Федеральное агентство по образованию

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Приоритетный национальный проект “Образование”
Инновационная образовательная программа Нижегородского университета:
Образовательно-научный центр
«Информационно-телекоммуникационные системы:
физические основы и математическое обеспечение»

А.В. Островский, Д.К. Боголепов,
С.В. Ливерко, А.Н. Половинкин

Математические модели в естествознании и технике

Лабораторный практикум в пакете AnyLogic

Часть 2

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2007

УДК 5:1 (076)
ББК Бв6я73-4
М 34

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор В.В.Новиков;
доктор физ.-мат. наук, профессор М.М. Коган

М 34 **Математические модели в естествознании и технике. Лабораторный практикум в пакете AnyLogic. Часть 2 / А.В. Островский, Д.К. Боголепов, С.В. Ливерко, А.Н. Половинкин.** Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2007. 136 с.

ISBN 978-5-91326-042-0

Учебное пособие представляет собой вторую часть лабораторного практикума по математическому моделированию в естествознании и технике с реализацией в программном пакете AnyLogic™ и является продолжением уже изданной первой части. В описание каждой из лабораторных работ включены теоретические основы, схема реализации и практические задания.

Для студентов, обучающихся по специальности и направлению «Прикладная математика и информатика», аспирантов, преподавателей, а также для всех интересующихся математическим моделированием сложных систем.

Выполнено при финансовой поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере, код проекта 4016р/6181

Издано в рамках Инновационной образовательной программы ННГУ: Образовательно-научный центр «Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение»

ББК Бв6я73-4

ISBN 978-5-91326-042-0

Предисловие

Настоящее учебное пособие содержит лабораторный практикум по математическому моделированию в естествознании и технике (часть 2), который является продолжением лабораторного практикума (часть 1) [1]. Как и в [1], для моделирования систем предлагается использовать программный пакет AnyLogic™ компании XJ Technologies (Санкт-Петербург, Россия), который позволяет не только строить фазовые портреты и осциллограммы для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, но и наглядно интерпретировать их динамику с помощью анимаций.

Учебное пособие написано коллективом сотрудников кафедры теории управления и динамики машин и лаборатории «Информационные технологии» (ITLab) факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (ННГУ).

Пособие состоит из семи разделов. В каждом разделе даются теоретические основы работы, описывается готовая реализация в пакете AnyLogic и приводятся задания для эксперимента (а в некоторых разделах – и теоретические задания). Теоретические основы разделов 1, 3, 4, 5 (кроме п. 5.3.4), 6 и п. 7.1 взяты из книги [2] (это основная книга по курсу «Концепции современного естествознания» для специальности «Прикладная математика и информатика», читаемому на факультете ВМК ННГУ), раздела 2 – из книги [3], п. 5.3.4 – из книги [4] и п. 7.2 – из статьи [6].

Первый раздел посвящен моделированию динамических систем, оператор которых отличен от дифференциальных уравнений (на примере игры «Жизнь», предложенной американским математиком Дж. Конуэем).

Во втором разделе предлагается исследовать с помощью AnyLogic эффекты, характерные для радиотехнических систем (разрывные колебания, генерация импульсов, существование нескольких состояний равновесия с возможностью «переброса» системы с помощью импульсов из одного равновесия в другое), на примере мультивибратора, блокинг-генератора и триггера. Этот раздел является логическим продолжением работ «Динами-

ка электрической схемы с неоновой лампой» и «Ламповый генератор электрических колебаний», входящих в раздел 4 «Эффекты в нелинейных динамических системах» учебного пособия [1].

В третьем разделе рассказывается о парадоксальной роли сухого трения в возникновении неустойчивости и автоколебаний на примере системы типа маятника Фроуда и предлагается экспериментально исследовать эту роль.

Четвертый раздел посвящен исследованию явлений параметрического возбуждения (в частном случае – параметрического резонанса) и параметрической стабилизации.

Тематика пятого раздела – управляемые динамические системы. Здесь читателю предлагается провести виртуальные эксперименты по управлению однозвенным и двухзвенным перевернутыми маятниками, а также лодкой с целью их стабилизации. При этом имеется возможность управлять этими объектами как вручную (с помощью специальных кнопок, изменяющих величину внешнего управляющего момента), так и в рамках некоторых определенных стратегий (линейной, релейной) с возможностью изменения их параметров. Раздел позволяет использовать данное учебное пособие не только при изучении дисциплин, связанных с математическим моделированием в естествознании и теорией колебаний, но и в рамках курсов по теории управления.

Шестой раздел посвящен классическому результату небесной механики – законам Кеплера, получающимся в результате исследования системы дифференциальных уравнений Ньютона в задаче двух тел. Здесь компьютерный эксперимент наглядно иллюстрирует каждый из трех законов Кеплера и позволяет определить некоторые специальные величины (в частности, вторую космическую скорость в условных единицах модели).

Темой седьмого раздела являются элементы искусственного интеллекта на примере игры в отгадывание. Здесь приводятся простейшие автоматные модели игр, а также излагаются основы стохастической игры между человеком и машиной, когда оба игрока заинтересованы в выигрыше и машина использует некоторую стохастическую адаптивную стратегию в целях максимизации своего выигрыша. Читателю предлагается поиграть с маши-

ной в отгадывание, используя готовую реализацию в AnyLogic, и сделать вывод о том, будет ли машина систематически обыгрывать человека и через сколько партий.

Во всех разделах *курсивом* выделены важные моменты изложения материала, на которые нужно обратить особое внимание, а также названия команд (элементов управления) AnyLogic. Новые термины, появляющиеся впервые в процессе изложения, выделены **полужирным шрифтом**. Названия служебных клавиш на клавиатуре компьютера (`Ctrl`, `Tab` и т.д.), а также элементов управления, входящих в состав анимаций в работах, реализованных в AnyLogic, приведены `шрифтом «Курьер»`. Звездочкой (*) отмечены задания повышенной сложности.

При использовании данного лабораторного практикума в учебном процессе рекомендуется следующий порядок проведения каждой лабораторной работы:

1. *Допуск*, предполагающий опрос студентов по теоретическим основам данной работы, а также по использованию реализации данной работы в AnyLogic. В процессе допуска преподаватель может задавать дополнительные вопросы, призванные выявить уровень понимания студентами теории и их готовности к вычислительному эксперименту.

2. *Экспериментальная часть*, в которой студенты проводят эксперименты в соответствии с предложенными в пособии заданиями. Преподаватель по своему усмотрению может добавить свои задания для эксперимента с целью выявления некоторых дополнительных свойств системы.

3. *Отчет о выполнении работы*. Он может (по усмотрению преподавателя) иметь произвольную форму: от письменного отчета в строго определенной форме (с последующей проверкой) до собеседования со студентами по полученным результатам и согласованию их с теорией.

Авторский коллектив выражает искреннюю признательность профессору Ю.И. Неймарку, автору книги [2], за неоценимую помощь при компьютерной реализации моделей.

1. Динамические системы с оператором, отличным от дифференциальных уравнений

Динамическая система в общем случае определяется пространством X и заданным на нем однозначным оператором $T(\Delta t)$, зависящим от параметра $\Delta t \geq 0$, так что каждой точке $x \in X$ оператор T ставит в соответствие единственную точку $\bar{x} \in$ $\in X$, т.е.

$$\bar{x} = T(\Delta t)x.$$

При этом предполагается, что оператор $T(\Delta t)$ при любых допустимых $\Delta t_1 \geq 0$ и $\Delta t_2 \geq 0$ удовлетворяет соотношению

$$T(\Delta t_2)T(\Delta t_1) = T(\Delta t_1 + \Delta t_2). \qquad (1.1)$$

Пространство X – это пространство всевозможных **состояний** (**фазовое пространство**) рассматриваемой системы, а оператор $T(\Delta t)$ по состоянию x в момент времени t позволяет найти состояние в момент времени $t + \Delta t$. При этом ясно, что переход из состояния x в $\bar{x}$, совершаемый сначала за время $\Delta t_1 \geq 0$, а затем еще за время $\Delta t_2 \geq 0$, должен быть таким же, как переход за время $\Delta t_1 + \Delta t_2$ (в этом состоит смысл требования (1.1)).

Если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(\Delta t) - T(0)}{\Delta t} = L,$$

то оператор динамической системы T называется **дифференцируемым**, а оператор L – **производной** оператора T по времени. Состояние динамической системы может задаваться либо вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, либо набором функций (вектор-функцией) $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где $u_i = u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = \overline{1, n})$. В первом случае оператор T задается системой обыкновенных дифферен-

циальных уравнений, во втором – системой уравнений в частных производных.

Однако дифференциальные уравнения не есть единственный способ задания оператора динамической системы: во-первых, оператор T не всегда является дифференцируемым; во-вторых, время может быть *дискретным* (не непрерывным); и, в-третьих, состояние динамической системы может и не быть принятой математической конструкцией (вектором или функцией), а оператор может задаваться в форме, отличной от уравнений. Примером такой динамической системы является игра «Жизнь», предложенная американским математиком Дж. Конуэем, которая отдаленно и упрощенно имитирует реальную жизнь, порождаемую комбинированием химических молекул [2].

1.1. Игра «Жизнь» как динамическая система

В игре «Жизнь», разыгрываемой на шахматной доске, состояние определяется расположением на ней фишек. Пространство состояний (фазовое пространство) – это множество всевозможных расположений фишек. С математической точки зрения состояние можно задать матрицей 8×8, элементы которой – единицы и нули (в зависимости от того, имеется ли фишка на соответствующей клетке). Фазовое пространство состоит из всевозможных таких матриц. С каждым шагом (тактом) дискретного времени $\Delta t = 1$ расположение фишек меняется в соответствии с оператором, определяемым тремя правилами выживания, гибели и рождения:

1) фишка остается, если рядом с ней две или три другие фишки;

2) фишка убирается, если рядом с ней более трех или менее двух фишек;

3) на пустой клетке появляется новая фишка, если рядом с ней имелось три фишки.

В зависимости от начального расположения фишек возможны весьма разнообразные их изменения. Например, три фишки, рас-

положенные в начальный момент времени так, как показано на рис. 1.1, превращаются сначала в две и затем исчезают.

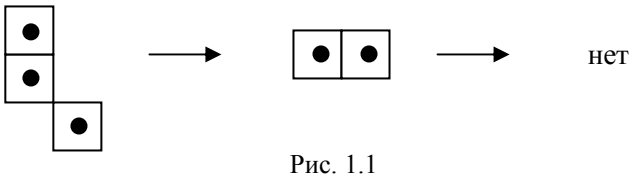


Рис. 1.1

Расположение четырех фишек в виде квадрата (рис. 1.2) не влечет никаких изменений.

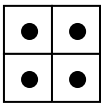


Рис. 1.2

Три фишки в ряд (рис. 1.3) осциллируют (как показано) с периодом два шага (такта).

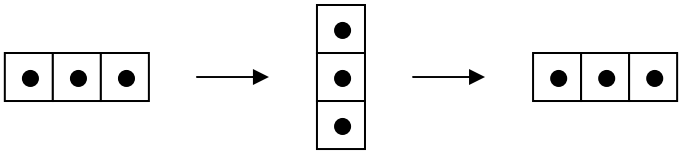


Рис. 1.3

Пять фишек, образующие фигуру «планер» (рис. 1.4), повторяются каждые четыре такта, смещаясь вправо и вниз на одну клетку.

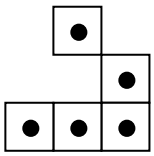


Рис. 1.4

Существуют расположения фишек, которые, осциллируя каждый период, рождают «планер». Есть расположения фишек, пожирающие «планеры», и т.д.

1.2. Реализация в AnyLogic

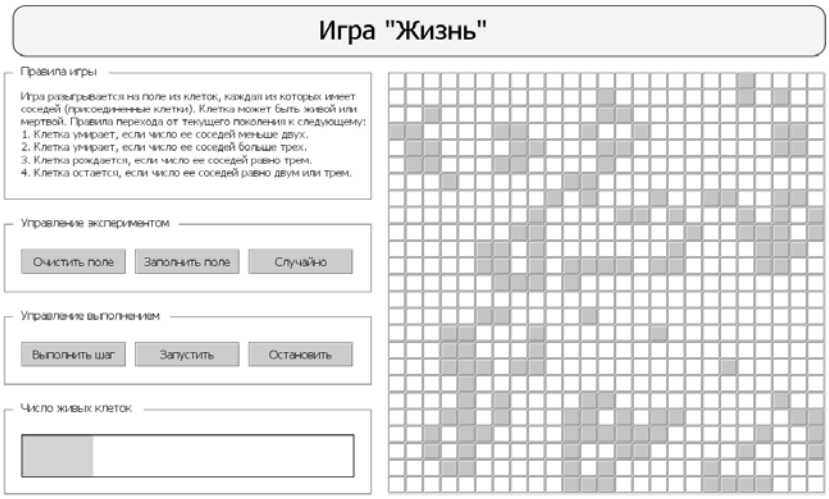


Рис. 1.5

Работа реализована в файле `Part5\GameOfLife.alp` (рис. 1.5) с использованием новых библиотек AnyLogic версии 5.4.1.

В правой части окна анимации располагается доска (поле для игры) (чтобы работа была более интересной, ее размер здесь сделан не 8×8, а 25×25 клеток), на которой могут находиться фишки. Слева от этой доски находятся кнопки для управления экспериментом и управления выполнением.

В группе кнопок «`Управление экспериментом`» имеются следующие кнопки: «`Очистить поле`» – полная очистка поля от фишек; «`Заполнить поле`» – поле целиком заполняется фишками; «`Случайно`» – случайное заполнение поля фишками. Кроме того, можно поместить фишку на клетку поля или убрать фишку с клетки с помощью щелчка мышью по этой клетке.

В группе кнопок «Управление выполнением» имеются следующие кнопки: «Выполнить шаг» – выполнение одного шага (такта) игры; «Запустить» – обычный запуск динамической системы «Игра "Жизнь"» на выполнение; «Остановить» – остановка выполнения игры.

Под кнопками располагается индикатор числа живых клеток (в процентном отношении к числу всех клеток игрового поля).

1.3. Задания для эксперимента

1. Запустите в AnyLogic модель игры «Жизнь».

2. Установите поочередно начальные расположения фишек, показанные на рис. 1.1 – 1.4, и проследите за динамикой расположения фишек.

3. Установите несколько случайных расположений фишек и запустите игру. Приходит ли система к какому-либо установившемуся динамическому режиму (равновесие, автоколебания)?

4*. Попробуйте подобрать такое начальное расположение фишек, которое: а) осциллируя каждый период, рождает «планер»; б) пожирает «планер».

2. Эффекты в радиотехнических системах

2.1. Мультивибратор

2.1.1. Модель

Следуя [3], рассмотрим электрическую схему, называемую **мультивибратором** (рис. 2.1).

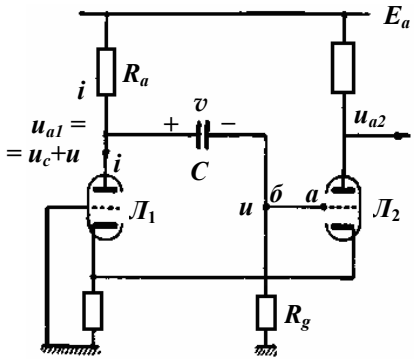


Рис. 2.1

Эта электрическая система предназначена для генерации автоколебаний напряжения, близких к прямоугольным (периодическая последовательность почти прямоугольных импульсов напряжения). В схеме существенно используются нелинейные элементы – лампы (радиолампы) (как на рис. 2.1) или транзисторы.

Если учитывать только те элементы схемы, которые изображены на рис. 2.1, и пренебрегать сеточным током лампы $Л_2$, то уравнения колебаний мультивибратора (на основе законов Кирхгофа) запишутся в виде:

$$i + C\frac{dv}{dt} = \frac{E_a - u - v}{R_a}, \quad C\frac{dv}{dt} = \frac{u}{R_g}. \qquad (2.1)$$

Пренебрегая **анодной реакцией** (т.е. зависимостью анодных токов от анодных напряжений), мы можем считать анодные токи

ламп однозначными функциями сеточного напряжения u на лампе $Л_2$. В частности, зависимость анодного тока i лампы $Л_1$ от этого напряжения дается **характеристикой ламповой группы** $i = \varphi(u)$, которая имеет вид, изображенный на рис. 2.2.

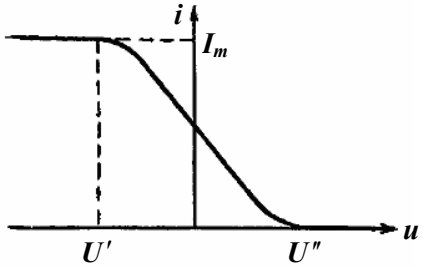


Рис. 2.2

Для некоторого упрощения рассмотрения колебаний схемы будем считать, что середина падающего участка характеристики (место наибольшей крутизны) находится в точке $u = 0$. Через S_0 будем обозначать наибольшее абсолютное значение (модуль) крутизны характеристики на падающем участке: $S_0 = -\varphi'(0)$; тогда $|\varphi'(u)| \le S_0$.

Исключая v (напряжение на конденсаторе C) из уравнений (2.1), получаем дифференциальное уравнение первого порядка для напряжения u на сетке лампы $Л_2$:

$$C(R_a + R_g)\left[1 + \frac{R_a R_g}{R_a + R_g}\varphi'(u)\right]\frac{du}{dt} + u = 0. \qquad (2.2)$$

Поскольку ток i является *однозначной* функцией напряжения u, по заданному значению u можно однозначно определить du/dt, т.е. уравнение (2.2) определяет *динамическую систему*, а величина u является ее *состоянием*. Прямая u является фазовым пространством динамической системы (2.2).

Единственным состоянием равновесия системы (2.2) является $u = 0$. Линеаризуем уравнение (2.2) в окрестности состояния равновесия:

$$C(R_a + R_g)\left[1 - K\right]\frac{du}{dt} + u = 0, \qquad (2.3)$$

где $K = S_0 R_a R_g /(R_a + R_g)$. С точки зрения теории управления (теории автоматического регулирования) коэффициент K имеет смысл **коэффициента передачи** усилителя, получаемого размыканием цепи сетки лампы $Л_2$ (разрывом соединения точек *а* и *б* на рис. 2.1; точка *а* – вход, а точка *б* – выход усилителя).

Характеристическое уравнение для (2.3) имеет вид:

$$C(R_a + R_g)\left[1 - K\right]\lambda + 1 = 0. \qquad (2.4)$$

Если $K < 1$, то единственный корень λ уравнения (2.4) отрицателен и, следовательно, состояние равновесия $u = 0$ локально асимптотически устойчиво; в силу *единственности* состояния равновесия оно будет *глобально* асимптотически устойчивым. Если же $K > 1$, то состояние равновесия $u = 0$ неустойчиво (**самовозбуждение** мультивибратора).

Пусть $K > 1$. Из сделанных предположений относительно графика характеристики ламповой группы $i = \varphi(u)$ (рис. 2.2) следует, что существуют два значения $u = U_1$ и $u = U_2$ $(U' < U_1 < 0 < U_2 < U'')$, при которых множитель перед du/dt в уравнении (2.2) обращается в нуль (а следовательно, величина du/dt в силу динамической системы (2.2) обращается в бесконечность). Эти два значения определяются уравнением:

$$\frac{R_a R_g}{R_a + R_g}\varphi'(u) = -1.$$

В силу динамической системы (2.2) имеем: $du/dt > 0$ при $u < U_1$, $du/dt < 0$ при $U_1 < u < 0$, $du/dt > 0$ при $0 < u < U_2$ и, наконец, $du/dt < 0$ при $u > U_2$. Следовательно, в зависимости от начальных условий фазовая траектория динамической системы (2.2) приходит либо в точку $u = U_1$, либо в точку $u = U_2$, которые, однако, не являются состояниями равновесия и из которых нет выходящих фазовых траекторий. Это *противоречит экспериментальным данным*, согласно которым при $K > 1$ мультивиб-

ратор совершает *автоколебания*, носящие *«разрывный»* характер (сравнительно медленные изменения напряжения *u* периодически сменяются весьма быстрыми).

Таким образом, при $K > 1$ динамическая модель, задаваемая уравнением (2.2) и учитывающая *только некоторые свойства* реального мультивибратора, оказывается *противоречивой* и не может отображать колебаний в реальном мультивибраторе.

Причина полученного противоречия заключается в том, что в данной модели *не были учтены некоторые существенные параметры*. Такими параметрами, согласно [3], являются *малые паразитные емкости* в схеме (емкости анодных и катодных узлов ламп), которые, несмотря на свою малость, играют определяющую роль во время быстрых изменений напряжения *u* на сетке лампы $Л_2$, составляющих одну из характерных особенностей колебаний мультивибратора. Учет этих паразитных емкостей приводит к динамической системе *второго* порядка (см. [3, гл. X, §5]).

Мы же, следуя [3, гл. IV, §7], рассмотрим колебания мультивибратора, пользуясь динамической системой *первого* порядка, дополненной *постулатом о скачках* напряжения *u* на сетке лампы $Л_2$ (этот постулат качественно хорошо отражает процессы в реальном мультивибраторе, так как при достаточно малых величинах паразитных емкостей быстрые изменения *u* можно с большой степенью точности рассматривать как мгновенные, скачкообразные). Таким образом, мы вносим изменения только в *оператор* динамической системы, а ее *состоянием* по-прежнему будет напряжение *u*.

Уравнение (2.2) заведомо непригодно для описания движения системы после ее прихода в состояние $u = U_1$ или $u = U_2$, поэтому мы предположим, что из этих состояний система выходит путем скачка в такие состояния, в которых уравнение (2.2) полностью определяет закон движения, причем скачки будем считать *мгновенными* (длительность каждого скачка равна нулю). Для определения состояний, в которые система перескакивает, необходимо привлечь дополнительные физические соображения.

Предположим, что в схеме не может быть бесконечных напряжений и токов. Тогда в силу нашего предположения ток заряда конденсатора $C \cdot dv/dt$ всегда ограничен; следовательно, при скачках напряжения u напряжение v на конденсаторе C изменяться не будет, так как иначе $dv/dt = \infty$, что невозможно. Этого условия непрерывности напряжения на конденсаторе C («условия скачка») в рассматриваемой задаче достаточно для однозначного определения состояния, в которое приходит система в результате скачка.

Исключая из уравнений (2.1) $C \cdot dv/dt$, получаем v как функцию напряжения u:

$$v = F(u) = E_a - R_a \varphi(u) - (1 + R_a / R_g)u \qquad (2.5)$$

(естественно, соотношение (2.5) справедливо только для тех состояний мультивибратора, для которых выполняется уравнение (2.2) или, что то же самое, уравнения (2.1)). Очевидно, v является однозначной и непрерывной функцией от u. График этой функции при $K > 1$ показан на рис. 2.3 (нетрудно видеть, что при $u = U_1$ и $u = U_2$ $F'(u) = 0$). Поскольку состояния мультивибратора непосредственно перед скачком ($u = U_1$ или $u = U_2$) и после скачка ($u = \overline{U}_1$ или соответственно $u = \overline{U}_2$) таковы, что для них справедливо уравнение (2.2), а следовательно, и соотношение (2.5), и величина v при скачке не изменяется, состояние мультивибратора ($u = \overline{U}_j$) непосредственно после скачка из состояния $u = U_j$ ($j = 1,2$) определяется уравнением

$$F(U_j) = F(\overline{U}_j)$$

или

$$R_a \varphi(\overline{U}_j) + (1 + R_a / R_g)\overline{U}_j = R_a \varphi(U_j) + (1 + R_a / R_g)U_j. \qquad (2.6)$$

Графическое решение уравнения (2.6) дано на рис. 2.3. Очевидно, состояние мультивибратора после скачка однозначно определяется его состоянием перед скачком (т.е. $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ однозначно определяются соответственно по U_1 и U_2).

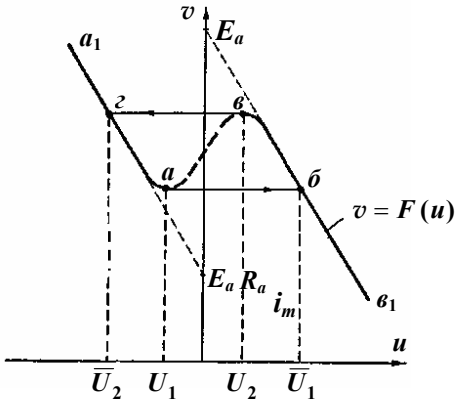


Рис. 2.3

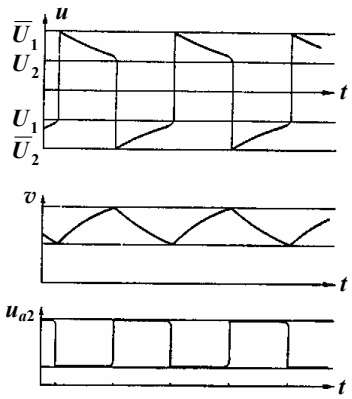


Рис. 2.4

Таким образом, колебания в мультивибраторе оказываются периодическими и состоят из «*медленных*» (с конечной скоростью) изменений напряжения *u* от $\overline{U}_1$ до U_2 и от $\overline{U}_2$ до U_1, подчиняющихся уравнению (2.2), и «*быстрых*» (мгновенных скачкообразных) изменений *u* от U_1 до $\overline{U}_1$ и от U_2 до $\overline{U}_2$, подчиняющихся условиям скачка. На рис. 2.3 этому периодическому движению соответствует замкнутая кривая *абвга* (участки *бв* и *га*

соответствуют «медленным» движениям, а участки *аб* и *вг* – «быстрым» движениям). Осциллограммы колебаний напряжений u, v и u_{a2} приведены на рис. 2.4. Колебания напряжения v на конденсаторе C непрерывны и имеют «пилообразную» форму, а колебания анодного напряжения u_{a2} лампы $Л_2$ близки к «прямоугольным».

2.1.2. Реализация в AnyLogic

Работа реализована в файле `Part6\MultiVibrator.alp` (рис. 2.5).

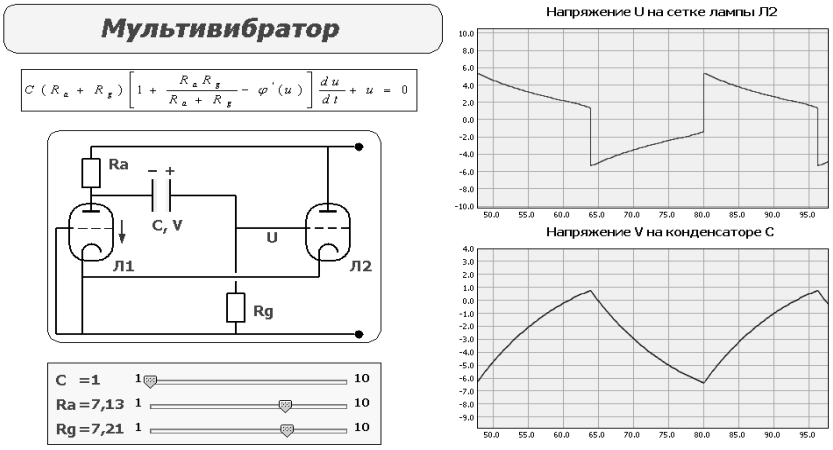


Рис. 2.5

В окне анимации выведено уравнение динамики мультивибратора, осциллограммы изменения напряжений $v(t)$ и $u(t)$, а также анимация прохождения токов и зарядов через систему. На конденсаторе яркость цветов пластин показывает величину (модуль) заряда, а красный и синий цвета – полярность заряда (при изменении полярности цвета пластин меняются местами). Если через лампу идет анодный ток, то справа от лампы появляется красная стрелка, а если не идет, то стрелка исчезает; при этом

яркость стрелки пропорциональна силе анодного тока. Под схемой мультивибратора находятся бегунки для изменения параметров.

2.1.3. Задания для эксперимента

1. Вычислите аналитически период автоколебаний мультивибратора.

2. Запустите модель в AnyLogic и экспериментально определите период автоколебаний мультивибратора и тенденции изменения периода при изменении параметров. Согласуется ли это с аналитическими результатами?

2.2. Блокинг-генератор

2.2.1. Принцип функционирования

Блокинг-генератор [3] – электрическая схема для генерирования *коротких* импульсов (длительность импульсов, вырабатываемых блокинг-генератором, значительно короче, чем, например, время «медленного» движения для мультивибратора). Одна из схем блокинг-генератора приведена на рис. 2.6. Как и в мультивибраторе, здесь существенно используется нелинейный элемент – лампа (как на рис. 2.6) или транзистор.

Блокинг-генератор представляет собой генератор с индуктивной обратной связью (через трансформатор, в основе работы которого лежит взаимоиндукция катушек), в котором лампа заперта в течение почти всего периода автоколебаний. При отпирании лампы в сеточной обмотке трансформатора индуцируется положительное напряжение, в результате чего напряжение u на сетке лампы быстро достигает больших положительных значений (до нескольких сотен вольт) и через лампу протекают значительные анодный и сеточный токи. Эти токи, протекая по обмоткам трансформатора, индуцируют в его выходной обмотке импульс напряжения. Одновременно импульс сеточного тока заряжает конденсатор C, что вызывает уменьшение сеточного напряжения

u; поэтому через некоторый промежуток времени, составляющий обычно небольшую долю периода, лампа окажется снова запертой (так как в сеточной обмотке трансформатора при уменьшении анодного тока индуцируется отрицательное напряжение, вызывающее дальнейшее запирание лампы). В течение остальной части периода лампа заперта, сеточные токи отсутствуют и конденсатор *C* разряжается через сопротивление *R*. Сеточное напряжение *u* постепенно увеличивается и через некоторый интервал времени (длительности порядка *RC*) достигает значения, при котором лампа отпирается и блокинг-генератор вырабатывает следующий импульс.

