только различных седловых неподвижных точек, но и одних и тех же. Происходит возникновение гомоклинических структур, содержащих циклы.



$$a = 0, b = 0.1, h = 0.05, f = 1.15$$

Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$

A^+ (4.779, 0.681) – устойчивый фокус.

B^+ (1.476, 1.259) – седло.

Периодическое решение $\Gamma_{1,-1}$

A^- (1.801, -0.689) – устойчивый фокус.

B^- (4.409, -1.248) – седло.

В случае $h = 0$ в окрестности неподвижных точек A^+ и A^- с увеличением параметра f при переходе мультипликаторов через значение $e^{i\varphi}$, где $\varphi = 4\pi/5$, возникают вторичные резонансы $\Gamma_{5,5}$ ($p=5, q=5$), а в случае $\varphi = 2\pi/3$ – $\Gamma_{3,3}$ ($p=3, q=3$).

$$a = 0, b = 0, h = 0, f = 0.35$$

Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$

A_1 (4.71238, 0.90955) – центр.

B_1 (1.57079, 1.08470) – седло.

Периодическое решение $\Gamma_{3,3}$

A_{11} {(4.71238, 1.59919), (0.01232, 0.74707), (3.12925, 0.74708)} – центр.

A_{12} {(4.71238, 0.18608), (3.12575, 1.28044), (0.01583, 1.28044)} – центр.

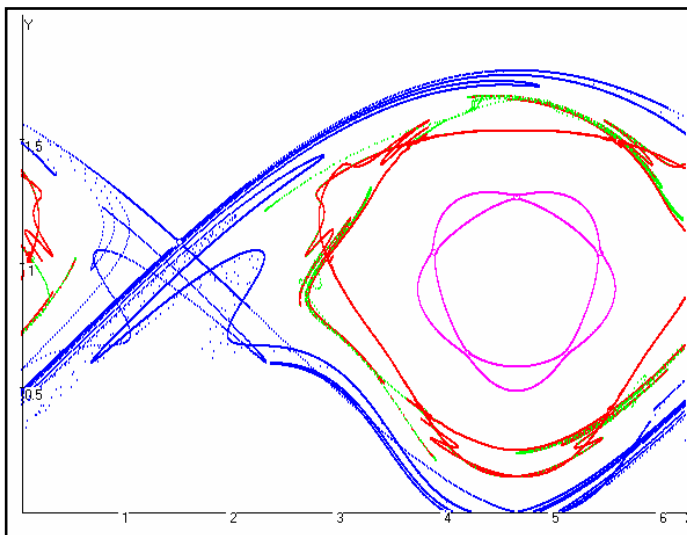
B_{11} {(5.6500, 1.4910), (5.5790, 0.4010), (2.95181, 1.01905)} – седло.

B_{12} {(3.84550, 0.40093), (3.77500, 1.49100), (0.18978, 1.01905)} – седло.

Периодическое решение $\Gamma_{5,5}$

A_{13} {(4.72138, 0.53080), (5.50340, 0.83609), (3.92140, 0.83609), (5.21060, 1.21380), (4.71240, 0.53080)} – центр.

B_{13} {(4.71238, 1.26501), (3.94360, 1.04320), (5.48120, 1.04320), (4.25190, 0.636520), (4.71240, 1.26500)} – седло.



Рост диссипации приводит к исчезновению вторичных резонансов.

$a = 0, b = 0, h = 0.004, f = 0.35$

Периодическое решение $\Gamma_{1,1}$

$A_1 (4.69041, 0.90957)$ – устойчивый фокус.

$B_1 (1.59475, 1.08467)$ – седло.

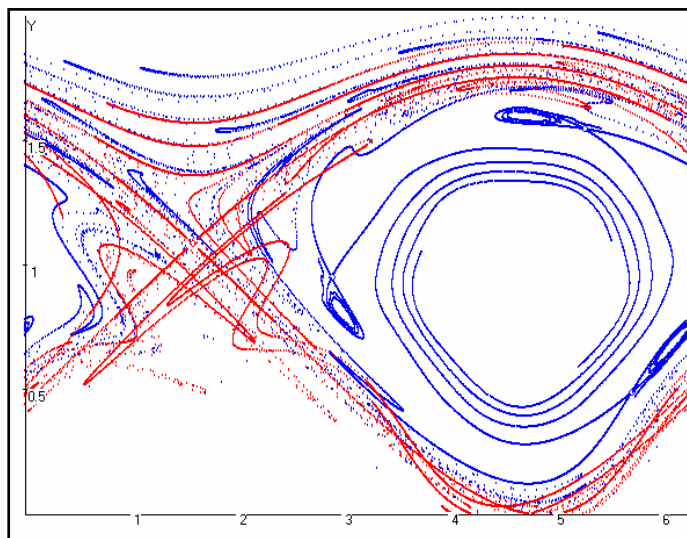
Периодическое решение $\Gamma_{3,3}$

$A_{11} \{(4.75495, 1.59552), (6.14117, 0.68265), (3.00872, 0.80410)\}$ – устойчивый фокус.

$A_{12} \{(4.49859, 0.20042), (3.12309, 1.30720), (6.27746, 1.24762)\}$ – устойчивый фокус.

$B_{11} \{(5.29563, 1.54489), (5.74411, 0.48593), (2.90914, 0.94737)\}$ – седло.

$B_{12} \{(4.02093, 0.32477), (3.46286, 1.42369), (0.11037, 1.09640)\}$ – седло.



ЛИТЕРАТУРА.

[1]. Неймарк Ю. И., Баталова З. С., Белякова Г. В., Ежевская Н. А., Коган Л. В., Ходова А. Ф. Алгоритмы и программы численного исследования динамических систем. - Горький: Изд-во ГГУ, 1983 г.

[2]. Баталова З. С., Ежевская Н. А. Неподвижные точки точечного отображения плоскости в плоскость (методическая разработка). Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1991 г.

[3]. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - Москва: Наука, 1972 г.

[4]. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - Москва: Изд-во БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Методическое описание учебно-лабораторного комплекса)

Составители: Ежевская Наталия Александровна
Киселева Наталья Владимировна
Загранцев Андрей Сергеевич
Павлов Евгений Александрович

Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр.Гагарина, 23

Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл.-печ. л. 1,0. Заказ Тираж 200 экз.

Отпечатано в типографии
Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603600, Н.Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01