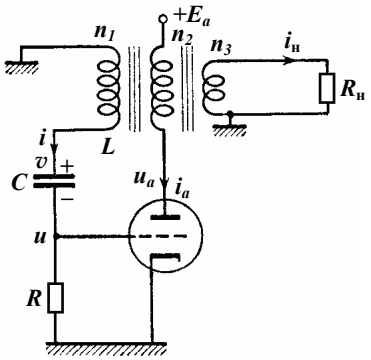


Рис. 2.6

2.2.2. Общая модель

В отличие от мультивибратора, при рассмотрении автоколебаний блокинг-генератора *нельзя пренебрегать* ни сеточными токами, ни анодной реакцией, так как они играют существенную роль в работе блокинг-генератора: во время генерирования импульсов в лампе текут значительные сеточные токи, заряжающие конденсатор *C* и вызывающие запирание лампы в конце импульса, а напряжение на аноде u_a снижается до весьма небольших значений (из-за большого падения напряжения на анодной обмотке трансформатора), что и ограничивает величину импульсов анод-

ного тока и сеточного напряжения. Поэтому *анодный* ток мы будем считать функцией как *сеточного*, так и *анодного* напряжения:

$$i_a = i_a\,(u, u_a);$$

в то же время для некоторого упрощения задачи мы будем считать *сеточный* ток зависящим только от *сеточного* напряжения:

$$i_g = i_g\,(u).$$

Для генерации импульсов с крутыми фронтами необходимо, чтобы трансформатор блокинг-генератора имел минимальные **магнитные потоки рассеяния** (т.е. части магнитного потока, которые замыкаются не через обмотки трансформатора, а по воздуху) и минимальные емкости обмоток (для этого в ламповых блокинг-генераторах трансформатор обычно собирался на тороидальном ферромагнитном сердечнике) [3]. Поэтому естественно предположить сначала (в качестве первого приближения), что магнитные потоки рассеяния в трансформаторе полностью отсутствуют, т.е. что магнитный поток одинаков во всех поперечных сечениях сердечника трансформатора. При этом предположении магнитный поток через каждый виток любой обмотки трансформатора определяется общим числом **ампер-витков** (т.е. произведением числа витков катушки, по которой протекает ток, на значение силы этого тока) во всех обмотках и равен величине

$$\Phi = \frac{L}{n_1^2}(n_1 i - n_2 i_a + n_3 i_{\text{н}}) = \frac{L}{n_1}(i - k i_a + k' i_{\text{н}}),$$

где L – индуктивность сеточной обмотки трансформатора; n_1, n_2 и n_3 – число витков в сеточной, анодной и выходной обмотках соответственно; $k = n_2/n_1$ и $k' = n_3/n_1$ – коэффициенты трансформации напряжения из сеточной обмотки в анодную и выходную соответственно; i – ток в цепи конденсатора C; $i_{\text{н}}$ – ток нагрузки (см. рис. 2.6). В дальнейшем мы будем называть величину

$$I = i - k i_a + k' i_{\text{н}} \qquad (2.7)$$

током намагничивания сердечника трансформатора. Тогда ЭДС индукции в сеточной, анодной и выходной обмотках трансформатора будут соответственно равны

$$-\frac{d}{dt}(n_1\Phi) = -L\frac{dI}{dt}, \quad +\frac{d}{dt}(n_2\Phi) = kL\frac{dI}{dt} \quad \text{и} \quad -\frac{d}{dt}(n_3\Phi) = -k'L\frac{dI}{dt}.$$

Пренебрегая, кроме того, всеми паразитными параметрами схемы (в частности, малыми емкостями обмоток трансформатора и междуэлектродными емкостями лампы), получаем следующие уравнения колебаний блокинг-генератора:

$$\left.\begin{aligned} -L\frac{dI}{dt} &= u + v = \frac{E_a - u_a}{k} = \frac{R_{\text{н}} i_{\text{н}}}{k}, \\ C\frac{dv}{dt} &= i = \frac{u}{R} + i_g(u), \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

где $R_{\text{н}}$ – сопротивление внешней нагрузки, которую мы будем полагать чисто активной (омической). Подставляя самые правые равенства из каждого уравнения системы (2.8) в выражение (2.7) для тока намагничивания I

$$I = \frac{u}{R} + i_g(u) - ki_a(u, u_a) + \frac{k'^2}{R_{\text{н}}}\frac{E_a - u_a}{k} = I(u, u_a) \qquad (2.7\text{а})$$

и исключая напряжение v на конденсаторе C из первого уравнения (2.8)

$$v = \frac{E_a - u_a}{k} - u, \qquad (2.8\text{а})$$

имеем:

$$-L\left\{\frac{1}{R} + S_g(u) - kS(u, u_a)\right\}\frac{du}{dt} + L\left\{\frac{k^2}{R_i(u, u_a)} + \frac{k'^2}{R_{\text{н}}}\right\}\frac{1}{k}\frac{du_a}{dt} = \frac{E_a - u_a}{k},$$

$$-\frac{du}{dt} - \frac{1}{k}\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{C}\left[\frac{u}{R} + i_g(u)\right],$$

где $S_g(u)$, $S(u, u_a)$ и $R_i(u, u_a)$ – соответственно крутизна характеристик сеточного и анодного токов и внутреннее сопротивление лампы, т.е.

$$S_g(u) = \frac{di_g}{du}, \quad S(u, u_a) = \frac{\partial i_a}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_i(u, u_a)} = \frac{\partial i_a}{\partial u_a}.$$

Разрешая эти уравнения относительно производных, получаем:

$$Lg(u,u_a)\frac{du}{dt}=\frac{u_a-E_a}{k}-\frac{L}{C}\left\{\frac{k^2}{R_i(u,u_a)}+\frac{k'^2}{R_н}\right\}\left[\frac{u}{R}+i_g(u)\right],$$

$$Lg(u,u_a)\frac{1}{k}\frac{du_a}{dt}=\frac{E_a-u_a}{k}-\frac{L}{C}\left\{\frac{1}{R}+S_g(u)-kS(u,u_a)\right\}\times \tag{2.9}$$

$$\times\left[\frac{u}{R}+i_g(u)\right],$$

где

$$g(u,u_a)=\frac{1}{R}+S_g(u)+\frac{k^2}{R_i(u,u_a)}+\frac{k'^2}{R_н}-kS(u,u_a).$$

Очевидно, блокинг-генератор имеет единственное состояние равновесия, определяемое уравнениями

$$u_a-E_a=0 \quad \text{и} \quad u+Ri_g(u)=0,$$

т.е. в состоянии равновесия (если пренебречь сеточным током при $u\le 0$) $u=0$ и $u_a=E_a$. Характеристическое уравнение для состояния равновесия блокинг-генератора имеет вид:

$$\begin{vmatrix} Lg(0,E_a)\lambda+\frac{L}{C}\left[\frac{k^2}{R_i(0,E_a)}+\frac{k'^2}{R_н}\right]\left[\frac{1}{R}+S_g(0)\right] & -1 \\ \frac{L}{C}\left[\frac{1}{R}+S_g(0)-kS(0,E_a)\right]\left[\frac{1}{R}+S_g(0)\right] & Lg(0,E_a)\lambda+1 \end{vmatrix}=0$$

или

$$Lg(0,E_a)\lambda^2+\left\{1+\frac{L}{C}\left[\frac{k^2}{R_i(0,E_a)}+\frac{k'^2}{R_н}\right]\left[\frac{1}{R}+S_g(0)\right]\right\}\lambda+$$

$$+\frac{1}{C}\left[\frac{1}{R}+S_g(0)\right]=0.$$

Ниже мы будем рассматривать только тот случай, когда единственное состояние равновесия блокинг-генератора неустойчиво и блокинг-генератор самовозбуждается, т.е. будем полагать выполненным условие самовозбуждения:

$$g(0,E_a)=\frac{1}{R}+S_g(0)+\frac{k^2}{R_i(0,E_a)}+\frac{k'^2}{R_{\text{н}}}-kS(0,E_a)<0. \qquad (2.10)$$

При выполнении условия (2.10) на фазовой плоскости (u,u_a) существует некоторая кривая (будем обозначать ее через Г), в точках которой $g(u,u_a)=0$ и скорости изменения u и u_a обращаются в бесконечность. Действительно, при достаточно больших $|u|$ крутизна характеристики анодного тока $S(u,u_a)$ *мала*, так как при больших по модулю отрицательных u лампа заперта $(S(u,u_a)=0)$, а при больших положительных u анодный ток почти перестает зависеть от u и зависит главным образом от u_a (анодная реакция). Следовательно, при достаточно больших $|u|$ имеет место неравенство $g(u,u_a)>0$ (по определению функции $g(u,u_a)$). С другой стороны, $g(0,E_a)<0$ в силу условия (2.10). Отсюда и из предположения, что $S_g(u)$, $S(u,u_a)$, $\left[R_i(u,u_a)\right]^{-1}$, а следовательно, и $g(u,u_a)$ – непрерывные функции, следует существование на плоскости (u,u_a) непрерывного геометрического места точек, в которых $g(u,u_a)=0$, т.е. существование кривой Г. Вид этой кривой приведен на рис. 2.7.

При переходе через кривую Г функция $g(u,u_a)$ меняет знак, поэтому часть этой кривой состоит из *точек стыка фазовых траекторий* («втыкание» траекторий в кривую Г с обеих сторон). Таким образом, пренебрегая всеми малыми паразитными параметрами схемы, включая малые паразитные емкости схемы и магнитные потоки рассеяния в трансформаторе, мы пришли к *«дефектной»* модели блокинг-генератора – к модели, на фазовой плоскости которой имеются точки стыка фазовых траекторий и которая, следовательно, не дает возможности проследить за колебаниями схемы и нуждается в уточнении (аналогичная ситуация была и в модели мультивибратора).

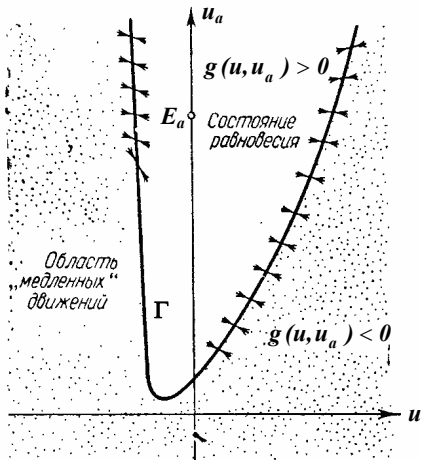


Рис. 2.7

Как и для мультивибратора, для блокинг-генератора дополнительно к уравнениям (2.9) примем в качестве *постулатов* следующие предположения относительно характера колебаний [3, гл. X, §11]:

1. В области $g(u,u_a) > 0$ *малые паразитные параметры не играют существенной роли* и колебания блокинг-генератора («медленные движения») описываются уравнениями (2.9) (некоторым обоснованием этого постулата является то обстоятельство, что к области $g(u,u_a) > 0$ принадлежит область значений (u,u_a), в которой лампа заперта и где малые паразитные параметры, по-видимому, не играют существенной роли).

2. Если фазовая (изображающая) точка, двигаясь по плоскости (u,u_a) (в области $g(u,u_a) > 0$) по траектории системы (2.9), приходит на кривую Г, то затем она совершает *мгновенный скачок* в другую точку, принадлежащую снова области «медленных» движений $g(u,u_a) > 0$.

3. Считая все напряжения и токи в схеме *ограниченными*, мы должны принять, что во время мгновенного скачка величина напряжения v на конденсаторе C и магнитные потоки через обмот-

ки трансформатора остаются неизменными (иначе ток $i = C \cdot dv/dt$ и ЭДС индукции в соответствующей обмотке будут бесконечно большими). Так как во время «медленного» движения перед скачком и после скачка фазовой точки напряжение v связано с u и u_a соотношением (2.8а), а магнитные потоки через обмотки трансформатора полностью определяются током намагничивания $I = I(u, u_a)$ (см. (2.7а)), то концевая точка скачка (u^*, u_a^*) связана с начальной точкой (u, u_a), лежащей на кривой Г, следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} u^* + \frac{u_a^*}{k} &= u + \frac{u_a}{k}, \\ I(u^*, u_a^*) &= I(u, u_a). \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Доказательство сделанных постулатов, основанное на рассмотрении динамики модели блокинг-генератора в виде системы третьего порядка, получаемой при учете малых паразитных емкостей обмоток трансформатора, приведено в [3, гл. X, §11, п. 2].

2.2.3. Разрывные колебания при конкретной аппроксимации характеристик лампы

Для дальнейшего более детального рассмотрения разрывных колебаний блокинг-генератора возьмем кусочно-линейную аппроксимацию характеристик лампы, приведенную на рис. 2.8:

$$i_g = i_g(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ S_g u & \text{при } u \geq 0, \end{cases}$$

$$i_a = i_a(u, u_a) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } u_a \le 0 \text{ или } u \le -u_0, \\ S \cdot (u + u_0) & \text{при } 0 < S \cdot (u + u_0) < \dfrac{u_a}{R_0}, \\ \dfrac{u_a}{R_0} & \text{при } S \cdot (u + u_0) \ge \dfrac{u_a}{R_0} > 0. \end{cases}$$

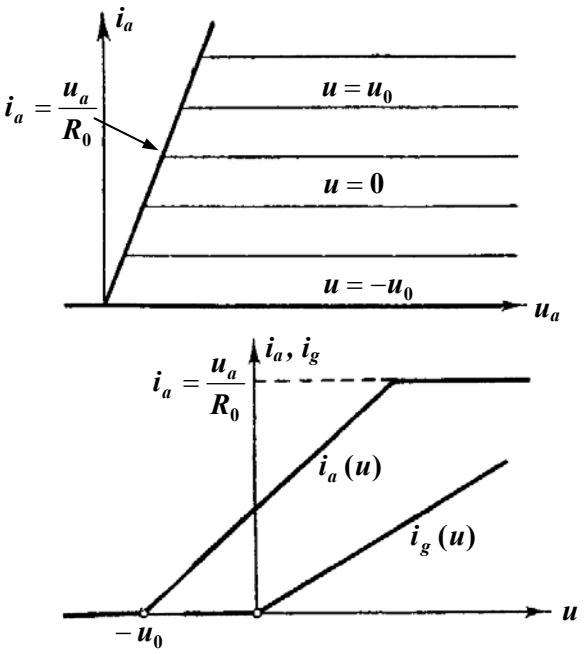


Рис. 2.8

Здесь $-u_0$ – напряжение запирания лампы, S и S_g – крутизна характеристик анодного и сеточного токов на восходящих (прямолинейных) участках, R_0 – внутреннее сопротивление лампы в **области анодной реакции** (т.е. в области значений переменных, в которой имеет место анодная реакция). Таким образом, мы счи-

таем, что при достаточно больших напряжениях на аноде лампы, а именно при $u_a > SR_0(u+u_0)$, анодной реакции нет, т.е. анодный ток i_a зависит только от сеточного напряжения u; область же $u_a \le SR_0(u+u_0)$ является областью анодной реакции, т.е. в ней анодный ток полностью определяется анодным напряжением u_a и не зависит от сеточного напряжения u.

При такой кусочно-линейной аппроксимации характеристик лампы плоскость (u,u_a) разбивается на шесть областей «линейности», в каждой из которых уравнения колебаний блокинг-генератора линейны. Эти области «линейности» изображены на рис. 2.9: области (I) и (Ia) соответствуют запертой лампе $(i_a \equiv 0)$; в областях (II) и (IIa) анодная реакция отсутствует и анодный ток i_a зависит только от сеточного напряжения u; наконец, области (III) и $(IIIa)$ являются областями «полной» анодной реакции, в которых анодный ток зависит только от напряжения u_a на аноде лампы. В областях (Ia), (IIa) и $(IIIa)$ $u>0$ и в лампе течет сеточный ток.

Пусть параметры системы удовлетворяют следующим условиям:

$$kS > \frac{1}{R} + S_g + \frac{k'^2}{R_н} \text{ и } E_a > SR_0u_0. \qquad (2.12)$$

Тогда состояние равновесия блокинг-генератора $(0,E_a)$ будет лежать на границе областей (II) и (IIa), в которых $R_i = \infty$ и поэтому $g(u,u_a) < 0$. Следовательно, это состояние равновесия будет неустойчивым, а областях (II) и (IIa) имеют место только «быстрые» движения (скачки) фазовой точки. Наоборот, в областях (I), (Ia), (III) и $(IIIa)$, т.е. в областях запертой лампы и анодной реакции, где $S(u,u_a)=0$ и $g(u,u_a)<0$, возможны «медленные» движения фазовой точки (с конечными скоростями), подчиняющиеся уравнениям (2.9). Границей области «медленных» движений, т.е. линией Г, в рассматриваемом случае кусочно-линейных характеристик лампы являются полупрямые

$$u = -u_0,\ u_a > 0 \text{ и } u_a = SR_0(u + u_0) > 0.$$

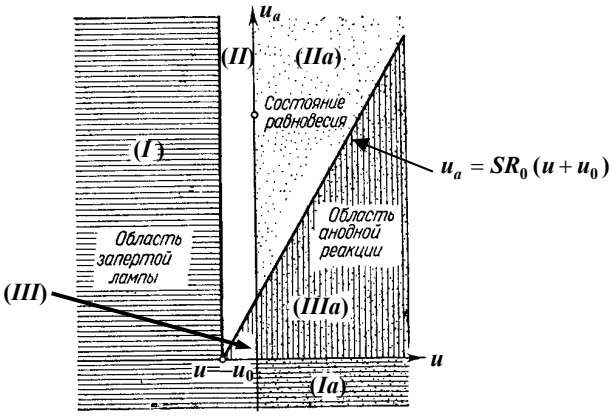


Рис. 2.9

Для приведения уравнений «медленных» движений к безразмерной форме введем новые переменные (безразмерные) x, y, $t_{\text{нов}}$, связанные со старыми переменными соотношениями:

$$u = u_0 x,\ u_a = k u_0 y,\ t_{\text{ст}} = L \cdot g(u, u_a) \cdot t_{\text{нов}}$$

(далее для сокращения мы будем обозначать новое, безразмерное время $t_{\text{нов}}$ через t, а старое, обычное время – через $t_{\text{ст}}$; масштаб времени, очевидно, различен в различных областях «линейности» фазовой плоскости). Тогда уравнения «медленных» движений, т.е. уравнения (2.9), запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - A - a(x, y)\,x, \\ \dot{y} &= A - y - b(x)\,x, \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

где

$$a(x, y) = \frac{L}{C}\frac{G(x)}{r(x, y)},\ b(x) = \frac{L}{C}\left[G(x)\right]^2;$$

полная проводимость цепи сетки

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{R} & \text{при } x<0,\\ G=\dfrac{1}{R}+S_g & \text{при } x\geq 0,\end{cases}$$

$$\frac{1}{r(x,y)}=\frac{k^2}{R_i}+\frac{k'^2}{R_{\text{н}}}=\begin{cases}\dfrac{1}{r_1}=\dfrac{k'^2}{R_{\text{н}}} & \text{в областях } (I) \text{ и } (Ia),\\ \dfrac{1}{r_2}=\dfrac{k^2}{R_0}+\dfrac{k'^2}{R_{\text{н}}} & \text{в областях } (III) \text{ и } (IIIa)\end{cases}$$

– кусочно-постоянные функции (постоянные в каждой из областей «линейности»); $A=E_a/(ku_0)$ – приведенное безразмерное анодное напряжение (напряжение источника питания).

Границей области «медленных» движений на фазовой плоскости (x,y) будут полупрямые Г:

$$x=-1,\ y>0 \ \text{ и } \ y=\frac{SR_0}{k}(x+1)>0, \tag{2.14}$$

а условия скачка (2.11) будут состоять в том, что значения величин

$$G(x)\,x-\frac{y}{r(x,y)} \ \text{ и } \ x+y \tag{2.11a}$$

непосредственно после скачка фазовой точки с полупрямых (2.14) совпадают с их значениями перед скачком.

Для дальнейшего будет полезным уравнение

$$\frac{d}{dt}(x+y)=-\{a(x,y)+b(x)\}x, \tag{2.13a}$$

получаемое из системы (2.13). Из этого уравнения, в частности, следует, что $x+y$ возрастает (а напряжение v убывает, см. (2.8а)) при $x<0$ (т.е. при $u<0$) и, наоборот, $x+y$ убывает (а v возрастает) при $x>0$ (т.е. $u>0$).

Рассмотрим фазовый портрет блокинг-генератора на плоскости (x,y), полагая

$$A >> 1 \text{ и } \frac{R_0}{k^2},\ \frac{1}{S_g},\ \frac{R_н}{k'^2},\ \sqrt{\frac{L}{C}} << \sqrt{\frac{RR_н}{k'^2}} << R, \qquad (2.15)$$

что выполняется при обычно встречающихся значениях параметров блокинг-генератора [3].

В области (I), где лампа заперта, т.е. $i_a \equiv 0$, $i_g \equiv 0$, $G(x) = 1/R$ и $r(x, y) = r_1 = R_н / k'^2$, уравнения «медленных» движений блокинг-генератора запишутся в виде следующей линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - A - a_1 x, \\ \dot{y} &= A - y - b_1 x, \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

где

$$a_1 = \frac{L}{CR\,r_1} \text{ и } b_1 = \frac{L}{CR^2},$$

причем при обычных значениях параметров $0 < b_1 << a_1 << 1$; в области (I) $t_{ст} \approx \frac{L}{r_1} t_{нов}$, поскольку там $g(u, u_a) = \frac{1}{R} + \frac{k'^2}{R_н} \approx \frac{1}{r_1}$.

Характеристическое уравнение системы (2.16)

$$\lambda^2 + (1 + a_1)\lambda + a_1 + b_1 = 0$$

имеет при $0 < b_1 << a_1 << 1$ два вещественных отрицательных корня:

$$\lambda_1 = -\gamma_1 < 0 \text{ и } \lambda_2 = -\gamma_1' < 0,$$

где

$$\gamma_1 = a_1 + b_1 \left[1 + O(a_1)\right] \approx a_1 \text{ и } \gamma_1' = 1 - b_1 \left[1 + O(a_1)\right] \approx 1.$$

Общим решением системы (2.16) будет:

$$\left.\begin{aligned} x &= B_1 e^{-\gamma_1 t} + B_1' e^{-\gamma_1' t} \approx B_1 e^{-a_1 t} + B_1' e^{-t}, \\ y &= A + B_1 (a_1 - \gamma_1) e^{-\gamma_1 t} + B_1' (a_1 - \gamma_1') e^{-\gamma_1' t} \approx \\ &\approx A - B_1 b_1 e^{-a_1 t} - B_1' e^{-t}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.16а)$$

Соответствующая качественная картина «медленных» движений в области (I) приведена на рис. 2.10. В этой области имеются две прямолинейные фазовые траектории $y = A + \kappa_1 x$ и $y = A + \kappa_2 x$ (κ – греческая буква «каппа»), где $\kappa_1 = -b_1 \approx 0$ и $\kappa_2 \approx -1$ (убедитесь в этом сами!). Остальные траектории (вне малой окрестности траектории $y = A + \kappa_1 x$) близки к прямым $x + y = \text{const}$ (точнее, к прямым, параллельным второй прямолинейной траектории $y = A + \kappa_2 x$), и изображающие точки двигаются по этим траекториям в направлении к первой прямолинейной траектории. Нетрудно видеть, что все траектории, идущие в области $y > 0$, выходят на границу области (I) – полупрямую Γ_1

$$x = -1,\ y \geq A - a_1$$

(так как $\dot{x} \geq 0$ только при $y \geq A - a_1$). При этом все траектории, идущие ниже прямой $x + y = A - 1$, входят в малую окрестность почти горизонтальной фазовой траектории $y = A + \kappa_1 x$ и поэтому выходят на полупрямую Γ_1 в точках, весьма близких к точке $(-1, A)$.

Если изображающая точка вышла на полупрямую $x = -1$ в некоторой точке с ординатой y_1 $(y_1 \geq A - a_1)$, то она затем по соответствующей траектории «быстрого» движения (по траектории $x + y = y_1 - 1$) «перепрыгнет» в точку (x_1^*, y_1^*), которая однозначно определяется условиями скачка (2.11а) (условиями сохранения напряжения на конденсаторе C и тока намагничивания в трансформаторе) и лежит в области (*IIIa*), если условия (2.15) выполнены. Именно, конечная точка скачка (x_1^*, y_1^*) определяется по начальной точке скачка уравнениями

$$Gx_1^* - \frac{y_1^*}{r_2} = -\frac{1}{R} - \frac{y_1}{r_1} \approx -\frac{y_1}{r_1}, \quad \text{так как обычно } r_1 << R,$$

$$x_1^* + y_1^* = -1 + y_1,$$

откуда

$$x_1^* \approx \frac{y_1\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)-\frac{1}{r_2}}{G+\frac{1}{r_2}} \quad \text{и} \quad y_1^* \approx \frac{y_1\left(G+\frac{1}{r_1}\right)-G}{G+\frac{1}{r_2}} \qquad (2.17)$$

(так как $y_1 \geq A - a_1 >> 1$, то $x_1^* > 0$ и $0 < y_1^* < \frac{SR_0}{k}(x_1^*+1)$, т.е. точка (x_1^*, y_1^*) действительно лежит в области (*IIIa*); при этом $y_1^* < y_1$).

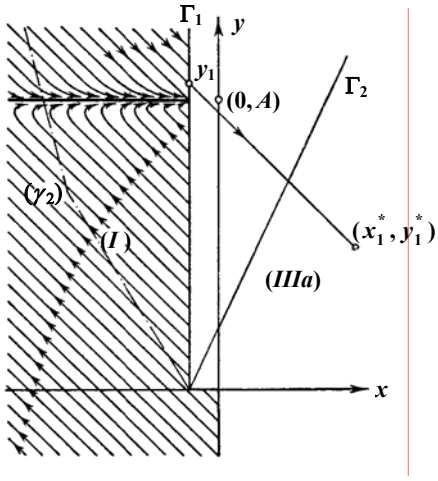


Рис. 2.10

В области (*IIIa*), т.е. в области анодной реакции и сеточного тока (там $R_i = R_0$ и $G(x) = G \approx \frac{1}{S_g}$, так как обычно $S_g >> \frac{1}{R}$), уравнения (2.13) запишутся в виде линейной системы:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y - A - a_2 x,\\ \dot{y} &= A - y - b_2 x,\end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

где

$$a_2 = \frac{L}{C}\frac{G}{r_2} \quad \text{и} \quad b_2 = \frac{L}{C}G^2;$$

в области (*IIIa*) $t_{\text{ст}} = L\left(G + \frac{1}{r_2}\right)t_{\text{нов}}$. Дифференциальным уравнением интегральных кривых (или фазовых траекторий, так как в области (*IIIa*) нет состояний равновесия системы (2.18)) будет уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A - y - b_2 x}{y - A - a_2 x}. \qquad (2.18а)$$

Характеристическое уравнение системы (2.18)

$$\lambda^2 + (1 + a_2)\lambda + a_2 + b_2 = 0 \qquad (2.18б)$$

в зависимости от значений параметров a_2 и b_2, т.е. от соотношения между **характеристическим сопротивлением** сеточной цепи блокинг-генератора $\rho = \sqrt{L/C}$ и сопротивлениями

$$\frac{1}{G} \approx \frac{1}{S_g} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{r_2}{G}} \approx \left\{S_g\left(\frac{k^2}{R_0} + \frac{k'^2}{R_{\text{н}}}\right)\right\}^{1/2},$$

может иметь либо два вещественных отрицательных корня (при $(1 - a_2)^2 > 4b_2$), либо два комплексно сопряженных корня с отрицательной вещественной частью (при $(1 - a_2)^2 < 4b_2$). Нетрудно видеть, что существуют два таких значения ρ_1 и ρ_2 (причем $\rho_1 < \sqrt{r_2/G} < \rho_2$), что при $\rho < \rho_1$ и при $\rho > \rho_2$ корни характеристического уравнения (2.18б) будут вещественными и отрицательными, а при $\rho_1 < \rho < \rho_2$ – комплексно сопряженными.

В соответствии с этим траектории в области (*IIIa*) имеют вид параболических траекторий устойчивого узла, расположенного в состоянии равновесия $(0, A)$, т.е. вне области (*IIIa*), или дуг спиралей устойчивого фокуса в той же точке. Наиболее простыми эти траектории будут в случаях достаточно больших и достаточно малых значений характеристического сопротивления блокинг-генератора $\rho = \sqrt{L/C}$.

При достаточно *больших* ρ, когда $a_2, b_2 >> A$, вне малой окрестности оси ординат имеет место приближенное равенство $\frac{dy}{dx} \approx \frac{b_2}{a_2}$ (согласно уравнению (2.18а)) и фазовые траектории близки к прямым $y - \frac{b_2}{a_2} x = \text{const}$ или $\frac{y}{r_2} - Gx = \text{const}$, которые являются *линиями постоянного тока намагничивания в трансформаторе*, поскольку в области (*IIIa*) ток намагничивания

$$I = u_0 \left\{ Gx - \frac{y}{r_2} \right\}.$$

При движении изображающей точки по этим траекториям происходит уменьшение x и y (т.е. уменьшение напряжений на сетке и аноде лампы, а также анодного тока), сопровождаемое сравнительно значительным уменьшением $x + y$, т.е. увеличением напряжения v на конденсаторе C. Иначе говоря, при $a_2, b_2 >> A$, т.е. при $\rho >> 1/G, \sqrt{r_2/G}$, во время генерирования импульса анодного тока ток намагничивания I в трансформаторе почти не изменяется, а уменьшение сеточного напряжения u, приводящее в конце концов к запиранию лампы, обусловлено значительным и сравнительно быстрым возрастанием напряжения v на конденсаторе C (из-за наличия сеточного тока в лампе) и происходит, несмотря на увеличение напряжения на сеточной обмотке трансформатора. Такой механизм прекращения генерирования импульса анодного тока называется в радиотехнике **ем-**

костным восстановлением состояний блокинг-генератора с запертой лампой.

При достаточно *малых* же значениях величины $\rho = \sqrt{L/C}$, когда $a_2, b_2 << 1$, имеет место приближенное равенство $\frac{dy}{dx} \approx -1$ (вне окрестностей прямых $y = A + a_2 x$ и $y = A - b_2 x$) и фазовые траектории будут близки к прямым $x + y = \text{const}$ – *линиям постоянного напряжения на конденсаторе C*. В этом случае (при $y < A - b_2 x$) x уменьшается, а y увеличивается, что приводит к сравнительно большому уменьшению тока намагничивания *I*. Теперь за время генерирования импульса анодного тока напряжение *v* на конденсаторе *C* почти не изменяется, и уменьшение сеточного напряжения *u*, приводящее к прекращению генерирования импульса, происходит главным образом в результате уменьшения тока намагничивания *I* и напряжения на сеточной обмотке трансформатора, равного $-L\frac{dI}{dt_{\text{ст}}}$. Этот механизм прекращения генерирования импульса в радиотехнике называют **индуктивным восстановлением** состояний блокинг-генератора с запертой лампой.

Уравнения колебаний блокинг-генератора в области (*III*), где есть анодная реакция, но нет сеточных токов и куда могут перейти фазовые траектории из области (*IIIa*), получаются из уравнений (2.18) путем замены *G* на 1/*R*. Фазовыми траекториями в этой области будут траектории устойчивого узла в точке $(0, A)$, также близкие к прямым $x + y = \text{const}$.

Изображающая точка, двигаясь по траекториям «медленных» движений в областях анодной реакции (*IIIa*) и (*III*), обязательно выйдет на границу этих областей – полупрямую Γ_2 :

$$y = \frac{SR_0}{k}(x+1) > 0,$$

являющуюся одновременно границей области «медленных» движений; отсюда изображающая точка скачком «перепрыгнет» в область (I).

Если начальной точкой скачка была точка (x_2, y_2) полупрямой Γ_2, то концевая точка скачка (x_2^*, y_2^*) однозначно определяется условиями скачка

$$\frac{x_2^*}{R} - \frac{y_2^*}{r_1} = G(x_2)\,x_2 - \frac{y_2}{r_2} \quad \text{и} \quad x_2^* + y_2^* = x_2 + y_2,$$

т.е.

$$\left.\begin{aligned} y_2^* &\approx \frac{r_1}{r_2} y_2 - r_1 G(x_2)\,x_2 = r_1 \left\{ \left[\frac{SR_0}{kr_2} - G(x_2) \right] x_2 + \frac{SR_0}{kr_2} \right\}, \\ x_2^* &= x_2 + y_2 - y_2^* \approx \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) y_2 + \left[1 + r_1 G(x_2) \right] x_2 = \\ &= -r_1 \left\{ \left[kS - \frac{1}{r_1} - G(x_2) \right] x_2 + kS \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

Геометрическое место концевых точек скачка изображающей точки из точек полупрямой Γ_2 изображено на рис. 2.10 ломаной штрихпунктирной линией (γ_2). После скачка в точку (x_2^*, y_2^*) изображающая точка будет совершать «медленное» движение в области (I) по соответствующей траектории системы (2.16) и выйдет снова на полупрямую Γ_1, откуда совершит скачок в область (*IIIa*), и т.д.

Таким образом, блокинг-генератор при выполнении условий самовозбуждения (2.12) будет совершать разрывные колебания, которым соответствуют «медленные» движения изображающей точки в областях (I) и (*IIIa*)+(III), чередующиеся с «быстрыми» (мгновенными) скачками из области (I) в область (*IIIa*) и из области (*IIIa*) (или (III)) в область (I). При этом, очевидно, движениям изображающей точки в области (I) соответствуют те этапы колебательных процессов в блокинг-генераторе, во время кото-

рых *лампа блокинг-генератора заперта*. Наоборот, движениям изображающей точки в областях (*IIIa*) и (*III*) соответствует *процесс генерирования импульсов анодного тока* (лампа отперта, но анодное напряжение невелико, в силу чего имеет место анодная реакция).

2.2.4. Разрывные автоколебания блокинг-генератора

Для нахождения *периодических* разрывных колебаний (автоколебаний) блокинг-генератора и исследования их устойчивости рассмотрим точечное отображение П полупрямой Г в себя, порождаемое фазовыми траекториями (отображение Пуанкаре) (рис. 2.11).

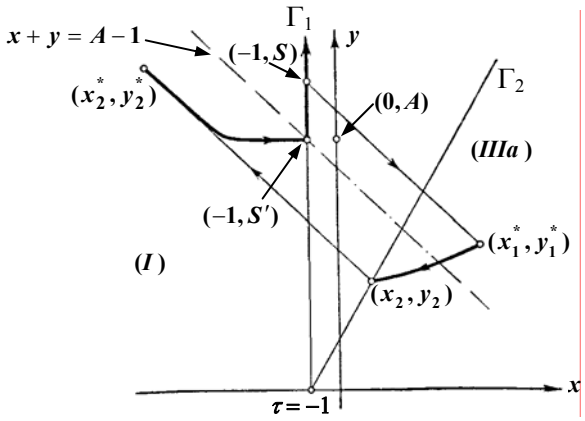


Рис. 2.11

Пусть S – ордината исходной точки (прообраза) на полупрямой Γ_1 :

$$x = -1,\ y \geq A - a_1.$$

Из этой точки изображающая точка по траектории «быстрого» движения «перепрыгивает» в точку (x_1^*, y_1^*), определяемую по S

соотношениями (2.17); затем по траектории «медленного» движения в области (*IIIa*) (или в областях (*IIIa*) и (*III*)) она выйдет на полупрямую Γ_2 в точке (x_2, y_2), откуда совершит скачок в точку (x_2^*, y_2^*), лежащую в области (*I*); и, наконец, изображающая точка, двигаясь по соответствующей траектории «медленного» движения в области (*I*), выйдет снова на полупрямую Γ_1 в некоторой точке $(-1, \overline{S})$, которая и будет последующей точкой (образом) в рассматриваемом точечном отображении Π:

$$\overline{S} = \Pi(S).$$

Очевидно, существует такой интервал $A - a_1 \le S < S_1$ исходных точек (прообразов) на полупрямой Γ_1, для которых точки (x_2, y_2) лежат ниже прямой $x + y = A - 1$ (дело в том, что при скачке изображающей точки величина $x + y$ не изменяется, так как не изменяется напряжение v на конденсаторе C, а в областях (*IIIa*) и (*III*) $d(x+y)/dt = -(a+b)x < 0$). Ниже этой прямой будут лежать и соответствующие точки (x_2^*, y_2^*), в силу чего при $b_1 << 1$ фазовые траектории в области (*I*), начинающиеся в точках (x_2^*, y_2^*), придут в малую окрестность траектории $y \approx A$ и выйдут на полупрямую Γ_1 в точках, близких к $(-1, A)$. Таким образом, при $A - a_1 \le S < S_1$ $\overline{S} \approx A$, т.е. график функции последования $\overline{S} = \Pi(S)$ на этом интервале изменения S близок к горизонтальной прямой. Нетрудно показать непосредственным вычислением функции последования, что при $S \ge S_1$ $\overline{S} < S$. Поэтому диаграмма Ламерея для рассматриваемого точечного отображения Π имеет вид, изображенный на рис. 2.12. Так как график функции последования имеет единственную точку пересечения $S = S^* = A$ с биссектрисой $\overline{S} = S$, причем в этой точке $\left| d\overline{S}/dS \right| << 1$, то точечное отображение Π имеет единственную, и

притом устойчивую, неподвижную точку $S = S^*$, которой на фазовой плоскости (x, y) соответствует единственный и устойчивый предельный цикл, пересекающий полупрямую Γ_1 в точке, близкой при $b_1 << 1$ к точке $(-1, A)$. К этому предельному циклу стремятся (при $t \to +\infty$) все остальные траектории, т.е. предельный цикл устойчив *глобально*. Иначе говоря, в блокинг-генераторе при любых начальных условиях устанавливается один и тот же режим разрывных автоколебаний.

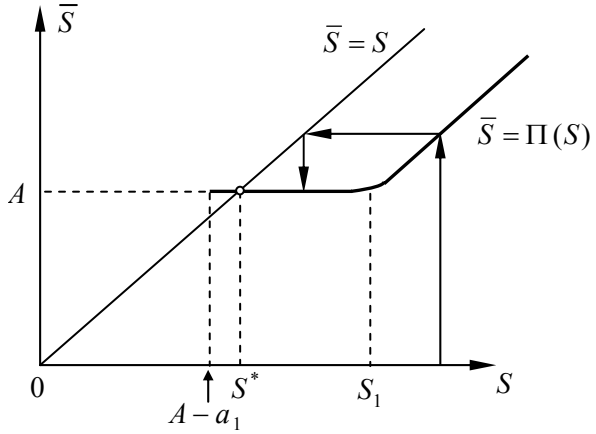


Рис. 2.12

Вид предельного цикла, а следовательно, и форма разрывных автоколебаний блокинг-генератора зависят главным образом от вида фазовых траекторий в области (*IIIa*), который, в свою очередь, зависит от значений параметров a_2 и b_2. На рис. 2.13 – 2.15 изображены предельные циклы и соответствующие им осциллограммы колебаний сеточного и анодного напряжений, а также анодного тока при различных значениях характеристического сопротивления блокинг-генератора $\rho = \sqrt{L/C}$: рис. 2.13 – для

$\rho >> 1/G, \sqrt{r_2/G}$ (т.е. для случая *емкостного* восстановления, в котором траектории в области (*IIIa*) близки к прямым $y - \frac{b_2}{a_2} x =$ $= \text{const}$ или $I = \text{const}$); рис. 2.14 – для ρ, имеющих порядок величин $1/G, \sqrt{r_2/G}$; рис. 2.15 – для $\rho << 1/G, \sqrt{r_2/G}$ (т.е. для случая *индуктивного* восстановления, когда траектории в области (*IIIa*) близки к прямым $x + y = \text{const}$ или $v = \text{const}$). Как видно из приведенных рисунков, импульс анодного тока i_a, а также анодного напряжения u_a и выходного напряжения, линейно зависящего от u_a, имеет наиболее плоскую вершину в случае, если величина $\sqrt{L/C}$ одного порядка с $1/G$ и $\sqrt{r_2/G}$, т.е. в случае «смешанного» (емкостно-индуктивного) восстановления состояний блокинг-генератора с запертой лампой.

Вычисления периода колебаний, длительности импульсов анодного тока, амплитуд напряжений и токов в установившемся режиме разрывных автоколебаний блокинг-генератора существенно упрощаются в результате того обстоятельства, что при $b_1 << 1$, т.е. при $\sqrt{L/C} << R$, предельный цикл пересекает полупрямую Γ_1 в точке, близкой к $(-1, A)$. В силу этого координаты концевой точки скачка (x_1^*, y_1^*), определяемой соотношениями (2.17), равны

$$x_1^* \approx \frac{A\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{1}{r_2}}{G + \frac{1}{r_2}} \approx A \frac{\frac{k^2}{R_0}}{S_g + \frac{k^2}{R_0} + \frac{k'^2}{R_н}},$$

$$y_1^* \approx \frac{A\left(G+\dfrac{1}{r_1}\right)-G}{G+\dfrac{1}{r_2}} = A\,\frac{S_g+\dfrac{k'^2}{R_н}}{S_g+\dfrac{k^2}{R_0}+\dfrac{k'^2}{R_н}} < A$$

и практически не зависят ни от C, ни от L.

Пусть $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ – уравнение фазовой траектории «медленного» движения в области (*IIIa*), начинающейся (при $t=0$) в точке (x_1^*, y_1^*) и являющейся дугой предельного цикла (иначе говоря, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ является решением системы (2.18), удовлетворяющим начальным условиям $\varphi(0)=x_1^*$, $\psi(0)=$ $=y_1^*$), и пусть эта траектория выходит на полупрямую Γ_2 (в точке (x_2, y_2)).

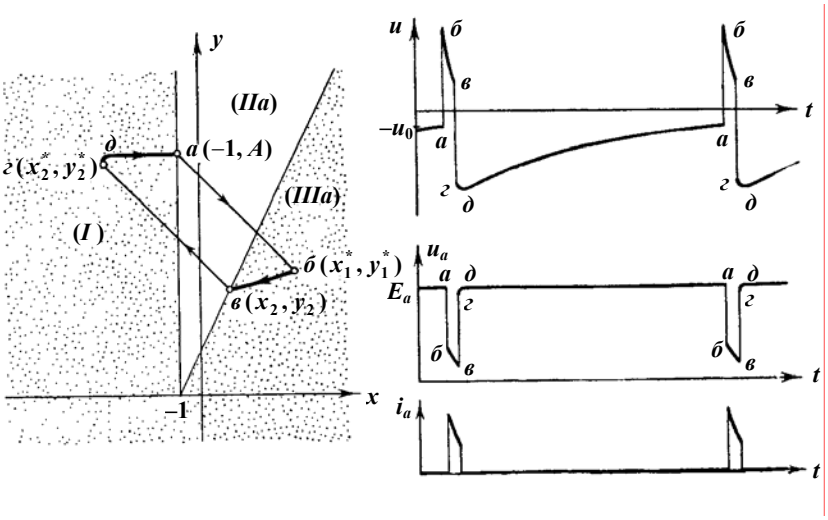


Рис. 2.13

Составим функцию

$$\Phi(t)=\frac{SR_0}{k}\left[1+\varphi(t)\right]-\psi(t)$$

($\Phi(t) > 0$ внутри области ($IIIa$)); тогда корень t' уравнения $\Phi(t) = 0$, очевидно, даст длительность импульсов анодного тока, генерируемых блокинг-генератором (в единицах безразмерного времени области (III)), а координатами точки выхода предельного цикла на полупрямую Γ_2 будут

$$x_2 = \varphi(t'), \quad y_2 = \psi(t').$$

(Если уравнение $\Phi(t) = 0$ имеет *несколько* корней (что может быть только при $(1 - a_2)^2 < 4b_2$), то под t' следует понимать *наименьший положительный корень* этого уравнения.) Соответственно длительность импульсов в единицах обычного времени будет равна

$$\tau = L\left(G + \frac{1}{r_2}\right)t'.$$

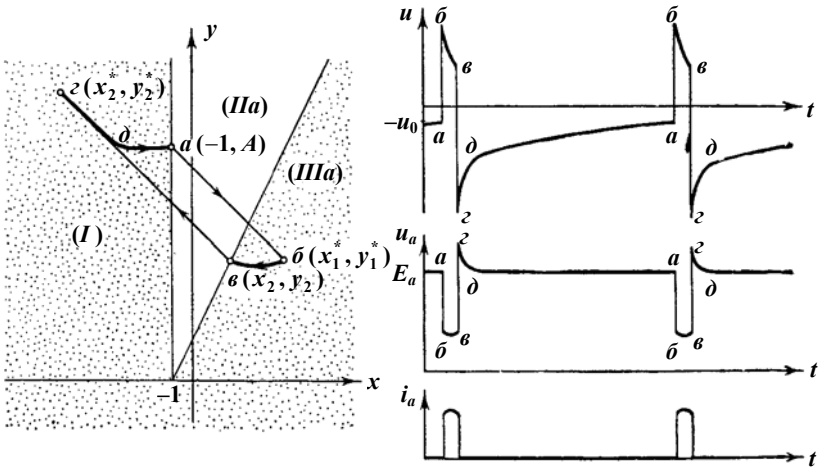


Рис. 2.14

Если же предельный цикл переходит в область (III) и лишь затем выходит на полупрямую Γ_2, то в этом случае, интегрируя уравнения колебаний блокинг-генератора в областях ($IIIa$) и (III)

и используя очевидное условие непрерывности траекторий при переходе через границу этих областей, следует найти уравнение дуги предельного цикла, лежащей в областях (*IIIa*) и (*III*):

$$x = \varphi_1(t_{\text{ст}}), \quad y = \psi_1(t_{\text{ст}}),$$

и составить функцию

$$\Phi_1(t_{\text{ст}}) = \frac{SR_0}{k}\left[1 + \varphi_1(t_{\text{ст}})\right] - \psi_1(t_{\text{ст}}).$$

Тогда корень уравнения $\Phi(t_{\text{ст}}) = 0$ будет являться длительностью импульса τ (в единицах обычного времени), а координатами точки (x_2^*, y_2^*) будут:

$$x_2 = \varphi_1(\tau), \quad y_2 = \psi_1(\tau).$$

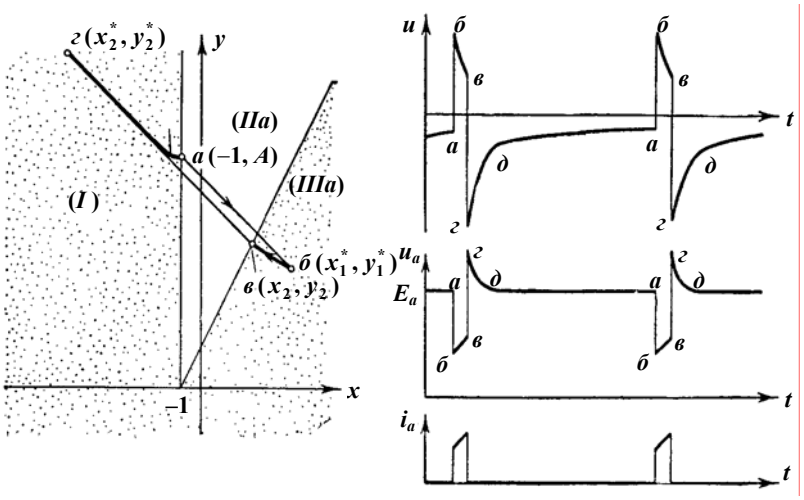


Рис. 2.15

Из точки (x_2, y_2) изображающая точка совершает мгновенный скачок (по отрезку траектории «быстрого» движения $x + y = \text{const}$) в точку (x_2^*, y_2^*) предельного цикла, определяемую соотношениями (2.19) и лежащую в области (*I*), и затем идет в об-

ласти (I) по траектории «медленного» движения (2.16а), начинающейся (пусть при $t=0$) в точке (x_2^*, y_2^*):

$$x \approx -\left[A-(x_2+y_2)\right]e^{-a_1 t} + (A-y_2^*)\,e^{-t},$$

$$y \approx A-(A-y_2^*)\,e^{-t}.$$

Пусть t_1 – момент выхода на полупрямую Γ_1 изображающей точки, двигающейся в области (I) по этой дуге предельного цикла; t_1, очевидно, определяется уравнением $x=-1$ или, поскольку $a_1 << 1$ (а следовательно, $e^{-t_1} << e^{-a_1 t_1}$), уравнением

$$-1 \approx -\left[A-(x_2+y_2)\right]e^{-a_1 t_1}.$$

Таким образом, длительность интервалов времени, в течение которых лампа блокинг-генератора заперта, равна

$$t_1 = \frac{1}{a_1}\ln\left[A-(x_2+y_2)\right]$$

в единицах безразмерного времени области (I) или

$$T_1 = \frac{L}{r_1}t_1 = CR\cdot\ln\left[A-(x_2+y_2)\right]$$

в единицах обычного времени.

Так как обычно длительность импульса $\tau << T_1$ [3], то период автоколебаний блокинг-генератора

$$T = T_1 + \tau \approx T_1.$$

2.2.5. Реализация в AnyLogic

Работа реализована в файле `Part6\BlockingGenerator.alp` (рис. 2.16). В окне анимации выведены уравнения динамики блокинг-генератора в исходных переменных (u, u_a) и обычном времени, под которыми располагается собственно анимированная картинка блокинг-генератора с индикацией прохождения токов и зарядов через систему. На конденсаторе яркость цветов пластин показывает величину (модуль) заряда, а красный и синий цвета – полярность заряда (при изменении полярности

цвета пластин меняются местами). Если через лампу идет *анодный* ток, то *справа* от лампы появляется *большая* красная стрелка, а если не идет, то стрелка исчезает. Аналогично, при прохождении через лампу *сеточного* тока *слева* от лампы появляется *малая* красная стрелка. Яркость стрелок пропорциональна силе соответствующих токов. Справа от анимированной картинки блокинг-генератора располагаются бегунки для изменения параметров L, R, C, n_1, n_2 и n_3 (значение параметра E_a в данной реализации равно 10).

В правой части окна анимации располагаются осциллограммы изменения напряжений u и u_a и анодного тока i_a.

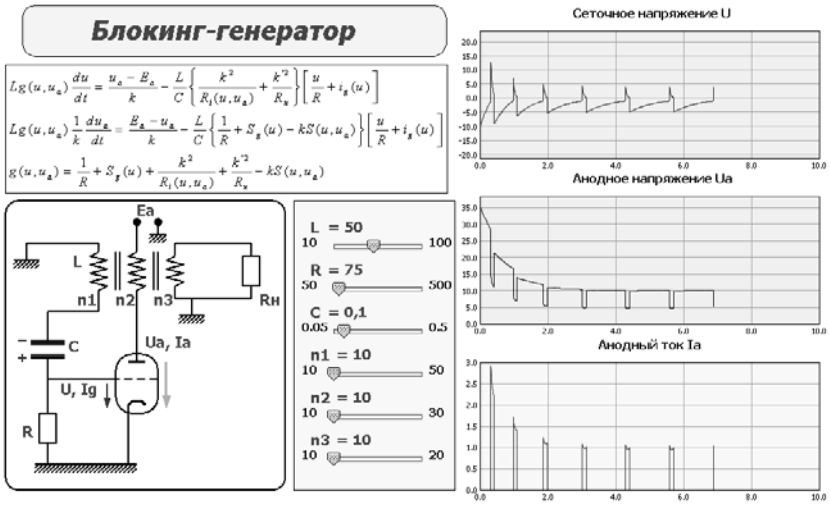


Рис. 2.16

2.2.6. Задания для эксперимента

1. Запустите модель в AnyLogic.

2. Экспериментально определите, как будут изменяться длительность импульса и период автоколебаний блокинг-генератора при изменении параметров L, R, C, n_1, n_2 и n_3. Проверьте экспе-

риментальные результаты на согласованность с теорией с помощью формул п. 2.2.4 (в данной реализации взята кусочно-линейная аппроксимация характеристик лампы со значениями $R_н = 5$, $u_0 = 1$, $S = 1$, $S_g = 0.1$, $R_0 = 5$).

2.3. Триггер

2.3.1. Модель

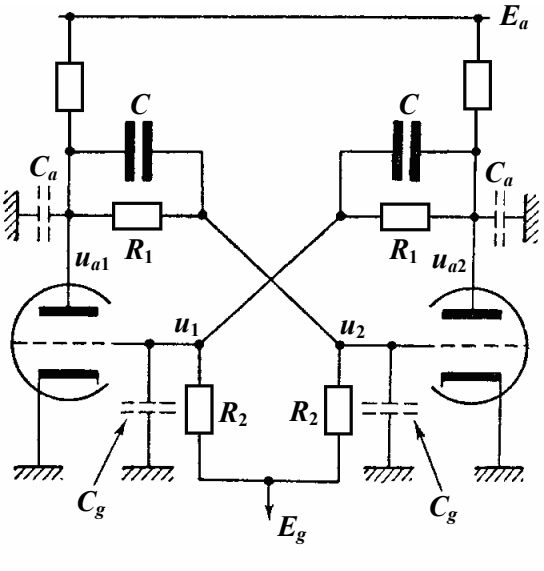


Рис. 2.17

Триггер или **симметричное реле** [3] – электрическая схема, в которую симметричным образом входят два одинаковых нелинейных элемента – радиолампы или транзисторы. На рис. 2.17 изображен ламповый триггер (емкости C_a и C_g изображают малые паразитные емкости схемы). Эта схема при определенных условиях имеет два устойчивых состояния равновесия и может быть переброшена из одного состояния равновесия в другое с помощью подачи соответствующего импульса напряжения в подхо-

дящий узел схемы. Триггеры использовались в катодных осциллографах, счетчиках электрических импульсов и вычислительных машинах.

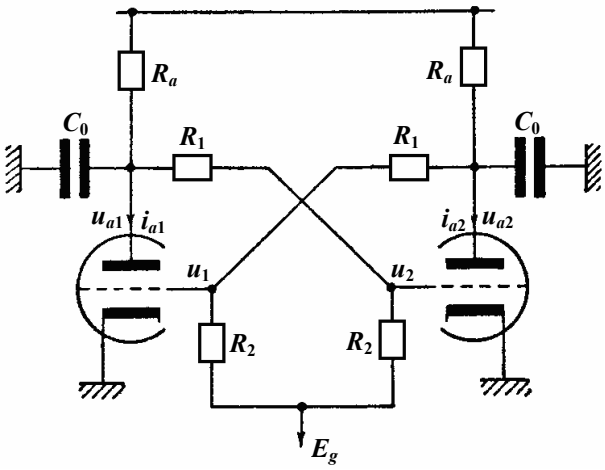


Рис. 2.18

Будем рассматривать упрощенную схему триггера (рис. 2.18), которая получается из полной схемы (рис. 2.17) в предположении, что сеточные токи отсутствуют и $CR_1 = C_g R_2$. Тогда коэффициент передачи β делителей напряжения, передающих колебания анодных напряжений на сетки ламп, получается постоянным и не зависящим от формы колебаний анодных напряжений:

$$\begin{aligned} u_1 - E_g &= \beta(u_{a2} - E_g), \\ u_2 - E_g &= \beta(u_{a1} - E_g), \end{aligned} \qquad (2.20)$$

где $\beta = R_2 / (R_1 + R_2)$, а эквивалентные емкости анодных узлов (емкости C_0 на рис. 2.18) равны $C_0 = C_a + \dfrac{CC_g}{C + C_g}$. Эта упрощенная схема, как мы увидим, описывается *двумя уравнениями первого порядка* (в то время как полная схема (рис. 2.17) при

$CR_1 \neq C_g R_2$ – системой *четвертого* порядка) и позволит нам рассмотреть работу триггера как реле, перебрасываемого из одного состояния равновесия в другое подачей импульса напряжения в *несимметричную* точку схемы, например на небольшое сопротивление, включенное в цепь катода (рис. 2.19). Для этой схемы (в обозначениях рис. 2.18) имеем следующие уравнения:

$$C_0 \frac{du_{a1}}{dt} + i_{a1} + \frac{u_{a1} - E_g}{R_1 + R_2} + \frac{u_{a1} - E_a}{R_a} = 0,$$
$$C_0 \frac{du_{a1}}{dt} + i_{a1} + \frac{u_{a1} - E_g}{R_1 + R_2} + \frac{u_{a1} - E_a}{R_a} = 0. \qquad (2.21)$$

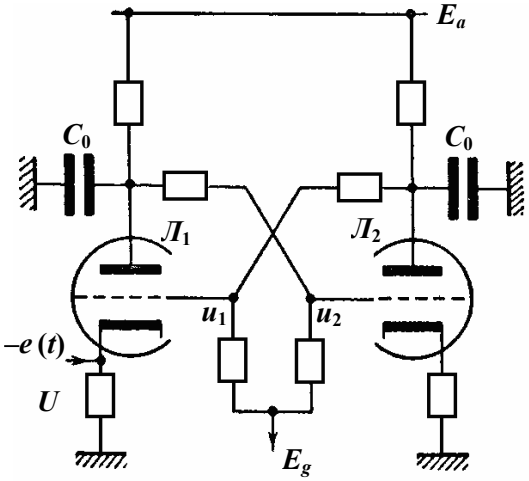


Рис. 2.19

Далее, пренебрегая анодной реакцией, будем считать, что анодный ток каждой из ламп является функцией только напряжения на ее сетке, т.е. $i_{a1} = f(u_1)$ и $i_{a2} = f(u_2)$. Относительно характеристики ламп $i_a = f(u)$ предположим, что она имеет вид, изображенный на рис. 2.20, т.е. обладает следующими свойствами:

1) ток является монотонно возрастающей функцией напряжения на сетке, т.е. $f'(u) \geq 0$, причем $0 \leq f(u) \leq I_s$, где I_s – ток насыщения;

2) крутизна характеристики $f'(u)$ имеет единственный максимум в некоторой точке u_0 и монотонно убывает до нуля при удалении от этой точки в обе стороны.

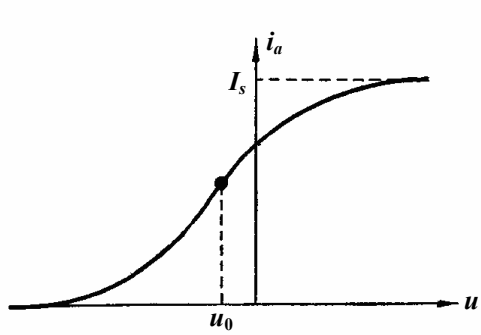


Рис. 2.20

Вводя в написанные уравнения колебаний (2.21) характеристику лампы, а также используя (2.20), можно привести эти уравнения к виду:

$$C_0 R \frac{du_1}{dt} = -u_1 - \beta R f(u_2) + E,$$
$$C_0 R \frac{du_2}{dt} = -u_2 - \beta R f(u_1) + E, \qquad (2.22)$$

где

$$R = \frac{R_a (R_1 + R_2)}{R_a + R_1 + R_2},$$

$$E = E_g + \beta \frac{R}{R_a}(E_a - E_g) = \frac{R_2 E_a + (R_1 + R_a) E_g}{R_a + R_1 + R_2},$$

или к одному уравнению первого порядка:

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_2 + \beta R f(u_1) - E}{u_1 + \beta R f(u_2) - E}. \qquad (2.23)$$

Состояния равновесия динамической системы (2.22) определяются уравнениями:

$$u_2 + \beta R f(u_1) - E = 0, \qquad (2.24а)$$

$$u_1 + \beta R f(u_2) - E = 0 \qquad (2.24б)$$

и могут рассматриваться как точки пересечения кривых (2.24а) и (2.24б) на фазовой плоскости (u_1, u_2) (заметим, что кривая (2.24а) является изоклиной горизонтального наклона, а кривая (2.24б) – изоклиной вертикального наклона для фазовых траекторий системы (2.22)).

Нетрудно видеть, что при любых значениях параметров существует «симметричное» состояние равновесия (U, U), лежащее на биссектрисе $u_1 = u_2$, которая является интегральной прямой уравнения (2.23). Действительно, уравнение, определяющее координаты этого состояния равновесия:

$$U + \beta R f(U) - E = 0,$$

в силу указанных выше свойств функции $f(u)$, всегда имеет одно и только одно решение, соответствующее единственной точке пересечения кривой $y = f(u)$ и прямой $y = (E - u)/(\beta R)$. Кроме этого «симметричного» состояния равновесия система может иметь и другие, не лежащие на интегральной прямой $u_1 = u_2$, но попарно ей симметричные (если точка (a, b) является состоянием равновесия, то состоянием равновесия будет и точка (b, a)); таким образом, общее число состояний равновесия всегда *нечетное*. Для отыскания состояний равновесия нужно построить кривые (2.24а) и (2.24б) и найти их точки пересечения. Такое построение дано на рис. 2.21*а* – для случая $\beta R f'(U) < 1$, когда имеется только одно («симметричное») состояние равновесия, и на рис. 2.21*б* – для случая $\beta R f'(U) > 1$, когда имеются три состояния равновесия.

Для исследования устойчивости состояний равновесия будем использовать метод первого приближения. Пусть (u_1^0, u_2^0) – ко-

ординаты состояния равновесия системы (2.22). Введем новые переменные $\xi = u_1 - u_1^0$ и $\eta = u_2 - u_2^0$; тогда линеаризованная система в окрестности состояния равновесия имеет вид:

$$C_0 R \frac{d\xi}{dt} = -\xi - \beta R f'(u_2^0)\eta, \quad C_0 R \frac{d\eta}{dt} = -\eta - \beta R f'(u_1^0)\xi,$$

а характеристическое уравнение таково:

$$\begin{vmatrix} C_0 R\lambda + 1 & \beta R f'(u_2^0) \\ \beta R f'(u_1^0) & C_0 R\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

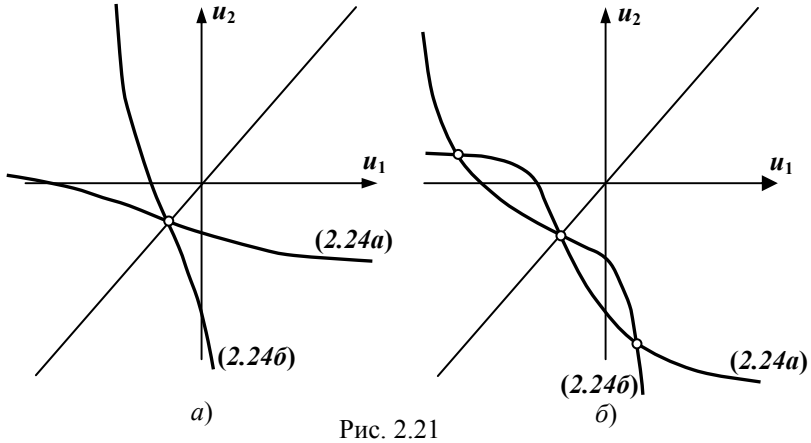


Рис. 2.21

Корни характеристического уравнения:

$$C_0 R\lambda_{1,2} = -1 \pm \beta R\sqrt{f'(u_1^0)\, f'(u_2^0)}.$$

Следовательно, «симметричное» состояние равновесия (U,U) при $\beta R f'(U) < 1$ является устойчивым узлом, а при $\beta R f'(U) > 1$ – седлом. Отсюда с учетом того, что было сказано выше о количестве состояний равновесия системы (2.22), получаем, что «симметричное» состояние равновесия устойчиво, если оно единственно, и неустойчиво, если состояний равновесия три (остальные два состояния равновесия будут устойчивыми узлами).

Далее, если обозначить правые части системы (2.22) через $P(u_1, u_2)$ и $Q(u_1, u_2)$, то на всей фазовой плоскости (u_1, u_2) выражение $\frac{\partial P}{\partial u_1} + \frac{\partial Q}{\partial u_2}$ сохраняет знак, а именно

$$\frac{\partial P}{\partial u_1} + \frac{\partial Q}{\partial u_2} = -2 < 0.$$

Отсюда по критерию Бендиксона следует, что система (2.22) не имеет ни замкнутых траекторий, ни контуров, составленных из замкнутых траекторий.

Нетрудно также видеть, что из бесконечности все фазовые траектории входят в некоторую ограниченную область фазовой плоскости. Действительно, рассмотрим функцию

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2} C_0 R (u_1^2 + u_2^2),$$

для которой линиями уровня $V(u_1, u_2) = A^2 = \text{const}$ являются окружности с центром в точке $(0, 0)$, причем для каждого A радиус соответствующей окружности пропорционален A. Производная функции V по времени в силу системы (2.22) равна

$$\frac{dV}{dt} = -(u_1^2 + u_2^2) - \beta R \left[u_1 f(u_2) + u_2 f(u_1) \right] + E(u_1 + u_2);$$

эта величина отрицательна при достаточно больших по модулю значениях u_1 и u_2. Следовательно, все фазовые траектории входят внутрь окружности $V(u_1, u_2) = A^2$ некоторого радиуса A.

Всех этих сведений достаточно для построения фазового портрета системы (2.22) на плоскости (u_1, u_2). Качественная картина фазового портрета изображена на рис. 2.22*а* (для случая $\beta R f'(u) < 1$) и на рис. 2.22*б* (для случая $\beta R f'(u) > 1$).

Рассмотрим теперь процесс переброски триггера из одного состояния равновесия в другое при подаче импульса напряжения на одну из ламп. Пусть $\beta R f'(u) > 1$ и триггер в начале работы

находится в состоянии равновесия, соответствующем узлу $У_1$ на фазовой плоскости, когда лампа $Л_1$ заперта, а лампа $Л_2$ отперта.

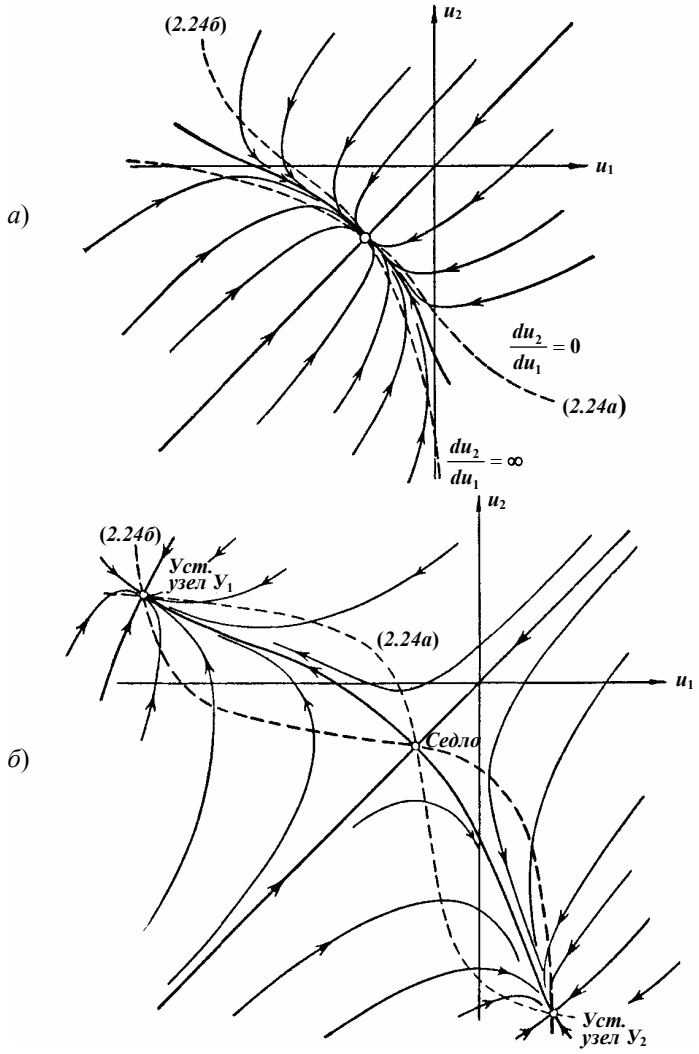


Рис. 2.22

Пусть на лампу $Л_1$ податся короткий импульс напряжения, отпирающий ее (например, отрицательный импульс на катодное сопротивление этой лампы; см. рис. 2.19). Уравнения схемы при наличии добавочного напряжения $e(t)$, подведенного к лампе $Л_1$, имеют вид:

$$\begin{aligned} C_0 R \frac{du_1}{dt} &= -u_1 - \beta R f(u_2) + E, \\ C_0 R \frac{du_2}{dt} &= -u_2 - \beta R f\left[u_1 + e(t)\right] + E. \end{aligned} \qquad (2.25)$$

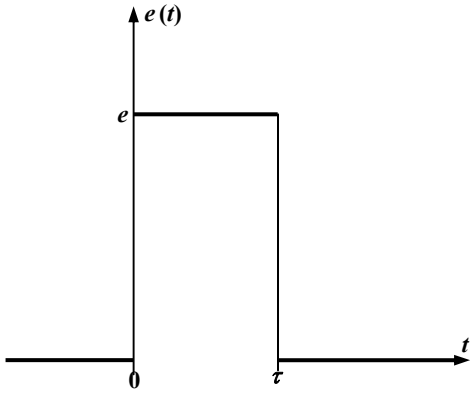


Рис. 2.23

Считая импульс прямоугольным, с плоской вершиной (рис. 2.23), мы можем во время действия импульса (при $0 < t < \tau$) рассматривать систему (2.25) как автономную и построить ее фазовый портрет на плоскости (u_1, u_2) (он, конечно, будет отличаться от портрета, построенного нами ранее для $e = 0$). По-прежнему каждое движение приводит систему в одно из устойчивых состояний равновесия (устойчивые состояния равновесия – опять узлы). Состояния равновесия теперь определяются как точки пересечения кривых

$$u_2 + \beta R f(u_1 + e) - E = 0 \quad \text{и} \quad u_1 + \beta R f(u_2) - E = 0,$$

первая из которых получается из кривой (2.24а) сдвигом влево на e (мы считаем, что $e > 0$), а вторая совпадает с кривой (2.24б).

Пусть амплитуда импульса e настолько велика, что во время действия импульса триггер имеет одно состояние равновесия $У$ (оно будет устойчивым узлом) справа от биссектрисы (рис. 2.24).

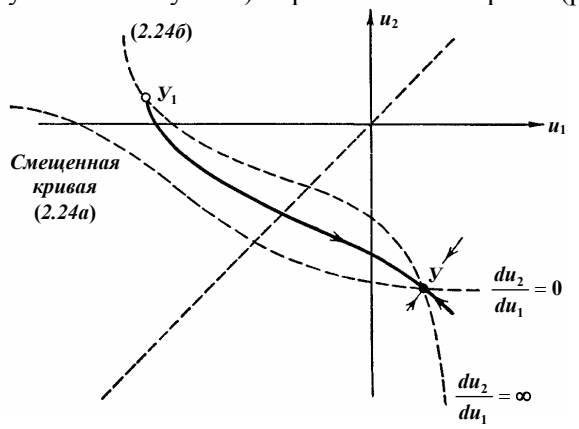


Рис. 2.24

Будем считать крутизны переднего и заднего фронтов импульса настолько большими, что за время их прохода состояние системы не успевает заметно измениться (емкости схемы не успевают заметно изменить заряды). Тогда непосредственно после прохода переднего фронта импульса (при $t = 0$) состояние системы будет изображаться на фазовой плоскости (рис. 2.24) точкой $У_1$, которая до прихода импульса была устойчивым узлом, но во время действия импульса является обыкновенной (неособой) точкой. По соответствующей фазовой траектории изображающая точка пойдет согласно уравнениям (2.25) к устойчивому узлу $У$. Если за время действия импульса (т.е. до $t = \tau$) она перейдет через биссектрису $u_1 = u_2$, то после прекращения импульса (при $t = \tau$) она окажется в области притяжения узла $У_2$ на фазовой плоскости (рис. 2.22*б*) и в дальнейшем будет асимптотически к нему приближаться. Таким образом, если импульс имел достаточно боль-

шую амплитуду e и длительность τ, то он перебросит триггер из состояния равновесия $У_1$ в состояние равновесия $У_2$. Заметим, что после повторной подачи *такого же* импульса триггер, конечно, останется *в состоянии равновесия* $У_2$ (для *обратного переброса* необходим импульс *противоположного знака*).

2.3.2. Реализация в AnyLogic

Работа реализована в файле `Part6\Trigger.alp` (рис. 2.25). В окне анимации изображена схема триггера с индикацией анодных токов, идущих через лампы, напряжений на сетках ламп и импульсов напряжения, подаваемого на катодное сопротивление левой лампы. Если через какую-либо лампу идет анодный ток, то рядом с нею (для левой лампы – слева от нее, для правой – справа) появляется стрелка, яркость которой пропорциональна силе соответствующего анодного тока.

Подача импульсов производится с помощью кнопок, расположенных под анимированной картинкой триггера. Для начала подачи импульса $e(t)$ нужно нажать кнопку «`Начало положительного импульса`» или «`Начало отрицательного импульса`» (в зависимости от того, какой должна быть полярность импульса); модуль $e(t)$ задан жестко и равен 500. Импульс будет длиться до тех пор, пока не будет нажата кнопка «`Конец импульса`».

Данная реализация снабжена цветовой индикацией токов и напряжений. Анодные токи через лампы помечаются красными стрелками различной яркости. Напряжения отмечаются цветом в зависимости от полярности (при этом яркость цветов пропорциональна величине напряжения). Если напряжение на сетке какой-либо лампы положительное, то сетка окрашена в красный цвет, а катод – в синий, при отрицательном сеточном напряжении – наоборот. Стрелка, показывающая импульс напряжения $e(t)$, окрашена в красный цвет, если подается положительный импульс, в синий, если импульс отрицательный, и в черный, если импульс не подается (импульс не подается в начальный момент времени, т.е.

при запуске модели, а также после нажатия кнопки «Конец импульса»).

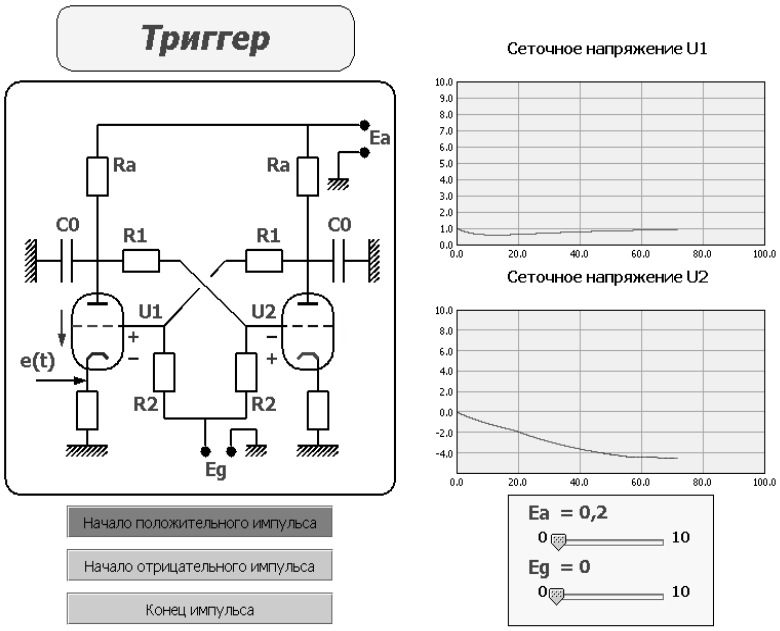


Рис. 2.25

В правой части окна анимации выведены осциллограммы сеточных напряжений обеих ламп, под которыми расположены бегунки для изменения параметров E_a и E_g. В отдельном окне (не в составе анимации) выводится фазовый портрет на плоскости (u_1, u_2).

2.3.3. Задания для эксперимента

1. Запустите модель в AnyLogic.

2. Осуществите несколько перебросок триггера из одного состояния равновесия в другое, подавая импульсы. Эксперимен-

тально выясните, как влияют величины параметров E_a и E_g на скорость прихода траекторий в состояния равновесия при переброске с помощью импульсов (скорость можно измерять временем прихода траектории в заданную ε-окрестность состояния равновесия). Согласуются ли экспериментальные результаты с аналитическими? (Характеристика каждой лампы в данной реализации взята в виде $f(u) = 1 + \mathrm{th}\, u$, где th – гиперболический тангенс.)

3. Неустойчивость и автоколебания, вызываемые трением

3.1. Модель

В привычном представлении трение, являясь силой, направленной против движения, приводит к торможению и прекращению движения. Однако наличие трения может приводить и к возбуждению автоколебаний. В этом есть что-то парадоксальное, но парадокс разрешается тем, что трение выступает в роли *распределителя энергии* от другого, стороннего источника (*вызывать* же колебания трение само по себе, конечно же, *не может*).

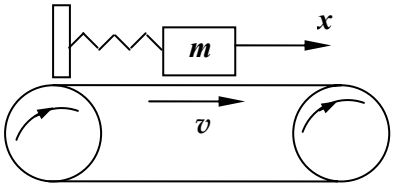


Рис. 3.1

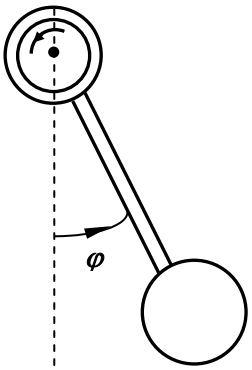


Рис. 3.2

В качестве примера системы с парадоксальной ролью сухого трения рассмотрим модель в виде грузика на пружине с закрепленным концом (физического маятника), скользящего с сухим трением по горизонтальной плоскости. При этом сама горизонтальная плоскость движется с постоянной скоростью v. Такая система может быть реализована, например, в виде ленты транспортера, по которой движется грузик на пружине (рис. 3.1). В несколько другом физическом виде модель предстает в виде **маятника Фроуда**, представляющего собой обычный маятник, насаженный с помощью муфты на ось, вращающуюся с постоянной угловой скоростью (рис. 3.2). При этом ось вращается в муфте с некоторым не очень большим трением, чтобы маятник мог качаться на ней, но не вращался вместе с нею. Реальными прототипами данной схематической модели могут служить тормозные колодки автомобиля, трамвая, железнодорожного вагона, а также (с некоторой долей условности) скрипичная струна, по которой скользит смычок.

В системе, изображенной на рис. 3.1, обозначим через m массу грузика, через x – смещение грузика относительно положения, соответствующего недеформированной пружине, через k – коэффициент жесткости пружины, а через F – силу трения грузика о движущуюся плоскость опоры. Тогда уравнение Ньютона запишется в виде:

$$m\ddot{x} = -kx + F. \tag{3.1}$$

Первая математическая модель силы сухого трения была предложена в XVIII веке Ш. Кулоном и называется **кулоновским трением**. Согласно этой модели сила трения не зависит от взаимной скорости трущихся поверхностей, направлена против скорости и по величине пропорциональна нормальному давлению, так что

$$F = F_0 \operatorname{sign}(v - \dot{x}) \tag{3.2}$$

(при $\dot{x} \neq v$). При $\dot{x} = v$ (т.е. когда масса движется вместе с плоскостью без проскальзывания) сила трения (**сила трения покоя**) может быть *любой* в пределах от $-F_0$ до F_0. Это означает, что

любая сила, по величине меньшая F_0, не может сдвинуть массу, покоящуюся относительно движущейся плоскости. Движение начинается, когда действующая сила по величине превзойдет F_0. В соответствии с этим примем, что sign 0 означает любую величину между –1 и +1. Соотношение (3.2) с доопределением функции sign при нулевом аргументе является математической моделью кулоновского трения. Уравнение движения теперь можно записать в виде:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \operatorname{sign}(v - \dot{x}). \qquad (3.3)$$

Дифференциальное уравнение (3.3) – это математическая модель рассматриваемой системы, и выяснение ее динамики сводится к рассмотрению фазового портрета динамической системы (3.3).

Фазовым пространством динамической системы (3.3) является плоскость фазовых переменных $(x, y = \dot{x})$. В полуплоскостях $y < v$ и $y > v$ движения фазовых точек подчиняются, согласно (3.3), уравнениям

$$m\ddot{x} + kx = \mp F_0, \qquad (3.4)$$

каждое из которых является линейным (гармоническим) осциллятором с состоянием равновесия, соответственно, в точке $(x = -F_0/k,\ y = \dot{x} = 0)$ и $(x = F_0/k,\ y = \dot{x} = 0)$. Это позволяет непосредственно нарисовать фазовые траектории отдельно в каждой из полуплоскостей $y < v$ и $y > v$ (рис. 3.3).

Движение фазовой точки на этом рисунке определено всюду, кроме точек линии $\dot{x} = y = v$. Эта линия разбивается на три части: 1) луч $(-\infty, O_1)$, по отношению к которому фазовые траектории приходят снизу и уходят сверху; 2) отрезок $[O_1, O_2]$, на который фазовые траектории приходят и снизу, и сверху; 3) луч (O_2, ∞), по отношению к которому траектории приходят сверху и уходят снизу.

На лучах $(-\infty, O_1)$ и (O_2, ∞) в силу непрерывности изменения скорости $y = \dot{x}$ и координаты x естественно предположить, что

при своем движении фазовая точка пересекает их, соответственно, снизу вверх и сверху вниз. Что же касается отрезка $[O_1, O_2]$, то естественно принять, что фазовая точка, придя к этому отрезку снизу или сверху, остается на нем, двигаясь вдоль него согласно тому, что на нем $y = \dot{x} = v$, и после достижения точки O_2 она покидает отрезок $[O_1, O_2]$, переходя в нижнюю полуплоскость.

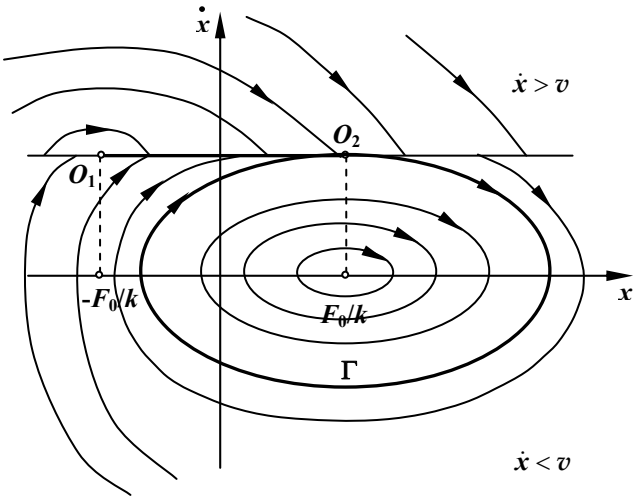


Рис. 3.3

Физический смысл описанных движений фазовой точки состоит в следующем. Движение грузика по опорной плоскости (ленте транспортера) может происходить как *с проскальзыванием*, так и *без проскальзывания* (т.е. вместе с лентой). В полуплоскостях $y < v$ и $y > v$ движения грузика всюду происходят с проскальзыванием. На лучах $(-\infty, O_1)$ и (O_2, ∞) имеют место *мгновенные остановки* грузика относительно ленты, вызванные сменой направления проскальзывания, совершаемого со скоростью $v - \dot{x}$. На отрезке $[O_1, O_2]$ проскальзывания нет, грузик движется вместе с лентой со скоростью v (так называемый **скользящий режим**). На этом отрезке $\dot{x} = y = v$. На отрезке $[O_1, O_2]$ сила тре-

ния – это сила трения покоя. На нем в течение конечного времени $y = v$ и $\dot{y} = 0$ и поэтому в силу уравнения (3.3) имеет место равенство

$$kx = F_0 \text{ sign } 0.$$

Так как на отрезке $[O_1, O_2]$ $-F_0/k < x < F_0/k$, то сила натяжения пружины kx не превосходит величины силы трения покоя F_0 и проскальзывания не возникает. Напротив, на лучах $(-\infty, O_1)$ и (O_2, ∞) остановка имеет *мгновенный* характер, так как на них сила натяжения пружины kx превосходит предельную величину силы трения покоя F_0.

Общая картина фазового портрета, изображенного на рис. 3.3, следующая. Имеется состояние равновесия $(x = F_0/k, \quad y = 0)$, являющееся центром (неасимптотическая устойчивость). Возле него возможно *бесконечное множество гармонических колебаний* до некоторой предельной амплитуды, отвечающей кривой Г. Эти гармонические колебания *не затухают, несмотря на наличие трения,* т.е. трение как бы *исчезает*. Все остальные движения после нескольких колебаний с уменьшающимся размахом приводят к вре́менному движению грузика вместе с лентой транспортера (движение фазовой точки по отрезку $[O_1, O_2]$), после чего возникают гармонические колебания, отвечающие замкнутой фазовой кривой Г.

Однако эксперимент показывает, что никакого *бесконечного множества периодических движений* на самом деле *нет*. Реально равновесие может быть *неустойчивым* и либо имеется *одно* периодическое движение (предельный цикл), либо нет *ни одного* периодического движения. Противоречие между экспериментом и полученными теоретическими результатами разрешается, если уточнить модель сухого трения (по-видимому, и ничтожные отличия от закона Кулона могут привести к таким существенным расхождениям).

Закону Кулона отвечает график зависимости силы сухого трения F от взаимной скорости u трущихся поверхностей, представленный на рис. 3.4. Эксперимент же дает несколько другие гра-

фики. Они в основном трех следущих типов: 1) $|F|$ возрастает с увеличением $|u|$; 2) $|F|$ убывает с увеличением $|u|$; 3) с ростом $|u|$ величина $|F|$ сначала убывает, а затем возрастает.

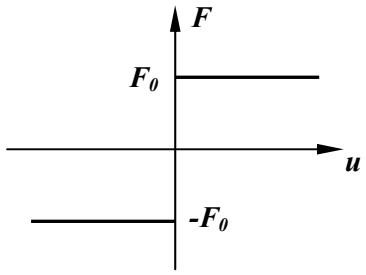
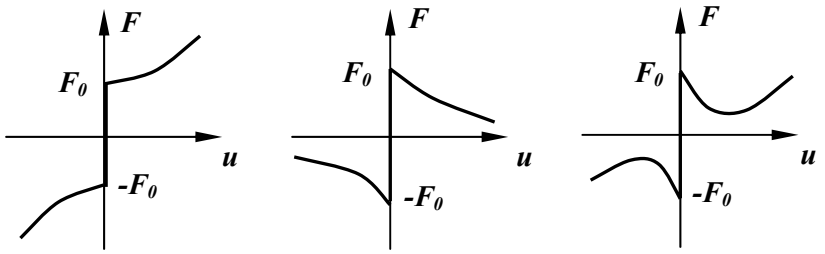


Рис. 3.4



а) *б*) *в*)

Рис. 3.5

На рис. 3.5 изображены перечисленные три типа графиков. Для первых двух типов (*а*, *б*) естественна кусочно-линейная аппроксимация, при которой сила трения равна

$$F = F_0 \operatorname{sign} u + \beta u, \tag{3.5}$$

где u – взаимная скорость трущихся поверхностей, в нашем случае $u = v - \dot{x}$. Для графика третьего типа (*в*) аппроксимируем силу трения полиномом третьей степени:

$$F = F_0 \operatorname{sign} u + \beta u + \gamma u^3. \tag{3.6}$$

Эти аппроксимации, естественно, могут быть хорошими только при ограниченных значениях u.

В случае (3.5) математическая модель рассматриваемой системы примет вид:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \operatorname{sign}(v - \dot{x}) + \beta u, \qquad (3.7)$$

а в случае (3.6) – вид:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \operatorname{sign}(v - \dot{x}) + \beta u + \gamma u^3, \qquad (3.8)$$

где β и γ малы.

В общем же случае уравнение уточненной математической модели можно записать в виде:

$$m\ddot{x} + kx = F(u), \;\; u = v - \dot{x}, \qquad (3.9)$$

где $F(u)$ – кусочно-гладкая функция, имеющая разрыв непрерывности при $u = 0$. Ясно, что математическая модель (3.9) содержит модели (3.7) и (3.8) как частные случаи.

Исследование начнем с самой общей модели (3.9), но оно коснется только ее состояния равновесия $(x = F(v)/k, \dot{x} = 0)$, в котором сила трения уравновешивается силой натяжения пружины. Для исследования устойчивости состояния равновесия нужно рассмотреть движения, близкие к этому равновесию. Введем новую переменную

$$\xi = x - \frac{F(v)}{k}$$

и запишем уравнение (3.9) в виде:

$$m\ddot{\xi} + k\xi = F(u) - F(v) = -\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{u=v} \dot{\xi} + \ldots$$

Пренебрегая в дальнейшем членами высокого (не ниже второго) порядка малости, получаем линеаризованное уравнение:

$$m\ddot{\xi} + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{u=v} \dot{\xi} + k\xi = 0.$$

Это уравнение линейного (гармонического) осциллятора, состояние равновесия которого $(\xi = 0, \dot{\xi} = 0)$ асимптотически устойчиво при $\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{u=v} > 0$ и неустойчиво при противоположном строгом неравенстве.

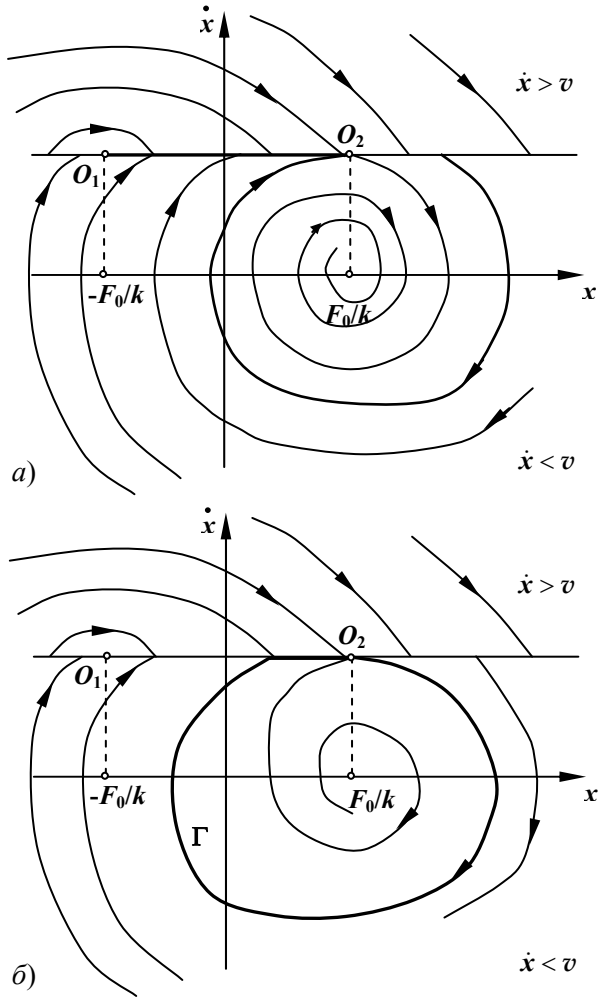


Рис. 3.6

Таким образом, если скорости v отвечает *восходящий* (*растущий)* участок характеристики трения, то равновесие *устойчиво*, а если *нисходящий* (*падающий*), то *неустойчиво*. Это общее

утверждение, полученное из общей модели (3.9), верно, конечно, и для моделей (3.7) и (3.8). Характеристика трения модели (3.7) качественно изображена на рис. 3.5*а* (при $\beta > 0$) и 3.5*б* (при $\beta < 0$). Для нее

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{u=v} = \beta.$$

Для модели (3.8) (ее характеристика изображена на рис. 3.5*в*)

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{u=v} = \beta + 3\gamma v^2.$$

Поэтому состояние равновесия $(x = F(v)/k, \dot{x} = 0)$ в этих моделях устойчиво, соответственно, при положительных β и $\beta + 3\gamma v^2$ и неустойчиво при отрицательных.

Дальнейшее исследование динамики модели требует уточнения вида характеристики трения, поэтому обратимся к более конкретизированным моделям (3.7) и (3.8).

Рассмотрим уравнение (3.7). В полуплоскостях $\dot{x} > v$ и $\dot{x} < v$ фазовой плоскости $(x, y = \dot{x})$ оно принимает вид:

$$m\ddot{x} + kx = \mp F_0 + \beta u, \qquad (3.10)$$

т.е. в каждой из этих полуплоскостей уравнение является линейным осциллятором с состоянием равновесия, смещенным в точку $(x = \beta v/k \mp F_0/k, \dot{x} = 0)$ (по отношению к привычной записи, когда равновесие находится в точке $x = \dot{x} = 0$). Величина β по предположению мала, поэтому фазовые портреты этих осцилляторов представляют собой устойчивый фокус при $\beta > 0$ и неустойчивый фокус при $\beta < 0$. При этом «скручивание» и «раскручивание» фазовых траекторий происходит *медленно* (в силу малости β), так что существенное изменение фазовых траекторий уравнений (3.10) по отношению к фазовым траекториям ранее рассмотренных уравнений (3.4) произойдет *только с замкнутыми траекториями, охватывающими точку* $(F_0/k, 0)$ (рис. 3.3). Эти изменения при $\beta > 0$ и $\beta < 0$ различны и представлены на

рис. 3.6*а* и 3.6*б* (ранее рассмотренный случай относится к $\beta = 0$). В первом случае ($\beta > 0$, рис. 3.6*а*) всякое движение заканчивается устойчивым состоянием равновесия с координатами $(F_0/k, 0)$. Во втором случае ($\beta < 0$, рис. 3.6*б*) это равновесие неустойчиво и всякое движение заканчивается устойчивым периодическим движением – автоколебанием, изображаемым на рис. 3.6*б* замкнутой кривой – предельным циклом Г (выделен жирной линией).

Теперь перейдем к модели (3.8). Исследовать ее будем по аналогии с уравнением Ван-дер-Поля [1, 2]. Пусть $v > 0$ и $\dot{x}$ мало. Запишем уравнение (3.8) в виде:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 + \beta v + \gamma v^3 + (-\beta - 3\gamma v^2)\dot{x} + 3\gamma v\dot{x}^2 - \gamma\dot{x}^3 =$$
$$= a_0 + a_1\dot{x} + a_2\dot{x}^2 + a_3\dot{x}^3.$$

Это дифференциальное уравнение после замены переменных $\xi = x - a_0/k$ приводится к виду:

$$\ddot{\xi} - 2\delta(1 - a\dot{\xi} - b\dot{\xi}^2)\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0, \qquad (3.11)$$

где $2\delta = a_1/m$, $a = a_2/ma_1$, $b = a_3/ma_1$ и $\omega^2 = k/m$. При $a = 0$ оно очень похоже на уравнение Ван-дер-Поля. Член же $a\dot{\xi}$, как будет видно из дальнейшего, несущественен.

Как и для уравнения Ван-дер-Поля, для уравнения (3.11) примем, что $\xi = A\cos(\omega t + \varphi)$ с дополнительным условием $\dot{\xi} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$, где $A = A(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ – *медленно меняющиеся* функции времени ($\dot{A} \approx 0$ и $\dot{\varphi} \approx 0$). Найдем в силу динамической системы (3.11) производную по времени от полной энергии $E = (\dot{\xi}^2 + \omega^2\xi^2)/2$ соответствующего осциллятора (в пренебрежении членами, содержащими производные $\dot{A}$ и $\dot{\varphi}$, т.е. в предположении, что $\dot{A} = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\omega^2 A^2}{2} = \dot{\xi}\ddot{\xi} + \omega^2\xi\dot{\xi} = \left[2\delta(1 - a\dot{\xi} - b\dot{\xi}^2)\dot{\xi}\right]\dot{\xi} =$$
$$= 2\delta\left[1 + a\omega A\sin(\omega t + \varphi) - b\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi)\right]\times \qquad (3.12)$$

$$\times \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Интегрируя (3.12) по периоду $2\pi/\omega$, получаем:

$$\Delta \frac{\omega^2 A^2}{2} = \left(\delta\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}\delta b \omega^4 A^4 \right) \frac{2\pi}{\omega},$$

или

$$\Delta A^2 = \frac{4\pi\delta A^2}{\omega} - 2\pi\delta b \omega A^4, \qquad (3.13)$$

где $\Delta A^2 = A_{n+1}^2 - A_n^2$ – приращение величины A^2 за период.

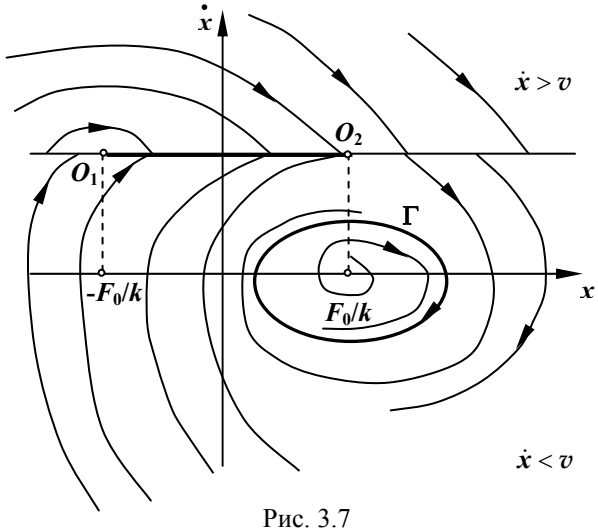


Рис. 3.7

Из (3.13) следует рекуррентное соотношение для последовательных амплитуд A_n и A_{n+1}:

$$A_{n+1}^2 = \left(1 + \frac{4\pi\delta}{\omega}\right) A_n^2 - 2\pi\delta\omega A_n^4, \qquad (3.14)$$

которое можно рассматривать как точечное отображение полупрямой в себя. Его неподвижной точке $A = 0$ соответствует состояние равновесия, устойчивое при $\delta < 0$ и неустойчивое при

$\delta > 0$. При $b > 0$ у отображения (3.14) имеется еще одна неподвижная точка

$$A^* = b\omega^2/2, \tag{3.15}$$

которая соответствует предельному циклу и устойчива при $\delta > 0$, т.е. при неустойчивости равновесия.

Для характеристики трения, имеющей вид рис. 3.5*в* и аппроксимируемой полиномом (3.6), в случае попадания значения скорости v на падающий участок этой характеристики имеют место неравенства $\delta > 0$ и $b > 0$ и, следовательно, состояние равновесия неустойчиво и возникают автоколебания, амплитуда которых приближенно определяется формулой (3.15) (рис. 3.7). Предельный цикл Г на рис. 3.7 выделен жирной линией.

3.2. Реализация в AnyLogic

Работа реализована в файле `Part7\FroudePendulum.alp` (рис. 3.8). В левой части окна анимации с помощью радиокнопки из группы «`Тип трения`» можно выбирать вид характеристики сухого трения $F(u)$ $(u = v - \dot{x})$ (кулоновское трение, линейная аппроксимация, кубическая аппроксимация). Выше радиокнопок отображается качественный вид графика. Под радиокнопками располагаются бегунки, позволяющие изменять параметры характеристики трения (параметр, обозначенный как «`alpha`», связан с величиной силы трения покоя F_0), а также значение скорости ленты транспортера v. Правее размещаются бегунки для изменения параметров грузика (маятника) – массы и упругости, а также начальных условий (координаты и скорости маятника).

В правой верхней части окна анимации располагается анимированное изображение грузика на пружине с закрепленным концом, скользящего по движущейся ленте транспортера. Лента снабжена делениями (черточками), позволяющими визуально отслеживать скорость движения грузика относительно ленты, в том числе скользящий режим (движение грузика по ленте без проскальзывания).

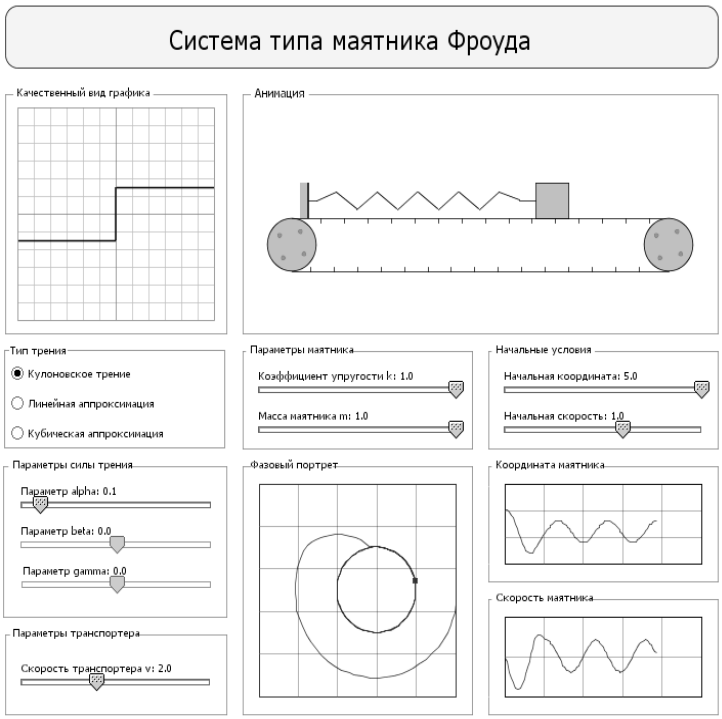


Рис. 3.8

В нижней части окна анимации располагается фазовый портрет на плоскости $(x, \dot{x})$ (выполнен с использованием новых библиотек AnyLogic версии 5.4.1, так как стандартные диаграммы AnyLogic, помещаемые внутрь анимации, позволяют выводить только осциллограммы, но не фазовые портреты), а также осциллограммы изменения координаты грузика (маятника) x и скорости $\dot{x}$.

3.3. Задания для эксперимента

1. Запустите модель в AnyLogic.

2. Пронаблюдайте за динамикой системы при различных видах характеристики сухого трения и различных начальных усло-

виях. Обратите внимание на скользящий режим. Как зависят амплитуда и период автоколебаний от массы грузика, жесткости пружины, скорости ленты транспортера и параметров характеристики сухого трения? Какие параметры наиболее существенно влияют на амплитуду и период автоколебаний?

4. Параметрическое возбуждение и стабилизация

4.1. Модель

Рассмотрим маятник, движущийся без трения, точка подвеса которого колеблется как по горизонтали, так и по вертикали (рис. 4.1). Направим ось OX вправо, а ось OY – вниз. Пусть смещение точки подвеса по горизонтали происходит по некоторому заданному закону $u = u(t)$, а по вертикали – по заданному закону $v = v(t)$, и пусть φ – угол отклонения маятника от вертикали. Массу маятника обозначим буквой m, а длину нити – буквой l. Тогда прямоугольные координаты маятника будут изменяться по следующему закону:

$$x = u + l\sin\varphi, \quad y = v + l\cos\varphi.$$

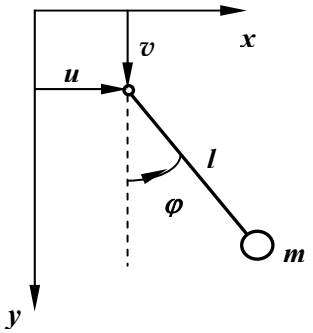


Рис. 4.1

Функция Лагранжа (разность кинетической и потенциальной энергий) имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\cdot\left[(\dot{u} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\dot{v} - l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2\right] + mg(v + l\cos\varphi).$$

Уравнение движения маятника (уравнение Лагранжа), имеющее общий вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

в данном случае запишется следующим образом:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = -\frac{1}{l}\ddot{u}\cos\varphi + \frac{1}{l}\ddot{v}\sin\varphi,$$

где $\omega^2 = g/l$. Будем считать колебания маятника малыми; тогда можно заменить $\sin\varphi$ на φ, а $\cos\varphi$ на 1. Тогда уравнение движения примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = -\frac{1}{l}\ddot{u} + \frac{1}{l}\ddot{v}\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + \left(\omega^2 - \frac{1}{l}\ddot{v}\right)\varphi = -\frac{1}{l}\ddot{u}. \qquad (4.1)$$

Из уравнения (4.1) видно, что *горизонтальные* смещения точки подвеса эквивалентны *внешней силе*, действующей на маятник, т.е. **силовому** воздействию. *Вертикальные* же смещения точки подвеса приводят к *изменению собственной частоты маятника во времени*. Собственная частота – это один из *параметров* маятника, поэтому воздействие подобного вида называют **параметрическим**.

Пусть горизонтальные смещения точки подвеса маятника отсутствуют $(u \equiv 0)$, а вертикальные смещения происходят по гармоническому закону: $v = \varepsilon l \nu^{-2}\cos\nu t$. Тогда уравнение (4.1) примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \left(\omega^2 + \varepsilon\cos\nu t\right)\varphi = 0. \qquad (4.2)$$

Уравнение (4.2) представляет собой уравнение линейного осциллятора с гармонически изменяющейся собственной частотой и называется **уравнением Матье**. Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – решения уравнения (4.2), удовлетворяющие начальным условиям: $\varphi_1(0) = 1$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 1$. Эти решения будут базисными (так как их определи-

тель Вронского при $t = 0$ отличен от нуля), и общее решение запишется в виде:

$$\varphi(t) = x\varphi_1(t) + y\varphi_2(t), \;\; \psi(t) = \dot{\varphi}(t) = x\dot{\varphi}_1(t) + y\dot{\varphi}_2(t),$$

где $x = \varphi(0), \;\; y = \dot{\varphi}(0)$.

Для исследования динамики уравнения Матье (4.2) будем строить точечное отображение (отображение Пуанкаре), порождаемое фазовыми траекториями. Поскольку уравнение (4.2) является линейным уравнением с *периодическими по t* коэффициентами (с периодом $2\pi/\nu$), для построения отображения выберем следующие переменные: φ и ψ – угол и угловая скорость при $t = 0$, а $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ – угол и угловая скорость в момент $t = 2\pi/\nu$. Тогда точечное отображение $(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = T(\varphi, \psi)$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} &= \varphi_1(2\pi/\nu)\cdot\varphi + \varphi_2(2\pi/\nu)\cdot\psi, \\ \overline{\psi} &= \psi_1(2\pi/\nu)\cdot\varphi + \psi_2(2\pi/\nu)\cdot\psi. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Отображение (4.3) является линейным по φ и ψ и имеет неподвижную точку $(\varphi = 0, \psi = 0)$. Характеристическое уравнение для отображения (4.3) имеет вид:

$$\lambda^2 - 2A + 1 = 0, \text{ где } 2A = \varphi_1(2\pi/\nu) + \psi_2(2\pi/\nu).$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 + 1}$$

при $|A| > 1$ – вещественные и различные, причем один по модулю больше единицы, другой – меньше единицы (произведение корней по теореме Виета равно единице); при $|A| < 1$ корни комплексно сопряженные, по модулю равные единице. Таким образом, случай $|A| > 1$ соответствует экспоненциальному нарастанию колебаний маятника (**параметрическое возбуждение**), а случай $|A| < 1$ – ограниченным колебаниям (неасимптотическая устойчивость равновесия, устойчивость по Ляпунову).

Выделяют специальный случай параметрического возбуждения – **параметрический резонанс**, возникающий (как и обычный резонанс) при определенном соотношении между собственной

частотой осциллятора ω и частотой воздействия ν. Однако, в отличие от обычного (силового) резонанса (в гармоническом осцилляторе с внешним периодическим воздействием), параметрический резонанс возникает при *счетном числе* таких соотношений, а именно $\omega = \nu \cdot n / 2$, где n – натуральные числа. Наиболее ярко проявляется параметрический резонанс при $n = 1$, когда параметрическое воздействие происходит в два раза чаще, чем собственные колебания осциллятора. Именно благодаря этому резонансу мы раскачиваемся на качелях, приседая и вставая в два раза чаще, чем качания качелей.

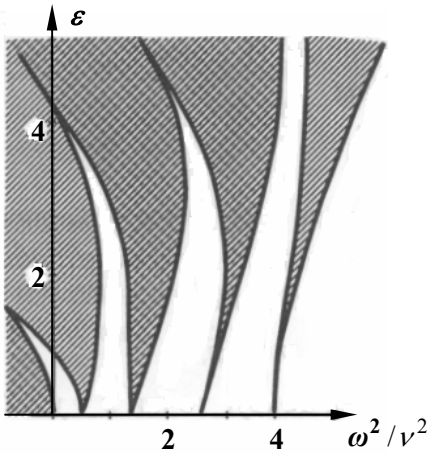


Рис. 4.2

Отметим, что обычный резонанс возникает только при отсутствии вязкого трения, а параметрические возбуждение и резонанс могут возникнуть и при наличии вязкого трения. Кроме того, при обычном резонансе амплитуда со временем возрастает линейно, а при параметрическом – экспоненциально.

При $\omega^2 < 0$, когда осциллятор без параметрического воздействия неустойчив (его колебания нарастают), можно за счет подбора ε наблюдать обратный эффект – **параметрическую стаби-**

лизацию, когда колебания становятся ограниченными (устойчивость по Ляпунову без приближения к равновесию).

На рис. 4.2 изображен бифуркационный (параметрический) портрет системы на плоскости параметров $(\omega^2/\nu^2, \varepsilon)$. Закрашенные области соответствуют неустойчивости (параметрическому возбуждению). Границы областей неустойчивости заостряются в точках пересечения с осью ω^2/ν^2; в этих точках $\omega^2/\nu^2 = n^2/4$, где n – натуральные числа.

С помощью замены масштаба времени $t_{\text{нов}} = \nu t$ можно свести к виду, аналогичному (4.2):

$$\ddot{\varphi} + \left(\omega_{\text{нов}}^2 + \varepsilon_{\text{нов}} \cos t_{\text{нов}}\right)\varphi = 0 \qquad (4.4)$$

(две точки над φ обозначают теперь дифференцирование по новому безразмерному времени $t_{\text{нов}}$), где $\omega_{\text{нов}}^2 = \omega^2/\nu^2$ и $\varepsilon_{\text{нов}} = \varepsilon/\nu^2$. Частота параметрического воздействия в уравнении (4.4) равна 1. Таким образом, не уменьшая общности, можно считать, что $\nu = 1$ и на бифуркационном портрете (рис. 4.2) по оси абсцисс откладывается величина ω^2.

4.2. Реализация в AnyLogic

Работа реализована в файле `Part8\param_resonans.alp` (рис. 4.3). Считается, что $\nu = 1$. В левой части окна анимации можно наблюдать колеблющийся маятник с вертикально перемещаемой точкой опоры. Под этой картинкой находится осциллограмма для $\varphi(t)$.

В правой части окна анимации располагается бифуркационный (параметрический) портрет системы на плоскости параметров (ω^2, ε). Закрашенные области соответствуют неустойчивости (параметрическому возбуждению). С помощью бегунков можно изменять значения параметров, после чего по бифуркационному портрету будет перемещаться точка. Начальные условия по φ и $\dot{\varphi}$ также можно изменять с помощью бегунков.

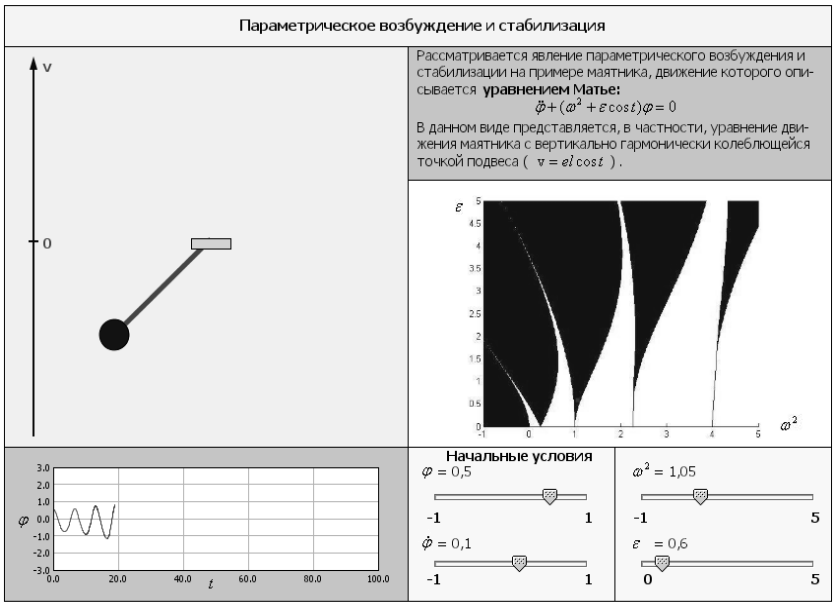


Рис. 4.3

4.3. Задания для эксперимента

1. Запустите модель в AnyLogic.

2. Изменяя параметры ω^2 и ε, добейтесь параметрического возбуждения (при $\omega^2 > 0$) и параметрической стабилизации (при $\omega^2 < 0$). Особое внимание обратите на параметрический резонанс при $\omega = 1/2$ (т.е. $\omega^2 = 1/4$), когда параметрическое воздействие происходит в два раза чаще, чем собственные колебания маятника.

5. Управляемые системы

5.1. Стабилизация перевернутого маятника

5.1.1. Модель

Рассмотрим плоский маятник с перемещаемой точкой опоры (рис. 5.1). Пусть m – масса маятника, l – длина нити (стержня), φ – угол отклонения маятника от вертикали, $u = u(t)$ – горизонтальное перемещение точки опоры. Тогда координаты x и y маятника будут определяться формулами:

$$x = u - l\sin\varphi, \quad y = l\cos\varphi.$$

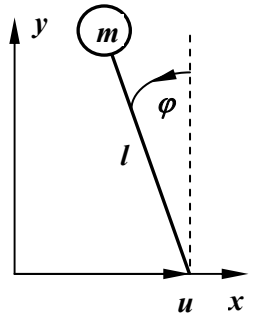


Рис. 5.1

Выражения для кинетической T и потенциальной Π энергий маятника имеют вид:

$$T = \frac{m}{2}\left[(\dot{u} - l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right] = \frac{m}{2}(\dot{u}^2 - 2l\dot{u}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2),$$

$$\Pi = mgy = mgl\cos\varphi.$$

Записывая функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0,$ получаем уравнение движения маятника:

$$-ml\ddot{u}\cos\varphi + ml\dot{u}\dot{\varphi}\sin\varphi + ml^2\ddot{\varphi} - ml\dot{u}\dot{\varphi}\sin\varphi - mgl\sin\varphi = 0,$$

или (после деления на ml^2):

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\sin\varphi = \frac{\ddot{u}}{l}\cos\varphi. \qquad (5.1)$$

Ограничимся малыми углами φ. Тогда приближенно можно заменить $\sin\varphi$ на φ, а $\cos\varphi$ на 1, и уравнение (5.1) примет вид:

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\varphi = \frac{\ddot{u}}{l}. \qquad (5.2)$$

Если $u \equiv 0$ (точка опоры неподвижна), то уравнение (5.2) переходит в линеаризованное уравнение перевернутого маятника:

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\varphi = 0. \qquad (5.3)$$

У динамической системы (5.3) имеется состояние равновесия $(\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0)$, которое соответствует верхнему положению маятника и является неустойчивым состоянием равновесия типа «седло» (характеристическое уравнение $\lambda^2 - g/l = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{g/l}$). Это означает, что при малейшем отклонении от верхнего положения маятник обязательно упадет вниз. Однако жонглеры в цирке могут удерживать маятник в верхнем положении так, чтобы он не падал вниз. Это достигается за счет **управления**, роль которого и выполняет внешний момент, пропорциональный $\ddot{u}$ (неоднородность в линейном уравнении (5.2)). Таким образом, перемещая точку опоры в горизонтальном направлении, жонглер осуществляет управление перевернутым маятником.

В процессе управления маятник, достигнув верхнего положения $(\varphi = 0)$ (этап приближения маятника к верхнему положению будем называть этапом **приведения** в процессе управления), может «проскочить» его и начать отклоняться в другую сторону. Поэтому опытный жонглер во избежание такого «проскакивания» начинает *тормозить* нежелательный процесс (*«одерживать»* маятник), меняя направление внешнего момента (ускорения $\ddot{u}$) на противоположное. Этот этап управления будем называть этапом **одерживания**. Различные виды осциллограмм прихода ма-

ятника в устойчивое верхнее положение в зависимости от характера приведения и одерживания показаны на рис. 5.2.

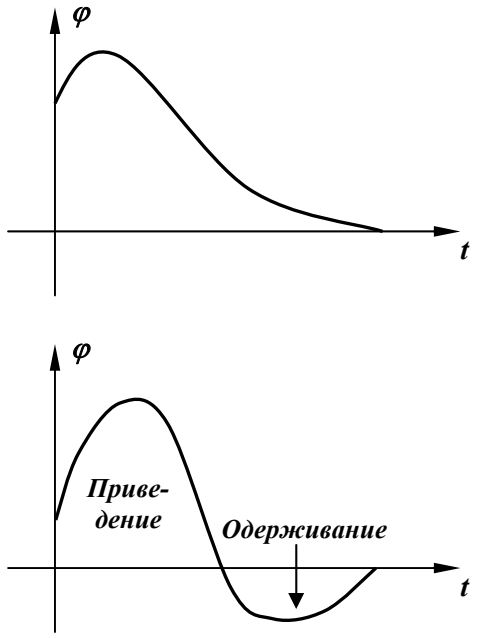


Рис. 5.2

Выясним, какой вид должно иметь управление $\ddot{u}$, чтобы верхнее положение маятника стало устойчивым. Для этого подберем $\ddot{u}$ так, чтобы уравнение (5.2) приняло вид уравнения линейного осциллятора:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \tag{5.4}$$

причем состояние равновесия $(\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0)$ динамической системы (5.4) должно быть асимптотически устойчивым (узлом или фокусом). Для этого нужно, чтобы было $\delta > 0$ и $\omega^2 > 0$. Сравнивая (5.2) и (5.4), находим, что стратегию управления $\ddot{u}$ нужно выбрать в виде:

$$\ddot{u} = -(g + l\omega^2)\varphi - 2l\delta\dot{\varphi}. \qquad (5.5)$$

Из (5.5) видно, что для принятия решения о перемещении точки опоры жонглер должен получить и использовать информацию о величинах φ и $\dot{\varphi}$, которые в совокупности образуют *состояние* маятника как динамической системы. Таким образом, в управлении вида (5.5) реализована **обратная связь по состоянию**.

Систему, в которой управление реализовано в виде обратной связи по состоянию, можно представить функциональной схемой, изображенной на рис. 5.3. С точки зрения этой функциональной схемы маятник является **объектом управления**, на который можно воздействовать управляющим моментом, пропорциональным $\ddot{u}$. Состояние объекта управления $(\varphi, \dot{\varphi})$ поступает на вход **измерительной системы**, преобразующей его в некоторый вид, который «понятен» **управляющей системе** (**регулятору**). Управляющая система, получив от измерителя сигнал, вырабатывает управление $\ddot{u}$, поступающее на вход объекта (маятника) в виде управляющего момента.

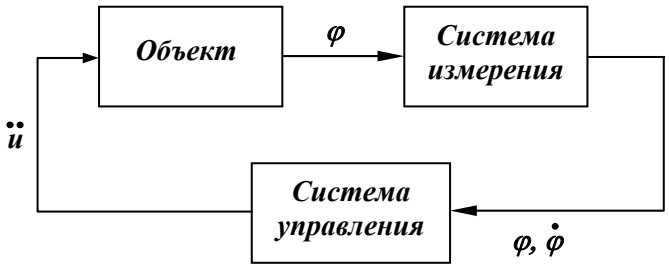


Рис. 5.3

Стратегия управления (5.5) – это линейная функция от переменных состояния:

$$\ddot{u} = -a\varphi - b\dot{\varphi}, \qquad (5.6)$$

причем для устойчивости верхнего положения нужно, чтобы было $a > g$ и $b > 0$. При $b = 0$ верхнее положение будет устойчивым, но не асимптотически (состояние равновесия типа «центр»: маятник будет совершать незатухающие колебания вокруг верх-

него положения, так как его движения будут описываться уравнением линейного осциллятора (5.4) при $\delta = 0$).

В выражение для стратегии управления (5.6) входят два слагаемых: $-a\varphi$ и $-b\dot{\varphi}$. Слагаемое $-a\varphi$ – это управление по отклонению маятника φ (угловая коррекция, параметр *приведения*). Физически оно означает, что основание маятника нужно перемещать ускоренно в ту же сторону, куда наклонен маятник (знак $\ddot{u}$ противоположен знаку φ).

Слагаемое $-b\dot{\varphi}$ – это управление, учитывающее угловую скорость маятника (скоростная коррекция, параметр *одерживания*). Если маятник движется в ту же сторону, в какую он отклонен (совпадение знаков φ и $\dot{\varphi}$), то управляющее ускорение $\ddot{u}$ увеличивается по модулю по сравнению со слагаемым $-a\varphi$. Если же маятник движется в сторону, обратную по отношению к отклонению (знаки φ и $\dot{\varphi}$ противоположны), то ускорение $\ddot{u}$ по модулю становится меньше $-a\varphi$.

Однако стратегия управления вида (5.6) приводит к тому, что для стабилизации маятника в верхнем положении придется перемещать точку опоры сколь угодно далеко (так как при $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$ в силу (5.6) будем иметь $\ddot{u} = 0$, а следовательно, $u(t) = C_1 t + C_2$, т.е. перемещение u линейно растет со временем). Между тем цирковые жонглеры, удерживая маятник в верхнем положении, никуда не уходят (остаются на месте). Дело в том, что жонглер решает более сложную задачу – он стремится стабилизировать не только верхнее положение маятника, но и *саму точку опоры*. Это означает, что не только φ и $\dot{\varphi}$, но и u и $\dot{u}$ должны стремиться к нулю при $t \to +\infty$.

Для решения задачи одновременной стабилизации верхнего положения и точки опоры маятника нужно, чтобы управляющее ускорение $\ddot{u}$ зависело не только от φ и $\dot{\varphi}$, но также от u и $\dot{u}$. В простейшем случае можно опять взять линейную стратегию управления. Таким образом, линеаризованная модель движения маятника теперь будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\varphi = \frac{\ddot{u}}{l}, \\ &\ddot{u} = a\varphi + b\dot{\varphi} + cu + d\dot{u}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

Уравнения (5.7) определяют оператор динамической системы четвертого порядка, состоянием которой является вектор $(\varphi, \dot{\varphi}, u, \dot{u})$. Точка $(0, 0, 0, 0)$ – состояние равновесия системы (5.7), которое требуется стабилизировать. Система (5.7) является линейной однородной системой с постоянными коэффициентами, и ее решение будем искать в виде: $\varphi = Ae^{\lambda t}$, $u = Be^{\lambda t}$. Характеристическое уравнение для системы (5.7) (условие, при выполнении которого величины A и B будут отличны от нуля) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - g/l & -\lambda^2/l \\ a + b\lambda & c + d\lambda - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем:

$$\lambda^4 + \left(-d - \frac{b}{l}\right)\lambda^3 + \left(-c - \frac{g}{l} - \frac{a}{l}\right)\lambda^2 + d\frac{g}{l}\lambda + c\frac{g}{l} = 0. \qquad (5.8)$$

Корни уравнения (5.8) за счет выбора параметров a, b, c и d можно сделать любыми. Это следует из того, что свободный член можно сделать любым за счет выбора c, коэффициент при λ – за счет выбора d, коэффициент при λ^2 – за счет выбора a, а коэффициент при λ^3 – за счет выбора b. Таким образом, стратегия вида $\ddot{u} = a\varphi + b\dot{\varphi} + cu + d\dot{u}$ за счет надлежащего выбора значений параметров a, b, c и d, при которых все корни уравнения (5.8) лежат слева от мнимой оси, обеспечивает одновременную стабилизацию верхнего положения и точки опоры маятника.

5.1.2. Реализация в AnyLogic

Работа реализована в файле `Part9\upturned pendulum.alp` (рис. 5.4). Данная реализация позволяет решать две задачи: о стабилизации только верхнего положения маятника и об одновременной стабилизации верхнего положения и точки опоры

(решаемая задача выбирается в окне анимации с помощью радиокнопки из группы «`Вид стабилизации`»).

В окне анимации реализована возможность управления перевернутым маятником в трех режимах: автоматическом, полуавтоматическом и ручном (режим выбирается с помощью радиокнопки из группы «`Управление`» в правой части анимации). В автоматическом режиме параметры управления подобраны автоматически и верхнее положение стабилизируется при любых начальных условиях (этот режим можно использовать в качестве демонстрации возможностей управления). В полуавтоматическом режиме пользователь должен подбирать параметры управления с помощью бегунков. В ручном режиме пользователь должен управлять внешним моментом (точнее – внешним ускорением $\ddot{u}$) с помощью двух кнопок «<» и «>», расположенных в левой части окна анимации под картинкой колеблющегося перевернутого маятника.

Начальные условия по φ и $\dot{\varphi}$ в любом режиме задаются с помощью бегунков.

В левой верхней части окна анимации расположена картинка колеблющегося перевернутого маятника с горизонтально перемещаемой точкой опоры (стрелка показывает направление действия внешней силы, т.е. знак $\ddot{u}$). Под этой картинкой находится бегунок для ручного управления точкой опоры с помощью постоянного внешнего момента (при перемещении этого бегунка влево значение управляющего момента уменьшается, вправо – увеличивается). Ниже располагаются осциллограммы изменения отклонения маятника φ и перемещения точки опоры u во времени.

В режиме ручного управления рекомендуется двигать бегунок с помощью клавиш стрелок (предварительно сделав его активным), так как при перемещении бегунка с помощью мыши (при нажатой левой кнопке) процесс интегрирования системы приостанавливается до тех пор, пока кнопка мыши не будет отпущена.

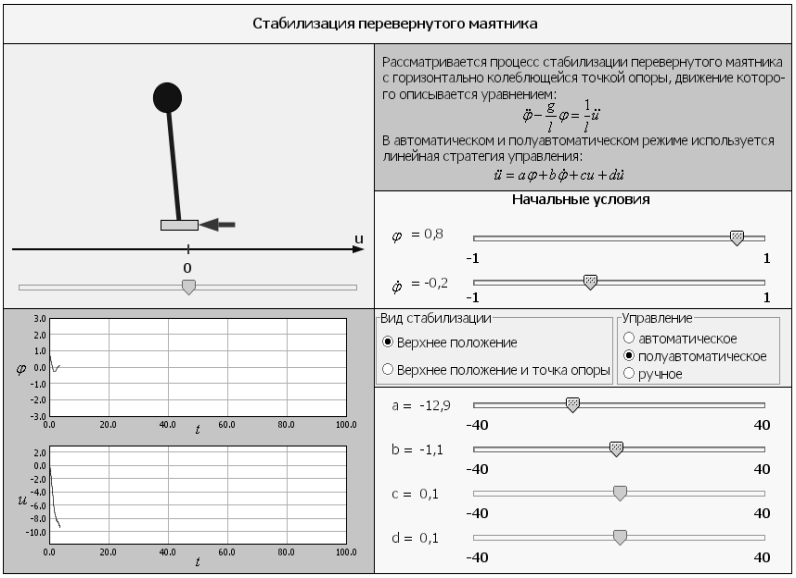


Рис. 5.4

5.1.3. Задания для эксперимента

1. В режиме автоматического управления пронаблюдайте за процессом стабилизации маятника. Обратите внимание на то, как меняется во времени направление внешней силы (ускорения $\ddot{u}$).

2. В режиме ручного управления попытайтесь стабилизировать вначале только верхнее положение маятника, затем также и точку опоры. Насколько хватит вашей реакции для принятия решения и осуществления стратегии управления?

3. В полуавтоматическом режиме с помощью бегунков подберите значения параметров для стабилизации вначале только верхнего положения, затем верхнего положения и точки опоры. Сделайте экспериментальные выводы о влиянии значений коэффициентов, отвечающих за угловую (координатную) и скоростную коррекции, на процесс стабилизации, в том числе на скорость сходимости и на характер процесса (колебательный или апериодический).

5.2. Стабилизация двухзвенного перевернутого маятника

5.2.1. Модель

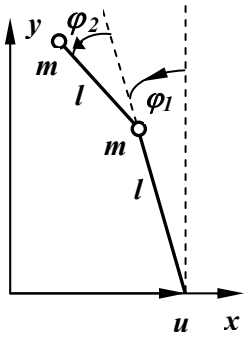


Рис. 5.5

Рассмотрим процесс жонглирования многозвенным маятником, т.е. несколькими (например, двумя) перевернутыми маятниками, поставленными друг на друга, с помощью перемещения точки опоры только нижнего маятника (рис. 5.5). На первый взгляд кажется, что такое жонглирование (удерживание всей системы маятников в строго вертикальном положении) невозможно, так как верхний маятник упадет. Однако посмотрим, что́ дает математическая модель.

В обозначениях рис. 5.5, полагая (без ограничения общности) $m = 1$ и $l = 1$, непосредственно находим, что функция Лагранжа L с учетом последующей линеаризации (т.е. сохранения в дифференциальных уравнениях Лагранжа только членов, линейных относительно φ_1, φ_2, $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$) имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}\left(2\dot{u}^2 - 4\dot{u}\dot{\varphi}_1 - 2\dot{u}\dot{\varphi}_2 + 2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) + g\varphi_1^2 + \frac{g}{2}\varphi_2^2.$$

Отсюда получаем систему уравнений Лагранжа для описания движений двухзвенного маятника:

$$2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - 2\ddot{u} - 2g\varphi_1 = 0, \quad \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - \ddot{u} - g\varphi_2 = 0. \qquad (5.9)$$

В системе (5.9) умножим второе уравнение на 2 и вычтем из первого; получим эквивалентную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -\ddot{\varphi}_2 - 2g\varphi_1 + 2g\varphi_2 = 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - \ddot{u} - g\varphi_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

Управление организуем в виде обратной связи по состоянию. Как и для однозвенного маятника, выберем стратегию управления в виде линейной функции всех фазовых переменных:

$$\ddot{u} = a_1\varphi_1 + b_1\dot{\varphi}_1 + a_2\varphi_2 + b_2\dot{\varphi}_2. \qquad (5.11)$$

Уравнения (5.10), (5.11) образуют одну динамическую систему с состоянием $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)$. Эта система дифференциальных уравнений является линейной однородной, и ее решение будем искать в виде: $\varphi_1 = Ae^{\lambda t}$, $\varphi_2 = Be^{\lambda t}$. Характеристическое уравнение для системы (5.10), (5.11) (условие, при выполнении которого величины A и B будут отличны от нуля) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -2g & -\lambda^2 + 2g \\ \lambda^2 - a_1 - b_1\lambda & \lambda^2 - g - a_2 - b_2\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем:

$$\begin{aligned} \lambda^4 - b_1\lambda^3 - (a_1 + 4g)\lambda^2 + 2g(b_1 + b_2)\lambda + \\ + 2g(g + a_1 + a_2) = 0. \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Из вида характеристического уравнения (5.12) следует, что коэффициенты при λ^3, λ^2, λ и λ^0 могут быть любыми при соответствующем выборе параметров стратегии управления.

5.2.2. Теоретическое задание

Рассмотрите задачу об одновременной стабилизации верхнего положения и точки опоры двухзвенного маятника. Пусть стратегия управления будет линейной функцией от состояния. Можно ли за счет подбора параметров управления сделать верхнее положение и точку опоры устойчивыми одновременно?

5.2.3. Реализация в AnyLogic

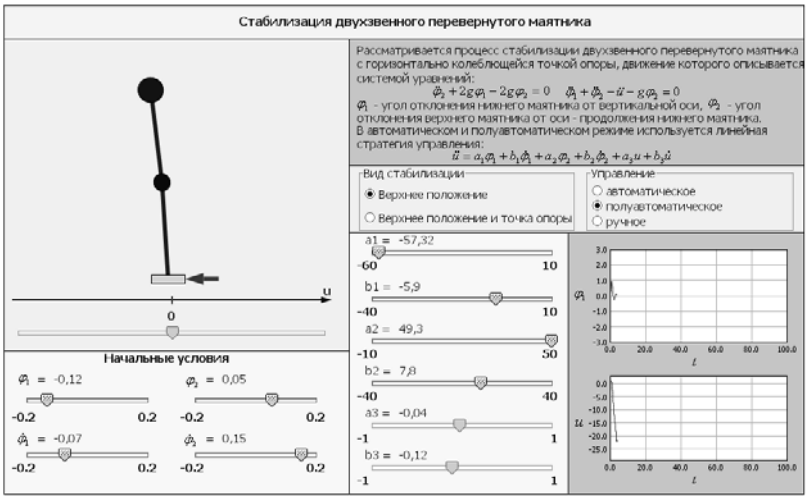


Рис. 5.6

Работа реализована в файле `Part9\2 linked upturned pendulums.alp` (рис. 5.6). Как и для однозвенного перевернутого маятника, управление можно осуществлять в автоматическом, полуавтоматическом и ручном режимах. Окно анимации аналогично окну анимации работы «Стабилизация перевернутого маятника» (п. 5.1.2). Различие состоит лишь в большем количестве параметров и начальных условий.

5.2.4. Задания для эксперимента

1. В режиме автоматического управления пронаблюдайте за процессом стабилизации маятника. Обратите внимание на изменение направления внешней силы (ускорения $\ddot{u}$).

2. В режиме ручного управления попытайтесь стабилизировать вначале только верхнее положение двухзвенного маятника, затем также и точку опоры. Насколько хватит вашей реакции для принятия решения и осуществления стратегии управления?

3. В полуавтоматическом режиме с помощью бегунков подберите значения параметров для стабилизации вначале только верхнего положения, затем верхнего положения и точки опоры. Сделайте экспериментальные выводы о влиянии значений коэффициентов, отвечающих за угловую (координатную) и скоростную коррекции, на процесс стабилизации, в том числе на скорость сходимости и на характер процесса (колебательный или апериодический).

5.3. Стабилизация курса лодки

5.3.1. Общая модель движения лодки без управления и с управлением

Рассмотрим процесс движения лодки (аналогично движутся корабль, самолет). Пусть лодка движется с некоторой постоянной скоростью, так что сила сопротивления ее движению компенсируется силой тяги весел или гребного винта. Если набегающий на лодку поток направлен точно вдоль ее корпуса, то никакого момента сил не возникает. Момент сил (не уменьшая общности, будем рассматривать моменты сил относительно центра масс лодки) возникает только при отклонении набегающего потока воды от продольной оси лодки. Пусть φ – угол отклонения лодки от заданного курса (рис. 5.7). Тогда в грубом приближении угол расхождения скорости движения центра масс лодки и направления ее продольной оси определяется скоростью ее вращения $\dot{\varphi}$ и вызывает момент сил вязкого трения, который при не очень больших по модулю значениях $\dot{\varphi}$ равен $-h\dot{\varphi}$. При этом в зависимости от конструкции лодки коэффициент h может быть как положительным (обычное вязкое трение, препятствующее вращению лодки), так и отрицательным («отрицательное трение», которое разгоняет процесс вращения). Обычное трение наблюдается у приземистых удлиненных лодок, которые называют **шлюпками** (другое название – **городецкая лодка**, от названия города Городец Нижегородской области; форма лодки связана с особенностями поведения Волги в этом месте: вода относительно спокойная, высокие волны отсутствуют, поэтому в районе Го-

родца рыбаки использовали лодки именно такой конструкции). Отрицательное же трение характерно для лодок с возвышенным носом и, как следствие, смещенным центром масс. Такие лодки называют **великовражками** (от названия села Великий Враг в Нижегородской области; в этом месте на Волге нередко возникали волны большой высоты, и поэтому рыбаки здесь использовали лодки соответствующей конструкции).

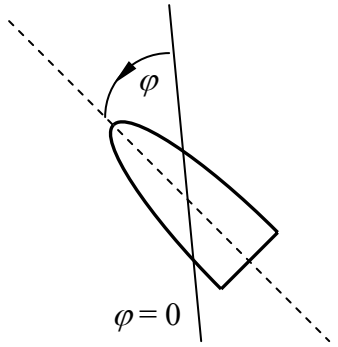


Рис. 5.7

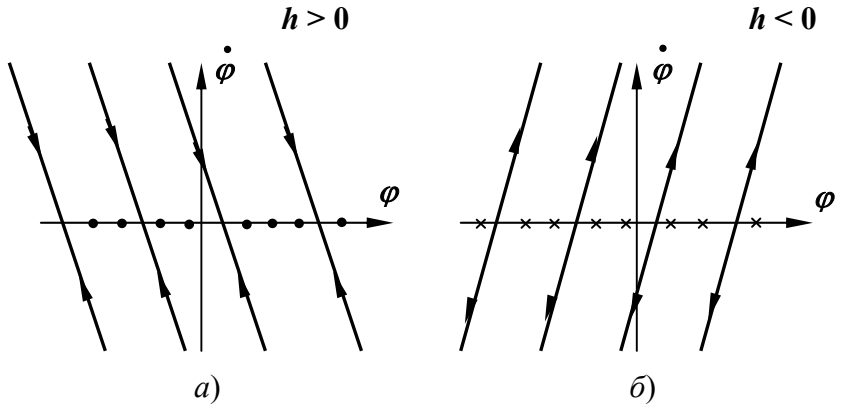


Рис. 5.8

Пусть J – момент инерции лодки относительно ее центра масс (точнее – относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр масс). Тогда уравнение движения лодки имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -h\dot{\varphi}. \qquad (5.13)$$

Фазовым пространством динамической системы (5.13) является двумерный цилиндр $\{(\varphi, \dot{\varphi}) : -\pi < \varphi \le \pi, -\infty < \dot{\varphi} < +\infty\}$. Но при рисовании фазовых портретов мы будем рассматривать развертку этого цилиндра на плоскость.

Интегрируя (5.13) по времени, находим уравнение фазовых траекторий (точнее – интегральных кривых на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$):

$$J\dot{\varphi} + h\varphi = C, \qquad (5.14)$$

где C – постоянная интегрирования. Учитывая, что с течением времени величина φ растет при $\dot{\varphi} > 0$ и убывает при $\dot{\varphi} < 0$, из (5.14) получаем фазовые портреты шлюпки (рис. 5.8*а*) и великовражки (рис. 5.8*б*). У каждой из этих лодок имеется континуум состояний равновесия – прямая $\dot{\varphi} = 0$. Для шлюпки каждое из этих равновесий будет устойчивым, но не асимптотически (так как по определению локальной асимптотической устойчивости траектории должны приходить в данное состояние равновесия из некоторой его круговой окрестности, но согласно рис. 5.8*а* ни одно из равновесий не обладает этим свойством). Таким образом, шлюпка обязательно придет на *какой-то* курс, зависящий от начальных условий. Великовражка же не придет ни на какой курс: все состояния равновесия неустойчивы и лодка будет ускоренно раскручиваться. На рис. 5.8 устойчивые состояния равновесия отмечены черными закрашенными кружками, а неустойчивые – крестиками.

Мы же хотим, чтобы лодка с течением времени вышла на заданный курс $(\varphi = 0)$ и в дальнейшем оставалась там. Для этого лодкой необходимо управлять. Управление организуем с помощью руля (рис. 5.9). Пусть ψ – угол отклонения руля от продольной оси лодки. Тогда за счет набегающего на руль потока появляется дополнительный вращающий момент от руля, кото-

рый является функцией от ψ (будем обозначать эту функцию через $M(\psi)$). Тогда уравнение движения лодки, снабженной рулем, примет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -h\dot{\varphi} + M(\psi). \qquad (5.15)$$

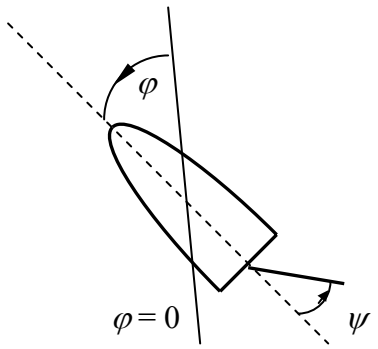


Рис. 5.9

Если принять, что и лодка, и руль имеют симметричную форму относительно своих продольных осей, то можно считать, что функция $M(\psi)$ нечетная и возрастает по модулю при увеличении модуля ψ. При этом из физики процесса видно, что момент, сообщаемый лодке рулем, по направлению противоположен углу поворота руля.

Простейшей аппроксимацией функции $M(\psi)$, обладающей указанными свойствами, является линейная функция: $M(\psi) = -k\psi$, где $k = \text{const} > 0$. Такая аппроксимация, конечно, приемлема только при не очень больших ψ. Подставим эту функцию в (5.15) и получим следующее уравнение движения лодки, снабженной рулем:

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi. \qquad (5.16)$$

Уравнение (5.16) предполагает $\dot{\varphi}$ и ψ малыми, а φ может быть любым.

5.3.2. Линейная стратегия управления

Чтобы сделать движение лодки по заданному курсу $\varphi = 0$ асимптотически устойчивым, выберем стратегию управления в виде линейной функции от состояния (аналогично перевернутому маятнику):

$$\psi = a\varphi + b\dot{\varphi}. \tag{5.17}$$

Подставляя (5.17) в (5.16), получаем уравнение движения лодки, снабженной линейным рулем (или **линейным авторулевым**, если руль работает автоматически):

$$J\ddot{\varphi} + (h + kb)\dot{\varphi} + ka\varphi = 0. \tag{5.18}$$

Уравнение (5.18) является уравнением линейного осциллятора и в отличие от (5.13) имеет (при $a \neq 0$) *единственное* состояние равновесия $(\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0)$, соответствующее движению лодки по заданному курсу. Это равновесие будет асимптотически устойчивым, если все коэффициенты его характеристического уравнения

$$J\lambda^2 + (h + kb)\lambda + ka = 0 \tag{5.19}$$

будут иметь одинаковые знаки и отличаться от нуля. Так как по физическому смыслу $J > 0$, это означает, что все коэффициенты уравнения (5.19) должны быть положительными, т.е. коэффициенты a и b должны удовлетворять условиям:

$$a > 0, \;\; b > -\frac{h}{k}. \tag{5.20}$$

Смысл стратегии (5.17) при условии (5.20) такой же, как и при жонглировании перевернутым маятником, но если ранее требовалось достаточно большое значение параметра a (угловая коррекция), то теперь при $h < 0$ это требование накладывается на параметр b (скоростная коррекция). Из этого следует, что *шлюпкой* управлять сравнительно *просто* (можно даже обойтись без скоростной коррекции, положив $b = 0$), но *великовражкой* управлять гораздо сложнее, так как требуется достаточно большая и правильная скоростная коррекция.

5.3.3. Теоретическое задание

Напишите условия, которым должны удовлетворять параметры управления a и b, чтобы процесс прихода лодки к асимптотически устойчивому заданному курсу был апериодическим (во избежание неприятностей для пассажиров, которые не переносят угловых колебаний лодки).

5.3.4. Релейная стратегия управления

Следуя [4], рассмотрим теперь другую стратегию управления лодкой – **релейную** (**двухпозиционную**), когда угол поворота руля ψ может принимать только два крайних значения: ψ_0 и $-\psi_0$, где $\psi_0 > 0$. Именно, положим $\psi = \psi_0 \operatorname{sign} \sigma$, где $\sigma = a\varphi + b\dot{\varphi}$ (здесь по определению считается, что функция $\operatorname{sign} \sigma$ при $\sigma = 0$ может принимать *любое* значение от –1 до 1). Известно, что данная стратегия является **оптимальной по быстродействию**, т.е. приводит лодку на заданный курс за минимальное время (обеспечивает максимальную скорость приведения и одерживания). Если управление осуществляется с помощью авторулевого, то это **релейный** или **двухпозиционный авторулевой**.

Математическая модель движения лодки, снабженной релейным рулем, имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi_0 \operatorname{sign} \sigma, \quad \sigma = a\varphi + b\dot{\varphi}. \tag{5.21}$$

Параметр a, отвечающий за угловую коррекцию, будем считать положительным по аналогии с линейной стратегией управления (условие $a > 0$ обеспечивает правильное направление поворота руля на этапе приведения – в ту же сторону, куда отклонена лодка).

Фазовым пространством здесь также будет двумерный цилиндр, но мы будем рассматривать развертку этого цилиндра на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$. Проведем на этой плоскости прямую $\sigma = 0$ (рис. 5.10 соответствует случаю $b > 0$). Она делит плоскость на две части (полуплоскости): Φ^+, где $\sigma > 0$, и Φ^-, где $\sigma < 0$. В

каждой из этих полуплоскостей уравнение движения лодки будет линейным:

$$\left.\begin{aligned} J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi_0 \quad & \text{в } \Phi^+, \\ J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = k\psi_0 \quad & \text{в } \Phi^-. \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

Каждое из уравнений (5.22) может быть проинтегрировано.

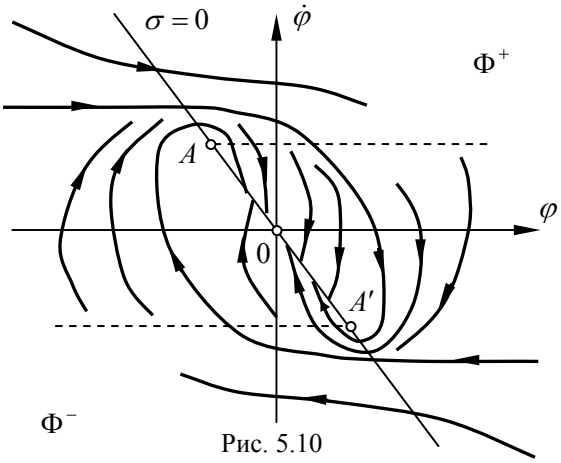


Рис. 5.10

Следует отметить, что при одновременной замене φ на $-\varphi$ и $\dot{\varphi}$ на $-\dot{\varphi}$ уравнения (5.21) не изменяются (первое уравнение системы (5.21) при подстановке в него второго уравнения и одновременной замене φ на $-\varphi$ и $\dot{\varphi}$ на $-\dot{\varphi}$ целиком умножится на –1). Это означает, что фазовые траектории в полуплоскостях Φ^+ и Φ^- симметричны друг другу относительно начала координат, и поэтому для полного их изучения достаточно построить фазовый портрет, например, только в полуплоскости Φ^+.

Для исследования траекторий в Φ^+ рассмотрим их поведение по отношению к прямой $\sigma = 0$. Геометрический смысл величины σ – это расстояние (с учетом знака) от заданной точки $(\varphi, \dot{\varphi})$ до прямой $\sigma = 0$. Выясним, как меняется величина σ вдоль

траекторий первого уравнения системы (5.22). Для этого найдем полную производную от σ по времени в силу первого уравнения системы (5.22):

$$\dot{\sigma} = -\frac{kb\psi_0}{J} + \left(a - \frac{bh}{J}\right)\dot{\varphi}.$$

При $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}^* = kb\psi_0 / (Ja - bh)$ имеем $\dot{\sigma} = 0$. Пусть $a > bh / J$ (это предположение вполне допустимо, если момент инерции лодки J большой, а коэффициент вязкого трения h достаточно малый). Тогда если $\dot{\varphi} < \dot{\varphi}^*$, то $\dot{\sigma} < 0$, а если $\dot{\varphi} > \dot{\varphi}^*$, то $\dot{\sigma} > 0$. Так как в Φ^+ значение σ положительное, то при $\dot{\varphi} > \dot{\varphi}^*$ фазовые траектории уходят от прямой $\sigma = 0$ в направлении увеличения σ. При $\dot{\varphi} < \dot{\varphi}^*$ траектории идут в направлении уменьшения σ и «втыкаются» в прямую $\sigma = 0$. При $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}^*$ величина σ вдоль фазовой траектории достигает своего максимума. Кроме того, полупрямая $\dot{\varphi} = -k\psi_0 / h$, $\sigma > 0$ является фазовой траекторией в Φ^+, и выше этой прямой имеет место неравенство $\ddot{\varphi} < 0$ (т.е. $\dot{\varphi}$ уменьшается), а ниже этой прямой имеем $\ddot{\varphi} > 0$ (т.е. $\dot{\varphi}$ увеличивается). С учетом всего сказанного, а также симметрии траекторий относительно начала координат приходим к качественному виду фазового портрета динамической системы (5.21), изображенному на рис. 5.10 (при $b > 0$; случаи $b = 0$ и $b < 0$ рассматриваются аналогично). Здесь считается, что $Ja - bh > 0$ и $\dot{\varphi}^* < k\psi_0 / h$.

Из рис. 5.10 видно, что на прямой $\sigma = 0$ имеется отрезок AA' (с координатами концов $A(-b\dot{\varphi}^* / a, \dot{\varphi}^*)$ и $A'(b\dot{\varphi}^* / a, -\dot{\varphi}^*)$), в который фазовые траектории «втыкаются» с двух сторон: как из полуплоскости Φ^+, так и из полуплоскости Φ^-. Вне этого отрезка траектории приходят к прямой $\sigma = 0$ в одной полуплоскости и уходят от этой прямой в другой полуплоскости. Поведение траекторий на самой прямой $\sigma = 0$ *не определено*, так как правая часть уравнения (5.21) при $\sigma = 0$ терпит конечный разрыв и не удовлетворяет условиям теоремы существования и единственно-

сти (Коши – Пикара). Разрыв правой части (5.21) влечет разрывность величины $\ddot{\varphi}$, но при этом скорость $\dot{\varphi}$ должна меняться непрерывно, так как скачок скорости требует бесконечной величины момента силы. Таким образом, уравнения (5.21) не определяют полностью оператора динамической системы и, следовательно, не являются полной математической моделью движения лодки с релейным авторулевым. Требуется еще доопределить модель при $\sigma = 0$.

Из физического смысла ясно, что угол φ со временем должен меняться непрерывно. Скорость $\dot{\varphi}$, как было отмечено выше, также должна меняться непрерывно. Поэтому доопределим траектории системы на прямой $\sigma = 0$ вне отрезка AA' по непрерывности («**сшивка**» или «**склейка**» траекторий по непрерывности). «Сшивка» траекторий данной системы означает, что вне отрезка AA' фазовая точка переходит с траектории одного из полупространств Φ^+ и Φ^- на траекторию другого полупространства и при этом происходит мгновенная перекладка руля из одного крайнего положения в другое.

На отрезке же AA' траектории «втыкаются» в прямую $\sigma = 0$ из обеих полуплоскостей Φ^+ и Φ^-. При этом если траектория попадает на прямую $\sigma = 0$ в точку, в которой $\dot{\varphi} \neq 0$, то она должна обязательно уйти из этой точки, но остаться на прямой. Направление движения точки по прямой $\sigma = 0$ можно определить по знаку $\dot{\varphi}$: в верхней полуплоскости, где $\dot{\varphi} > 0$, величина φ возрастает вдоль траекторий, а в нижней полуплоскости, где $\dot{\varphi} < 0$, величина φ убывает вдоль траекторий. При $b > 0$ это означает, что траектории движутся по отрезку AA' по направлению к точке $(\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0)$. Такой режим движения, получившийся вследствие доопределения оператора релейной динамической системы, называют **скользящим**.

Более подробное математическое описание скользящего режима можно получить, если понять, что в этом режиме динамиче-

ским уравнением движения точки будет само уравнение прямой $\sigma = 0$, т.е. $a\varphi + b\dot{\varphi} = 0$. Решая это уравнение, находим:

$$\varphi(t) = \varphi(0)\, e^{-(a/b)t}. \tag{5.23}$$

При $a > 0$ и $b > 0$ формула (5.23) означает, что точка, оказавшись на отрезке скользящего режима AA', будет двигаться по этому отрезку по направлению к началу координат.

Следует отметить, что скользящий режим является *идеализированной моделью* движения лодки и руля и находится в противоречии с предположением о том, что руль может находиться только в двух крайних положениях ψ_0 и $-\psi_0$. Это противоречие разрешается, если учесть, что в реальности перекладка руля *не мгновенна* (на ее осуществление требуется некоторое время), поэтому величина отклонения руля ψ изменяется *непрерывно*, но при этом достаточно *быстро* (быстро осциллирующая функция, усредненное значение которой является медленно меняющейся функцией) [4].

Для детального изучения фазового портрета заметим вначале, что модель (5.21) зависит от шести параметров: J, h, k, ψ_0, a, b. Эти параметры называются **физическими**, так как каждый из них имеет вполне определенный физический смысл. Однако при большом количестве параметров задача построения и исследования фазового портрета становится очень сложной. Поэтому нужно по возможности стремиться к уменьшению количества параметров, выделяя те, от которых реально зависит фазовый портрет. Такие параметры называются **существенными**. Для их нахождения сделаем замену угла и времени с помощью положительных масштабных коэффициентов: $\tau = \lambda t$, $\varphi = \mu\varphi_{\text{н}}$ ($\varphi_{\text{н}}$ – φ новое). Тогда уравнения (5.21) перепишутся следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi_{\text{н}}}{d\tau^2} + \frac{h}{J\lambda}\frac{d\varphi_{\text{н}}}{d\tau} = -\frac{k\psi_0}{J\lambda^2\mu} f(\sigma), \quad \sigma = a\mu\varphi_{\text{н}} + b\lambda\mu\frac{d\varphi_{\text{н}}}{d\tau},$$

где

$$f(\sigma)=\begin{cases}\operatorname{sign}\sigma & (\sigma\neq 0),\\ -1\le f(0)\le 1 & (\sigma=0).\end{cases}$$

Выберем масштабные множители так, чтобы количество параметров было как можно меньшим: $\lambda = J/|h|$, $\mu = J\lambda^2/(k\psi_0)$. Так как функция $f(\sigma)$ зависит фактически от знака σ, то она не изменится при умножении аргумента σ на положительное число. Пользуясь этим, умножим σ на $1/(a\mu)$ под знаком функции *f*. Тогда в модели будет только *один* существенный параметр (вместо *шести* физических!): $\kappa = (b/a)/(J/|h|)$ (κ – греческая буква «каппа»). Если производные по новому времени τ обозначать снова точками и опустить индекс «н» (новое) у новой переменной φ, то модель лодки с релейным авторулевым запишется следующим образом:

$$\ddot{\varphi}\pm\dot{\varphi}=-f(\sigma),\ \ \sigma=\varphi+\kappa\dot{\varphi}. \qquad (5.24)$$

Знак «плюс» в уравнении (5.24) соответствует шлюпке $(h>0)$, знак «минус» – великовражке $(h<0)$.

На рис. 5.11 изображен качественный вид фазового портрета системы (5.24) при $h>0$ (система со знаком «плюс» в левой части) и $\kappa>0$. Прямая $\sigma=0$ делит фазовую плоскость на две полуплоскости: Φ^+, где $\sigma>0$, и Φ^-, где $\sigma<0$. Переход фазовой траектории из одной полуплоскости в другую после пересечения прямой $\sigma=0$ соответствует одному переключению (перекладке) руля, поэтому будем называть прямую $\sigma=0$ **прямой переключений**. Система (5.24) во *всей фазовой плоскости* является *кусочно-линейной*, но в *каждой из полуплоскостей* Φ^+ и Φ^- уравнение движения фазовой точки является *линейным*. Как уже отмечалось выше, фазовые траектории в Φ^- симметричны фазовым траекториям в Φ^+ относительно начала координат. На прямой переключений существует отрезок скользящих режимов AA', концы которого имеют следующие координаты:

$$A\left(-\frac{\kappa^2}{1-\kappa}, \frac{\kappa}{1-\kappa}\right), \quad A'\left(\frac{\kappa^2}{1-\kappa}, -\frac{\kappa}{1-\kappa}\right).$$

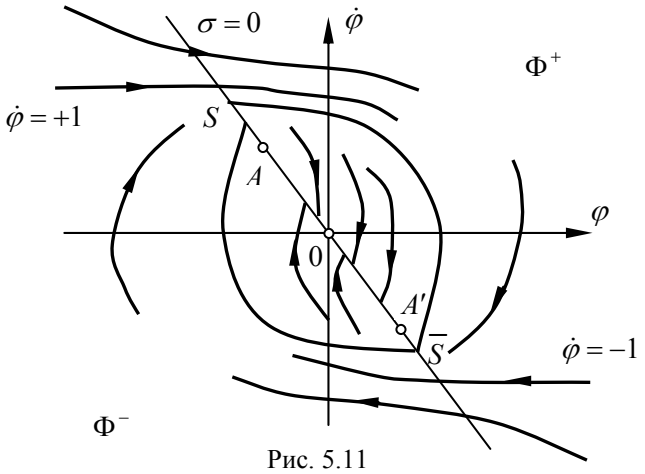


Рис. 5.11

Если фазовая точка попадет на этот отрезок, то в дальнейшем она будет двигаться по нему к началу координат, т.е. лодка стабилизируется на заданном курсе. Рисунок 5.11 соответствует случаю $0 < \kappa < 1$.

В принципе, фазовая точка *может* попасть на отрезок AA' как из Φ^+, так и из Φ^-. Однако на вопрос, действительно ли точка *попадет* на этот отрезок при произвольных начальных условиях, фазовый портрет в общем случае не дает ответа. Здесь необходимо применять метод точечных отображений (отображений Пуанкаре).

Из фазового портрета (в частности, из проделанного выше анализа знака величины σ) следует, что прямую переключений $\sigma = 0$ можно взять в качестве секущей для построения точечного отображения, порождаемого фазовыми траекториями. При этом в силу симметрии фазовых траекторий можно рассматривать только траектории в Φ^+. Именно, в качестве точки-прообраза с коор-

динатой $\dot{\varphi} = S$ можно взять точку, например, на верхнем луче прямой переключения $(\dot{\varphi} > 0)$, а в качестве точки-образа с координатой $\dot{\varphi} = \overline{S}$ – точку на нижнем луче $(\dot{\varphi} < 0)$ (рис. 5.11). Дело в том, что далее для продолжения построения последовательности точек пересечения траекторий с прямой переключений нужно провести траекторию в Φ^- из точки с координатой $\dot{\varphi} = \overline{S}$, но эта траектория будет симметрична траектории, проходящей в Φ^+ из точки $\dot{\varphi} = -\overline{S}$, относительно начала координат.

Для отыскания функциональной связи $\overline{S} = F(S)$ необходимо найти уравнение траекторий динамической системы (5.24). Интегрируя уравнение (5.24) при $\sigma > 0$ и начальных условиях $\varphi = -\kappa S$, $\dot{\varphi} = S$, получаем:

$$\overline{S} = e^{-\tau} \cdot S - (1 - e^{-\tau}), \tag{5.25}$$

где τ – время движения фазовой точки по траектории из точки S в точку $\overline{S}$, определяемое из уравнения

$$(1-\kappa)(1-e^{-\tau})(S+1) - \tau = 0. \tag{5.26}$$

Исключить отсюда τ (выразить τ через S) не удается, поэтому построить отображение в *явном* виде $\overline{S} = F(S)$ нельзя. Однако из (5.26) можно выразить S через τ:

$$S = -1 + \frac{\tau}{(1-\kappa)(1-e^{-\tau})}. \tag{5.27}$$

Подставляя (5.27) в (5.25), получаем формулы точечного отображения в *параметрическом* виде (τ – параметр):

$$S = -1 + \frac{\tau}{(1-\kappa)(1-e^{-\tau})}, \quad \overline{S} = -1 + \frac{\tau}{(1-\kappa)(e^{\tau}-1)}. \tag{5.28}$$

Симметрия фазовых траекторий относительно начала координат позволяет построить отображение так, чтобы координаты $\dot{\varphi}$ у точек прообраза и образа имели одинаковые знаки. Для этого умножим формулу для $\overline{S}$ в (5.28) на -1 и переобозначим $-\overline{S}$ через $\overline{S}$ (т.е. образом будет точка на верхнем луче, симметричная от-

носительно начала координат точке, в которую придет траектория, начавшаяся в точке S). В итоге получим точечное отображение в виде:

$$S = -1 + \frac{\tau}{(1-\kappa)(1-e^{-\tau})}, \quad \bar{S} = 1 - \frac{\tau}{(1-\kappa)(e^{\tau}-1)}. \qquad (5.29)$$

Изучение отображения (5.29) при различных κ приводит к следующим результатам. При $0 < \kappa < 1/2$ диаграмма Ламерея представлена на рис. 5.12. При $\tau = 0$ $S(0) = \kappa/(1-\kappa)$ и $\bar{S}(0) = -\kappa/(1-\kappa)$. При $\tau \to +\infty$ $S(\tau) \to +\infty$ и $\bar{S}(\tau) \to 1$. Диаграмма Ламерея показывает, что при любых начальных угле и угловой скорости лодка после конечного числа перекладок руля обязательно попадет на отрезок скользящего режима (и, следовательно, придет по скользящему режиму в начало координат).

При $1/2 \le \kappa < 1$ и $\kappa > 1$ диаграммы Ламерея показаны соответственно на рис. 5.13 и 5.14. По сравнению со случаем $0 < \kappa < 1/2$ лодка приходит к скользящему режиму за меньшее число переключений руля, однако движение по самому отрезку становится медленнее (так как увеличение κ соответствует уменьшению отношения *a/b*, что приводит к уменьшению скорости затухания экспоненциального процесса (5.23)).

Случай $\kappa < 0$ при $a > 0$ соответствует правильной реализации этапа приведения и неправильной – одерживания ($b < 0$). Диаграмма Ламерея при $\kappa < 0$ представлена на рис. 5.15*а*. Из нее следует, что фазовые траектории много раз пересекают прямую переключений, но теперь нет отрезка скользящего режима, а есть *неподвижная точка отображения* S^*, соответствующая *предельному циклу*, причем этот цикл является *глобально асимптотически устойчивым*. Таким образом, при неправильном одерживании лодка с течением времени придет в автоколебательный режим при любых начальных условиях. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 5.15*б*.

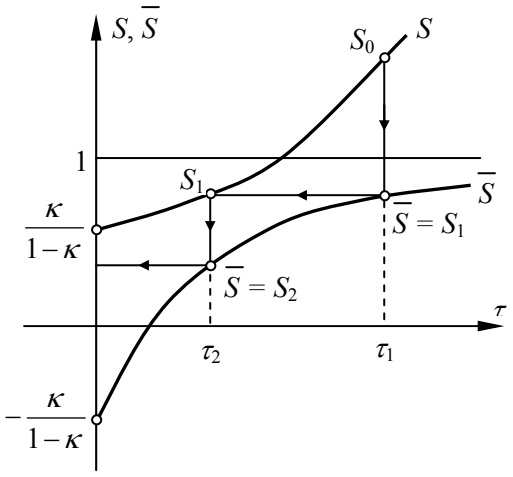


Рис. 5.12

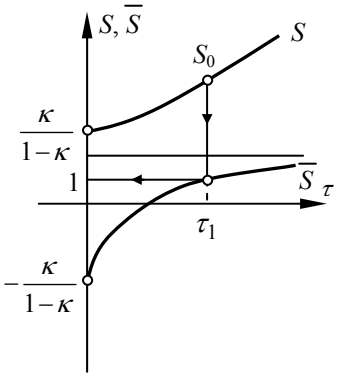


Рис. 5.13

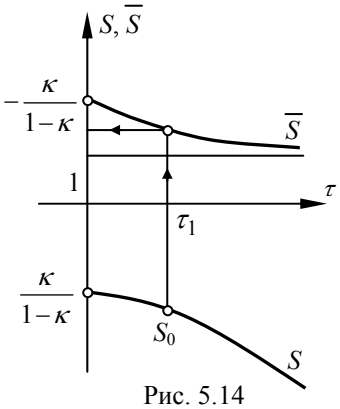
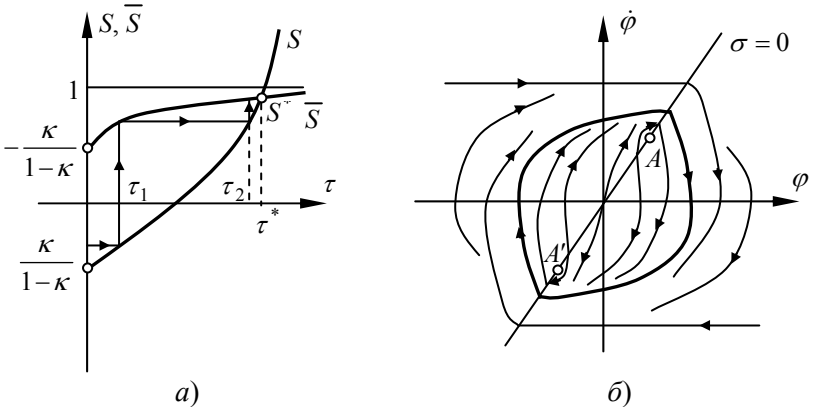


Рис. 5.14

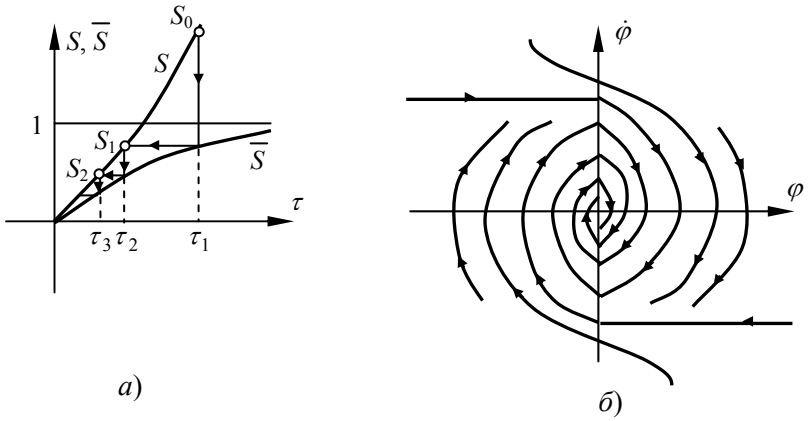
Случай $\kappa = 0$ при $a > 0$ соответствует полному отсутствию скоростной коррекции $(b = 0)$, т.е. рулевой вообще не одерживает лодку. Диаграмма Ламерея для этого случая представлена на рис. 5.16*а*. Из нее следует, что лодка с течением времени стабилизируется на заданном курсе, но это произойдет через *счетное*

число переключений руля (а скользящего режима не будет). Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 5.16*б*.



а) *б*)

Рис. 5.15



а) *б*)

Рис. 5.16

5.3.5. Реализация в AnyLogic

Работа реализована в файлах `Part9\boat.alp` (для линейной стратегии управления) (рис. 5.17) и `Part9\boat_re-`

`le.alp` (для релейной стратегии управления) (рис. 5.18). Дизайн окна анимации аналогичен работе «Стабилизация перевернутого маятника», только вместо колеблющегося маятника в левой верхней части анимации можно наблюдать лодку с рулем, движущуюся навстречу волнам, а вместо осциллограммы изменения перемещения точки опоры u имеется осциллограмма изменения поворота руля ψ. Предусмотрена возможность выбора типа лодки с помощью радиокнопки из группы «`Тип лодки`», а также выбора режима управления (автоматический, полуавтоматический или ручной) с помощью радиокнопки из группы «`Управление`». Анимация для релейной стратегии отличается тем, что для ручного управления используется не бегунок, а две кнопки «<» и «>», расположенные под анимированным изображением лодки (нажатие кнопки «<» перекладывает руль в крайнее левое положение, нажатие кнопки «>» – в крайнее правое положение).

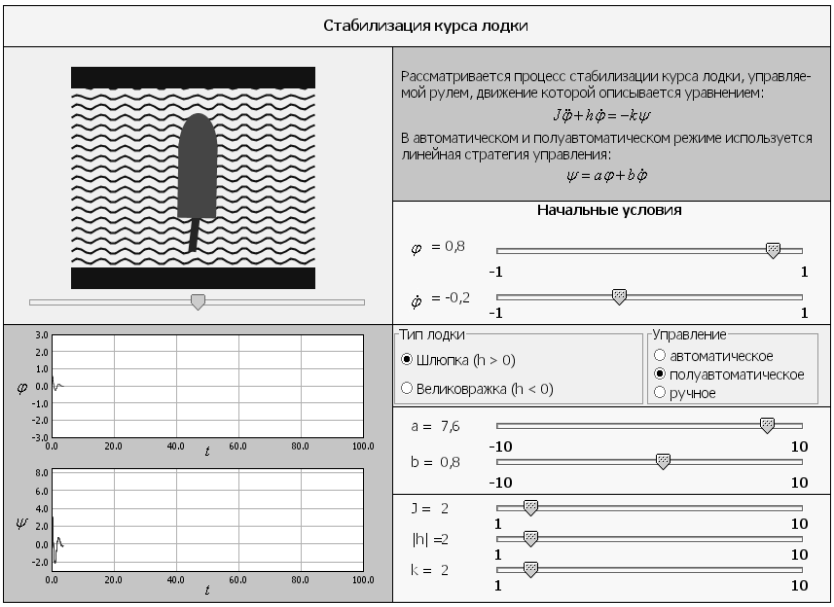


Рис. 5.17

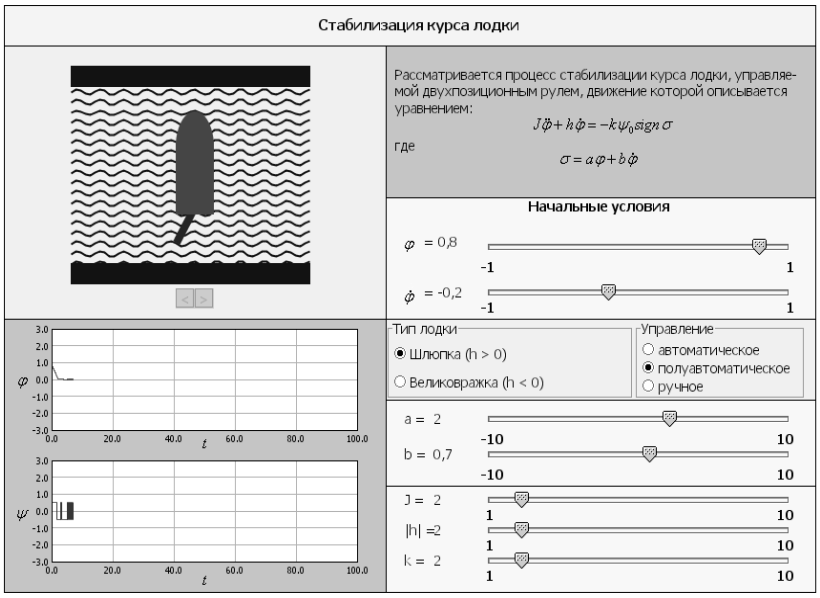


Рис. 5.18

5.3.6. Задания для эксперимента

1. В режиме автоматического управления пронаблюдайте за процессом стабилизации заданного курса лодки. Обратите внимание на изменение направления поворота руля (угла ψ).

2. В режиме ручного управления попытайтесь привести лодку на заданный курс. Насколько хватит вашей реакции для принятия решения и осуществления стратегии управления?

3. В полуавтоматическом режиме с помощью бегунков подберите значения параметров для стабилизации заданного курса лодки. Сделайте экспериментальные выводы о влиянии значений коэффициентов, отвечающих за угловую и скоростную коррекции, на процесс стабилизации, в том числе на скорость сходимости и на характер процесса (колебательный или апериодический). В случае релейного авторулевого обратите внимание, как влияют

коэффициенты угловой и скоростной коррекции на скорость приближения траекторий к скользящему режиму.

4*. Реализуйте в AnyLogic модель лодки, управляемой линейным авторулевым, с учетом его инерционности:

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi, \;\; T\dot{\psi} + \psi = a\varphi + b\dot{\varphi}.$$

Выясните, всегда ли состояние равновесия $(\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0, \psi = 0)$ будет асимптотически устойчивым. Может ли произойти бифуркация потери устойчивости состояния равновесия? Если да, то изменение каких параметров (a, b, T) может привести к неустойчивости?

5*. Реализуйте в AnyLogic модель лодки, управляемой релейным авторулевым, с учетом его инерционности (по аналогии с линейным авторулевым). При этом рассмотрите инерционность следующих типов (в соответствии со структурной схемой рис. 5.3):

а) Инерционность в *системе измерения*:

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi, \;\; \psi = \psi_0 \operatorname{sign}(a\tilde{\varphi} + b\theta),$$

$$T_1\dot{\tilde{\varphi}} + \tilde{\varphi} = \varphi, \;\; T_2\dot{\theta} + \theta = \dot{\varphi}.$$

б) Инерционность в *вычислителе* – первом элементе *системы управления*, который принимает с измерителя значения угла и угловой скорости лодки и вычисляет величину σ:

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi, \;\; \psi = \psi_0 \operatorname{sign}\sigma, \;\; T\dot{\sigma} + \sigma = a\varphi + b\dot{\varphi}.$$

в) Инерционность в *рулевой машине* – последнем элементе *системы управления*, который непосредственно вращает руль:

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = -k\psi, \;\; T\dot{\psi} + \psi = \psi_0 \operatorname{sign}(a\varphi + b\dot{\varphi}).$$

Параметры a, T, T_1, T_2 считать положительными.

Выясните, к какому устойчивому режиму (равновесному, автоколебательному или хаотическому) приходит лодка при различных значениях параметров управления (a, b) и инерционности (T, T_1, T_2). Инерционность какого из элементов обратной связи «сильнее» влияет на динамику системы?

6. Законы Кеплера и задача двух тел

6.1. Модель

Рассмотрим процесс движения тела в поле тяготения другого тела (в частности, движения планет Солнечной системы). Оба тела будем считать материальными точками. Пусть m и M – массы тел (m – масса планеты, M – масса Солнца), ρ – расстояние между ними, γ – гравитационная постоянная (константа тяготения). Тогда сила взаимного притяжения двух тел по модулю равна $\gamma mM/\rho^2$.

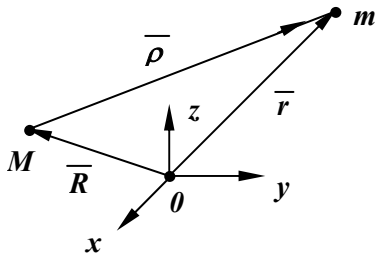


Рис. 6.1

Пусть $\bar{r}$ и $\bar{R}$ – радиус-векторы этих масс в некоторой инерциальной системе координат (рис. 6.1). Тогда согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения имеем уравнения изменения этих радиус-векторов во времени:

$$\begin{aligned} M\ddot{\bar{R}} &= \gamma \frac{Mm}{\left(\bar{R}-\bar{r}\right)^2} \frac{\bar{r}-\bar{R}}{\left|\bar{r}-\bar{R}\right|}, \\ m\ddot{\bar{r}} &= -\gamma \frac{Mm}{\left(\bar{R}-\bar{r}\right)^2} \frac{\bar{r}-\bar{R}}{\left|\bar{r}-\bar{R}\right|}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

В этих дифференциальных уравнениях $(\bar{r}-\bar{R})/\left|\bar{r}-\bar{R}\right|$ – единичный вектор, направленный от тела M к телу m.

Полученная динамическая система состоит из шести скалярных уравнений второго порядка (т.е. система двенадцатого по-

рядка). Однако ее исследование значительно упрощается векторной записью (6.1). Сложим оба уравнения системы; получим:

$$M\ddot{\overline{R}} + m\ddot{\overline{r}} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{M\dot{\overline{R}} + m\dot{\overline{r}}}{M+m} = \overline{v}_c = \text{const.} \qquad (6.2)$$

Это означает, что центр масс двух тел движется равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью v_c.

Запишем уравнения (6.1) в виде:

$$\ddot{\overline{R}} = \gamma\frac{m\left(\overline{r}-\overline{R}\right)}{\left|\overline{r}-\overline{R}\right|^3}, \quad \ddot{\overline{r}} = -\gamma\frac{M\left(\overline{r}-\overline{R}\right)}{\left|\overline{r}-\overline{R}\right|^3}$$

и вычтем уравнение для $\ddot{\overline{R}}$ из уравнения для $\ddot{\overline{r}}$. Получим:

$$\ddot{\overline{\rho}} = -\gamma\,(M+m)\frac{\overline{\rho}}{\left|\overline{\rho}\right|^3}, \qquad (6.3)$$

где $\overline{\rho} = \overline{r} - \overline{R}$ – радиус-вектор массы m (планеты) по отношению к массе M (Солнцу), т.е. это дифференциальные уравнения их *относительного* движения. Центр масс же системы двух тел движется равномерно и прямолинейно согласно (6.2).

Умножим обе части уравнения (6.3) векторно на $\overline{\rho}$; получим: $\ddot{\overline{\rho}} \times \overline{\rho} = 0$, или $\frac{d}{dt}\left(\dot{\overline{\rho}} \times \overline{\rho}\right) = 0$, откуда вытекает:

$$\dot{\overline{\rho}} \times \overline{\rho} = \overline{q} = \text{const.} \qquad (6.4)$$

Из (6.4) следует, что обе массы (M и m) всё время находятся в плоскости, проходящей через центр масс перпендикулярно вектору $\overline{q}$. Действительно, радиус-векторы $\overline{\rho}_m$ и $\overline{\rho}_M$ масс m и M (планеты и Солнца) по отношению к их центру масс равны, соответственно, $\overline{\rho}_m = \overline{r} - \frac{M\overline{R} + m\overline{r}}{M+m} = \frac{M}{M+m}\overline{\rho}$ и $\overline{\rho}_M = \overline{R} - \frac{M\overline{R} + m\overline{r}}{M+m} =$

$= -\dfrac{m}{M+m}\overline{\rho}$, где вектор $\overline{\rho}$, согласно (6.4), всё время перпендикулярен вектору $\overline{q}$.

Далее распишем (6.4) в скалярной форме, выбрав начало координат в начале вектора $\overline{\rho}$, т.е. в центре Солнца, и направим ось Oz вдоль вектора $\overline{q}$ длины q. Имеем:

$$\dot{\overline{\rho}} \times \overline{\rho} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = q\overline{k}, \tag{6.5}$$

где $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – орты осей Ox, Oy и Oz, а x, y, z – проекции вектора $\overline{\rho}$ на эти орты, причем векторы $\overline{\rho}$ и $\dot{\overline{\rho}}$ ортогональны орту $\overline{k}$ согласно его выбору и поэтому $z = \dot{z} = 0$. В силу этого из (6.5) следует только одно скалярное соотношение:

$$\dot{x}y - \dot{y}x = q. \tag{6.6}$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ ($\rho = |\overline{\rho}|$ – длина вектора $\overline{\rho}$), приводим (6.6) к виду:

$$\rho^2\dot{\varphi} = -q. \tag{6.7}$$

Соотношение (6.7) выражает **второй закон Кеплера**: при движении планеты в поле тяготения Солнца сохраняется **секторная (секториальная) скорость**, т.е. скорость, с которой радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает («ометает») площадь. Действительно, приращение площади $d\sigma$, описываемой вектором $\overline{\rho}$, равно $d\sigma = \dfrac{1}{2}\rho^2 d\varphi$ и поэтому

$$d\sigma = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\,dt = -\frac{q}{2}dt$$

или

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{q}{2} = \text{const},$$

что и требовалось доказать (рис. 6.2).

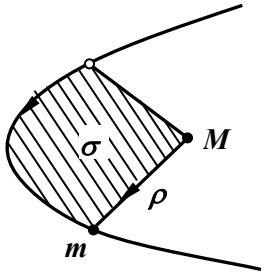


Рис. 6.2

Теперь перейдем к поиску орбиты планеты относительно Солнца. Для этого будем писать уравнения движения планеты относительно Солнца в полярных координатах (ρ и φ). Уравнение для $d\varphi / dt$ – это соотношение (6.7), которое запишем в виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{q}{\rho^2}. \tag{6.8}$$

Уравнение для $d\rho / dt$ можно получить из векторного уравнения (6.3), умножив его скалярно на вектор скорости $\dot{\bar{\rho}}$:

$$\ddot{\bar{\rho}}\dot{\bar{\rho}} = -\gamma\,(M + m)\frac{\bar{\rho}\dot{\bar{\rho}}}{\rho^3}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\bar{\rho}}^2}{2}\right) = -\gamma\,(M+m)\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{\rho}^2}{2}\right) = -\gamma\,(M+m)\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) =$$

$$= -\gamma\,(M+m)\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} = \gamma\,(M+m)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Интегрируя это равенство, получаем:

$$\frac{\dot{\bar{\rho}}^2}{2} - \frac{\gamma\,(M+m)}{\rho} = h = \text{const}. \tag{6.9}$$

Выразим в (6.9) $\dot{\bar{\rho}}^2$ через полярные координаты ρ и φ:

$$\dot{\bar{\rho}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\,\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2 + \left(\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 =$$

$$= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 .$$

После подстановки в (6.9) имеем:

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{2\gamma (M+m)}{\rho} = 2h$$

или, выражая $\dot{\varphi}$ через ρ согласно (6.8),

$$\dot{\rho}^2 + \frac{q^2}{\rho^2} - \frac{2\gamma (M+m)}{\rho} = 2h.$$

Разрешая последнее уравнение относительно $\dot{\rho}$, находим:

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{2h + \frac{2\gamma (M+m)}{\rho} - \frac{q^2}{\rho^2}}. \qquad (6.10)$$

Уравнения (6.8) и (6.10) представляют собой дифференциальные уравнения относительного движения планеты в плоскости Oxy. Если из этих уравнений исключить время t, разделив (6.10) на (6.8), то придем к одному уравнению орбиты планеты:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\rho^2}{q}\sqrt{2h + \frac{2\gamma (M+m)}{\rho} - \frac{q^2}{\rho^2}}.$$

Чтобы проинтегрировать это дифференциальное уравнение первого порядка, введем новую переменную $u = 1/\rho$. В результате приходим к уравнению:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{q}\sqrt{2h + 2\gamma (M+m)u - q^2 u^2} \equiv \frac{1}{q}\sqrt{f}.$$

Продифференцируем последнее уравнение по φ:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{q}\frac{1}{2\sqrt{f}}\frac{df}{du}\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2q}\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{df}{du}\frac{1}{q}\sqrt{f} =$$

$$= \frac{1}{2q^2}\frac{df}{du} = \frac{1}{2q^2}\left(2\gamma (M+m) - 2q^2 u\right)$$

или

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{q^2} \quad \left(\mu = \gamma (M+m)\right). \qquad (6.11)$$

Уравнение (6.11) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение линейного (гармонического) осциллятора. Как известно, его общее решение записывается в виде:

$$u = \frac{\mu}{q^2} + c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi = \frac{\mu}{q^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)\right],$$

где e и φ_0 – константы интегрирования. Постоянная φ_0 имеет смысл начала отсчета переменной φ на орбите и может быть выбрана равной 0 или π так, чтобы постоянная e была неотрицательной. После этого уравнение планетной орбиты примет вид:

$$\rho = \frac{q^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\varphi}, \quad e \geq 0. \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) является уравнением **конических сечений** (кривых, получающихся в сечении конуса плоскостями), а параметр e имеет смысл **эксцентриситета**[1]. При $e = 0$ орбита (коническое сечение) является окружностью, при $0 < e < 1$ – эллипсом, при $e = 1$ – параболой и при $e > 1$ – гиперболой (рис. 6.3). В точке $\rho = 0$ расположен фокус. Ближайшей к фокусу точкой орбиты является точка $\varphi = 0,\ \rho = q^2 / \left[\mu(1 + e)\right]$.

Для планет $0 < e < 1$, поэтому планеты движутся по *эллипсу*, в одном из фокусов которого находится Солнце. В этом состоит **первый закон Кеплера.** Между величинами a и b большой и малой полуосей эллипса, расстоянием $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от центра эллипса до его фокусов F_1 и F_2 и параметрами формулы (6.12) имеют место соотношения:

$$e = \frac{c}{a}, \quad a - c = \frac{q^2}{\mu(1 + e)}, \quad a + c = \frac{q^2}{\mu(1 - e)}. \tag{6.13}$$

---

[1] **Эксцентриситет** – отношение расстояния от произвольной точки A конического сечения до фиксированной точки, называемой **фокусом**, к расстоянию от той же точки A до фиксированной прямой, называемой **директрисой**.

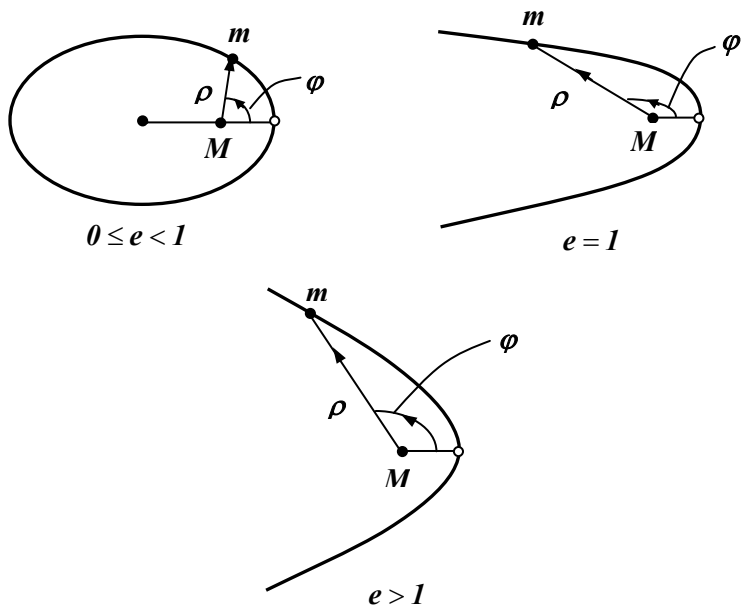


Рис. 6.3

Перейдем к извлечению из найденных соотношений **третьего закона Кеплера**, согласно которому отношение квадрата периода обращения планеты к кубу большой полуоси ее эллипса есть одна и та же величина для всех планет (как думал Кеплер, этот закон выражает общую гармонию небесных сфер). Прежде всего, интегрируя формулу секторной скорости планеты $d\sigma/dt = -q/2$ по периоду T, находим, что $\int_0^T \frac{d\sigma}{dt} dt = -\frac{q}{2} T$ (из этой формулы следует, что площадь эллипса, описываемого радиус-вектором планеты, *отрицательна* в выбранной системе координат). Отсюда, учитывая, что площадь эллипса по модулю равна πab, получаем:

$$-\pi ab = -qT/2$$

или

$$T = \frac{2\pi ab}{q}. \qquad (6.14)$$

Соотношения (6.13), (6.14) и равенство $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ составляют систему из *пяти* уравнений относительно *шести* величин *a*, *b*, *c*, *e*, *q* и *T*, что позволяет, в частности получить соотношение между *a* и *T*. Это соотношение может быть получено следующим образом:

$$T = \frac{2\pi ab}{q} = \frac{2\pi a}{q}\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{2\pi a^2}{q}\sqrt{1 - e^2}. \qquad (6.15)$$

Далее из соотношений (6.13) следует, что

$$a = \frac{q^2}{\mu(1 - e^2)}$$

или

$$\sqrt{1 - e^2} = \frac{q}{\sqrt{\mu a}}.$$

Подставляя найденное выражение в (6.15), находим, что

$$T = \frac{2\pi a^2}{q} \cdot \frac{q}{\sqrt{\mu a}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

или

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu},$$

что и является соотношением, выражающим третий закон Кеплера. Величина

$$\mu = \gamma(M + m) = \gamma M\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

несколько различна для разных планет, но эти различия не могли быть замечены во времена Кеплера, так как для Солнечной системы m / M – очень малая величина.

6.2. Реализация в AnyLogic

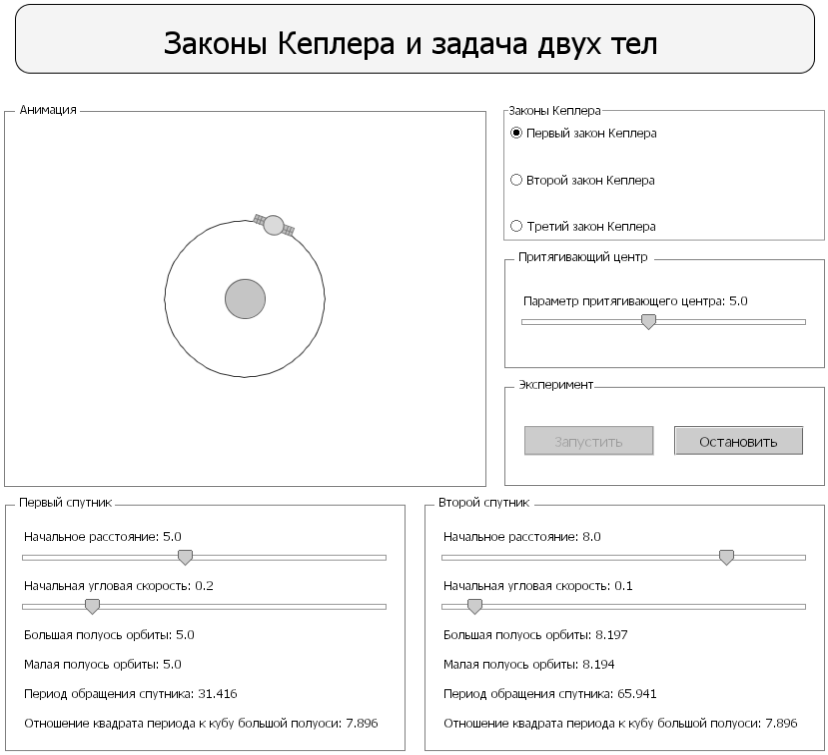


Рис. 6.4

Работа реализована в файле `Part10\KeplerLaws.alp`. Выбирая радиокнопку из группы «`Законы Кеплера`», можно наблюдать иллюстрацию первого (рис. 6.4), второго (рис. 6.5) и третьего (рис. 6.6) законов Кеплера. Модель реализована в форме дифференциальных уравнений в полярных координатах. Для всех трех законов можно задавать начальные условия (расстояние до Солнца и угловую скорость в некоторых условных единицах) для планет (в анимации они названы спутниками).

Значение параметра μ можно задавать с помощью бегунка «Параметр притягивающего центра». Чтобы использовать этот бегунок, нужно вначале запустить модель *на один шаг* кнопкой (*Выполнить шаг*) и затем двигать бегунок. В режиме *обычного запуска* (кнопка – *Запустить*) этот бегунок недоступен.

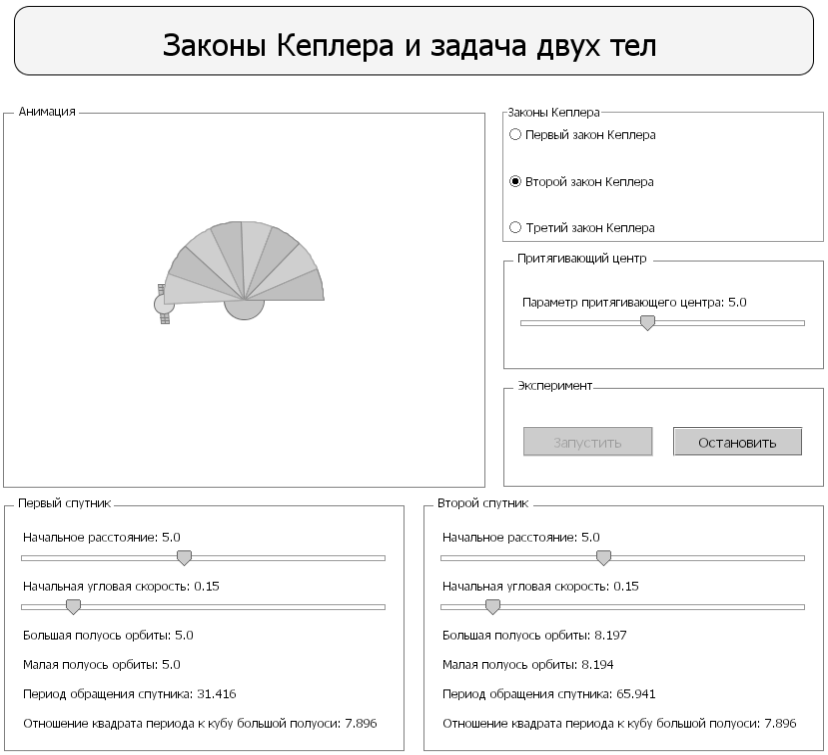


Рис. 6.5

Для запуска и остановки выполнения модели, кроме кнопок панели инструментов AnyLogic, можно использовать также кнопки «Запустить» и «Остановить» из группы кнопок «Эксперимент» в анимации.

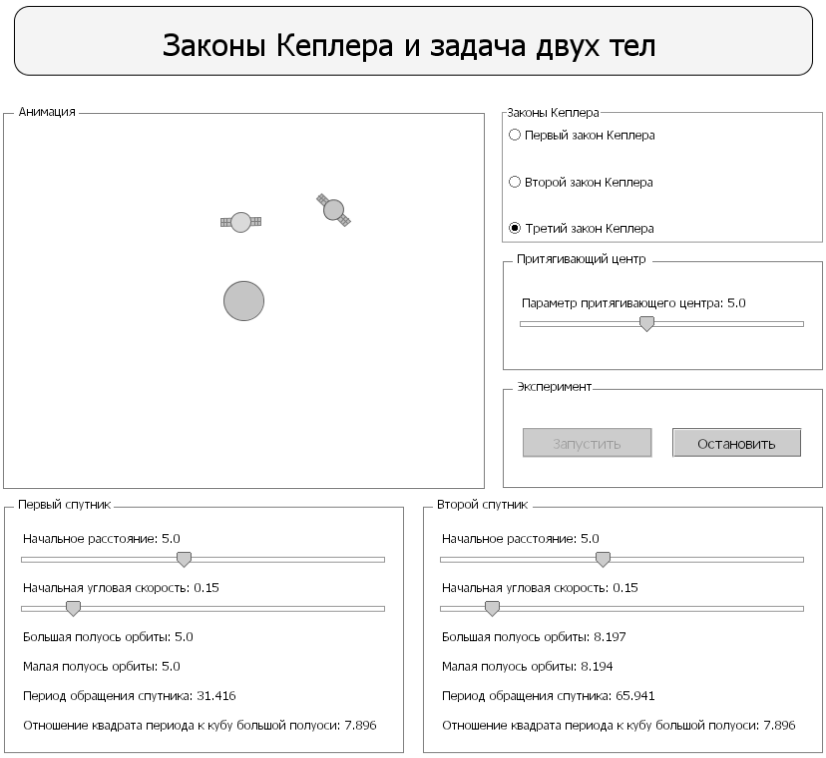


Рис. 6.6

В анимации для первого закона Кеплера рисуется орбита движения планеты, для второго закона – площади, «ометаемые» радиус-вектором планеты за равные промежутки времени (в качестве таких промежутков взяты отрезки в 2 единицы модельного времени, что можно увидеть в строке состояния внизу окна AnyLogic, где после слова «`Время`» выдается значение текущего момента модельного времени). Для третьего закона Кеплера в анимации отображаются две планеты, движущиеся в поле тяготения Солнца при разных начальных условиях. В нижней части окна анимации показаны величины большой и малой полуосей планет,

периоды их обращения и отношение квадрата периода к кубу большой полуоси.

6.3. Задания для эксперимента

1. Запустите модель в AnyLogic.

2. Выберите радиокнопку «`Первый закон Кеплера`».

а) Изменяя начальные условия и параметр притягивающего центра, проследите за изменением формы орбиты планеты. Как влияет параметр μ на вид орбиты?

б) Экспериментально определите (в условных единицах модели) **вторую космическую скорость**, т.е. начальную *линейную* (не угловую!) скорость, при которой орбита планеты из эллипса превращается в параболу и планета покидает Солнечную систему.

3. Выберите радиокнопку «`Второй закон Кеплера`». Проследите за площадями, «ометаемыми» радиус-вектором планеты за равные промежутки времени (2 единицы модельного времени).

4. Выберите радиокнопку «`Третий закон Кеплера`». Изменяя начальные условия, убедитесь в неизменности отношения квадрата периода обращения планеты к кубу большой полуоси ее эллипса для различных планет.

7. Динамические модели игр, обучения и целесообразного поведения

В этом разделе описаны работы, посвященные играм в отгадывание между человеком и ЭВМ. Вопрос о моделировании таких игр возник в связи с начавшейся в 1950-е – 60-е гг. дискуссией о том, может ли машина мыслить и обучаться [2, 5]. В качестве моделей игр в отгадывание приняты **автоматные модели**, предложенные М.Л. Цетлиным и описанные, в частности, в [2].

7.1. Модели простейших стратегий игры

Рассмотрим автоматные модели целесообразного поведения и обучения. В этих моделях субъект, принимающий решение, будет «мыслить» как некий **автомат** с внутренним **состоянием**, от которого зависит принимаемое решение, а само состояние определяется успешностью предшествующих решений.

Пусть у автомата возможных действий только два; тогда все состояния делятся на два класса: в одном классе принимается одно решение, в другом – другое. Мы будем говорить об *игре в отгадывание* на примере отгадывания того, в какой руке зажата монета. В связи с этим решение, принимаемое в состояниях одного из двух классов, будем обозначать буквой *Л* (левая рука), а решение, принимаемое в состояниях другого класса, – буквой *П* (правая рука) (рис. 7.1).

Рис. 7.1

Начнем с простейших автоматных описаний различных типов игроков: «простака», «хитреца», «упрямца», «упрямца наоборот» и «мистика». Загадывающий игрок кладет монету в левую или правую руку, а отгадывающий должен угадать эту руку. Смена состояний каждого автомата-игрока зависит от его типа (стратегии). «**Простак**» считает, что если он выиграл, то не должен ме-

нять своего состояния (мнения о том, в какой руке находится монета). Напротив, если он проиграл, то состояние нужно сменить. Пусть ξ – величина выигрыша игрока в одной партии (будем считать, что если игрок выиграл, то он получает $\xi = +1$, а при проигрыше $\xi = -1$). При $\xi = +1$ «простак» не меняет своего состояния, а при $\xi = -1$ – меняет. Стратегия игры «простака» (в виде графа – диаграммы переходов между состояниями) показана на рис. 7.2.

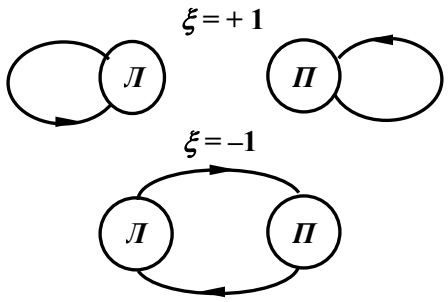


Рис. 7.2

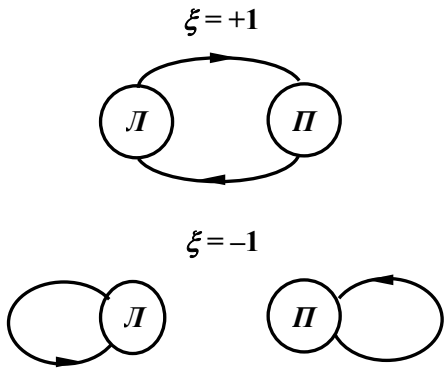


Рис. 7.3

«Хитрец» же считает, что если он выиграл, то его противник сменит положение монеты и поэтому он должен, выиграв, сме-

нить свое состояние. При проигрыше он, напротив, не меняет состояния, так как думает, что его противник сам его сменит. Стратегия игры «хитреца» изображена на рис. 7.3.

«Упрямец» не меняет своего решения и находится все время в состоянии *Л* или *П* вне зависимости от результатов игры. Граф смен его состояний не зависит от результата ξ предшествующей игры (рис. 7.4).

«Упрямец наоборот» всегда меняет свое решение вне зависимости от результатов игры. Граф смен его состояний, как и у «упрямца», не зависит от результата ξ предшествующей игры (рис. 7.5).

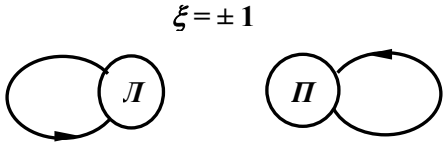


Рис. 7.4

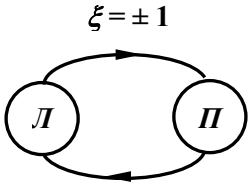


Рис. 7.5

Стратегии «простака», «хитреца», «упрямца» и «упрямца наоборот» – это простейшие **детерминированные** стратегии игроков.

«Мистик» доверяет свое решение *случаю*, бросая некий кубик (не обязательно симметричный) и принимая в соответствии с этим независимо состояния *Л* или *П* с вероятностями p и $q = 1 - p$. При этом он не обращает внимания на свои выигрыши и проигрыши, полностью полагаясь на свой талисман-кубик. Та-

кое поведение также можно описать (моделировать) автоматом с двумя состояниями, но теперь его состояния меняются не в строгой зависимости от проигрыша или выигрыша, а *случайно* по графу смены состояний (рис. 7.6) в соответствии со стрелками и указанными на них вероятностями.

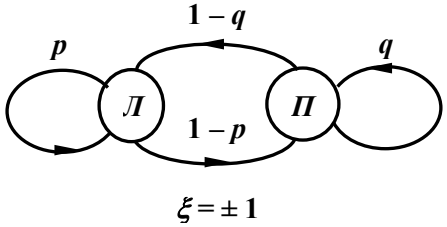


Рис. 7.6

Стратегия «мистика» является простейшей **стохастической** стратегией, поскольку смена состояний «мистика» происходит с некоторыми *вероятностями*. Эти вероятности не зависят от исхода предыдущей партии. Однако возможны и более сложные стохастические стратегии, в которых выбор решения зависит не только от результата бросания кубика, но и от исхода предшествующей партии. На рис. 7.7 изображен граф смены состояний (стратегия) для принимающего решение стохастического автомата (**стохастика**) с двумя состояниями, *смена* которых происходит *случайно* с вероятностями $1-p$ при выигрыше (т.е. при $\xi=+1$) и, соответственно, с вероятностями $1-q$ при проигрыше (т.е. при $\xi=-1$); при этом вероятности p и q независимы между собой. Очевидно, рассмотренные выше стратегии являются частными случаями такой стохастической стратегии: при $p=1$ и $q=0$ получается игрок-«простак», при $p=0$ и $q=1$ – «хитрец», при $p=1$ и $q=1$ – «упрямец», при $p=0$ и $q=0$ – «упрямец наоборот», а при $p=q$ в случае, когда $0<p,q<1$, – «мистик».

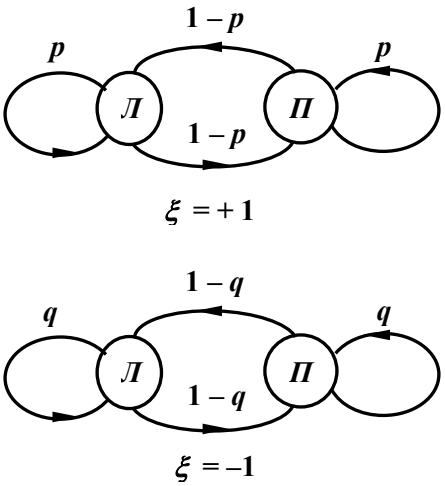


Рис. 7.7

В рассмотренных простых моделях игр в отгадывание имело место **обучение**: игроки «простак», «хитрец» и «стохастик» действовали не по заранее фиксированному плану, а *на основе результатов предшествующих игр*, поскольку они выбирали принимаемое в следующей партии решение в зависимости от результатов игры. «Упрямец» и «упрямец наоборот» *не обучались*, они действовали по заранее определенному плану, который мог быть и другим, реализующим некоторую произвольную *заранее заданную* последовательность действий (ходов). «Мистик» также *не обучался*, хотя и не имел заранее заданного плана: его действия определялись *случаем, не зависящим от хода игры*.

7.2. Модель стохастической адаптивной стратегии игры

Интерес к разработке адаптивных стратегий игры в отгадывание появился, когда возник вопрос о том, может ли ЭВМ обыграть человека и как этого достигнуть [6].

Пусть ЭВМ загадывает («зажимает в левой или правой руке» или «кладет в левый или правый ящик» монету), а человек дол-

жен отгадать, в какой «руке» (или в каком «ящике») находится монета. Изначально и человек, и ЭВМ располагают стратегией игры, при которой математические ожидания проигрыша и одновременно выигрыша равны нулю; это *случайный равновероятный* выбор решений *Л* и *П*. Сам по себе человек, не используя таблиц, такую стратегию осуществить не может. Кроме того, человек хочет выиграть, а эта стратегия заведомо не ведет к выигрышу. Скорее всего, человек будет стремиться к выигрышу, *основываясь в своем выборе на результатах предшествующей игры*. Если противником человека является *природа* (которую можно рассматривать как игрока, *безразличного* к проигрышу или выигрышу), то такая стратегия безусловно полезна. Но если человек играет против *ЭВМ*, которая, как и человек, *заинтересована в выигрыше*, то это уже не так. Для того чтобы обыграть человека, ЭВМ достаточно *разгадать стратегию его игры*. Какова же она? В качестве гипотезы принимается, что стратегия человека близка к **марковской**, т.е. в процессе игры формируются вероятности выбора решений *Л* и *П* в зависимости от предшествующих результатов игры. Так как память человека ограничена, то этих последних учитываемых игр недостаточно много.

При таком предположении возможна весьма простая стратегия ЭВМ, выигрывающая после выяснения в результате игры вероятностей выбора человеком решений *Л* и *П* в зависимости от предшествующих игр и их результатов: ЭВМ каждый раз загадывает ту «руку», *вероятность выбора которой человеком меньше* (разумеется, в предположении, что человек меняет свою стратегию достаточно медленно). Однако эта стратегия *не наилучшая*. Значительно лучший результат дает стратегия ЭВМ *с активным ее «вмешательством» в игру*, предложенная в [6]. Такое «вмешательство» возможно в силу того, что выбор ЭВМ можно представить как *управление* поведением человека (это управление будем обозначать буквой *u*), а саму игру – как *управляемый марковский процесс* с матрицами вероятностей изменения состояния человека $P(Л)$ и $P(П)$ (т.е. матрицей $P(u)$ – функцией от управления *u*, где *u* может принимать два значения: *Л* и *П*) и матрицей доходов

ЭВМ $\Xi(u)$ (также матричной функцией от управления u; Ξ – прописная греческая буква «кси»). Если ЭВМ выиграет партию, то ее доход будет равен $+1$, а если проиграет, то -1.

Состояние (внутреннее) этой марковской системы зависит от глубины k памяти человека (k – это число ближайших учитываемых человеком сыгранных партий). При $k = 0$ выбор человека не зависит от предшествующих игр, при $k = 1, 2, 3, \ldots$ учитываются, соответственно, одна, две, три, … предшествующие игры. Возможности памяти человека ограничены. Ниже принимается, что $k \le 4$. Матрицы вероятностей переходов идентифицируются в процессе игры параллельно для всех $k \le 4$, и всё время выбирается та матрица, которая в текущей игре дает наилучшие результаты (т.е. наибольший выигрыш). Игра начинается с $k = 0$, и затем по мере накопления данных используются и значения $k > 0$. Идентификация матриц $P(u)$ для $k = 4$ требует большого числа партий. Однако, как показывает эксперимент, ЭВМ выигрывает уже после нескольких десятков игр.

Описание последних k игр дается вектором внутреннего состояния марковской системы

$$A_s = (x_s, y_s;\ \ldots;\ x_{s+k}, y_{s+k})$$

(вектор размерности $2k + 2$), где x_s, …, x_{s+k} – выбор человека, а y_s, …, y_{s+k} – выбор ЭВМ, причем x_i и y_i могут принимать значения *Л* или *П*. Согласно принимаемой гипотезе, человек выбирает *Л* или *П* с вероятностями, определяемыми вектором A_s. Тем самым по вектору A_s при заданном выборе y_{s+k+1} определяются вероятности перехода от вектора A_s к вектору

$$A_{s+1} = (x_{s+1}, y_{s+1};\ \ldots;\ x_{s+k+1}, y_{s+k+1}).$$

Далее определяется матрица $P(u)$ вероятностей переходов от состояния A_s к состоянию A_{s+1} в зависимости от управления u, т.е. две матрицы: $P(Л)$ и $P(П)$. Элементы $\xi(A_{s+1})$ матрицы доходов (выигрышей):

$$\xi(A_{s+1}) = \begin{cases} -1 \text{ при } x_{s+k+1} = y_{s+k+1}, \\ +1 \text{ при } x_{s+k+1} \neq y_{s+k+1}. \end{cases}$$

Получается управляемая дискретная марковская система (дискретная марковская система иначе называется **марковской цепью**) с конечным числом состояний. Если эта марковская цепь **неприводимая** (т.е. матрица вероятностей переходов между состояниями такова, что из любого состояния можно попасть в любое состояние за конечное число шагов с ненулевой вероятностью) и, кроме того, наибольший общий делитель длин всех возможных **циклов** (т.е. циклических многошаговых переходов из состояния в это же состояние) равен 1, то марковская цепь является **эргодической**, т.е. существует вектор **финальных** (асимптотических при $n \to \infty$, где n – число шагов функционирования марковской цепи) вероятностей *нахождения* системы в ее внутренних состояниях. В этом случае можно применить метод Ховарда [7], который позволяет найти оптимальную *в стационаре* (т.е. с учетом финальных вероятностей) стратегию управления u как функцию состояния A_s. Такая стратегия была реализована на ЭВМ Д.М. Черток, Ю.И. Неймарком и О.Е. Масленниковой [2, 6]. При этом идентификация матрицы $P(u)$ проводилась одновременно при всех k $(k = \overline{0,4})$; при $k = 0$ матрица известна и не требует идентификации, поскольку выбор человеком решений *Л* и *П* считается равновероятным и не зависящим от предшествующего выбора. При $k > 0$ за вероятности принимаются соответствующие скользящие частоты в предшествующих играх.

Однако получающаяся марковская система не всегда является эргодической. В связи с этим при реализации данной игры в AnyLogic был использован подход к оптимизации стратегии ЭВМ, не связанный с методом Ховарда. При данном подходе осуществлялось вычисление математического ожидания ЭВМ на некоторое число r шагов вперед (но матрица $P(u)$ идентифицировалась на каждом шаге игры по скользящим частотам), и после этих r шагов производился выбор наилучшей стратегии для сле-

дующих *m* шагов; далее процесс повторялся. Как показывает эксперимент, ЭВМ начинает выигрывать (как и при использовании метода Ховарда) после нескольких десятков игр.

7.3. Реализация в AnyLogic

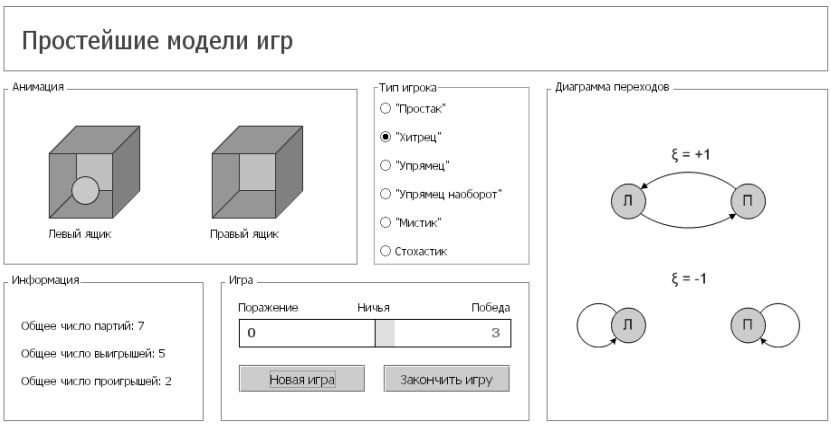


Рис. 7.8

Работы реализованы в файлах `Part11\GameModels.alp` (простейшие модели игр, рис. 7.8 – 7.10) и `Part11\StochasticGame.alp` (модель адаптивного стохастика – стохастическая адаптивная стратегия игры для ЭВМ, рис. 7.11). В обеих работах в окне анимации изображены два ящика, в один из которых машина кладет монету. Человек должен угадать, в каком ящике находится монета, и для сообщения машине своего решения щелкнуть мышью по передней грани выбранного ящика. После этого оба ящика открываются и пользователь видит, в каком ящике находилась монета (т.е. угадал он или нет). Для начала новой игры (партии) пользователь должен нажать кнопку «`Новая игра`», а затем сообщить машине свое решение. Нажатие кнопки «`Закончить игру`» приводит к окончанию игры и показу на экране текущего выбора машины (открытию того ящика, в котором находилась монета).

Под картинкой с изображением двух ящиков располагается информация об общем числе партий, выигрышей и проигрышей человека, а также индикатор успешности игры человека. Если у человека больше выигрышей, чем проигрышей, то закрашивается правая часть индикатора (светло-зеленым цветом), в противном случае – левая часть индикатора (бежевым цветом). При этом если у человека больше побед, чем поражений, то в правой части индикатора печатается разность побед и поражений (светло-зеленым цветом), в противном случае в левой части индикатора печатается разность поражений и побед (бежевым цветом).

В работе «Простейшие модели игр» с помощью радиокнопок из группы «`Тип игрока`» можно выбирать стратегию машины. После щелчка по радиокнопке в правой части окна анимации появляется граф – диаграмма переходов между состояниями автомата, соответствующая выбранной стратегии машины. С помощью бегунков, расположенных под диаграммой переходов, можно задавать вероятность p для «мистика» (рис. 7.9) и независимые вероятности p и q для стохастика (рис. 7.10).

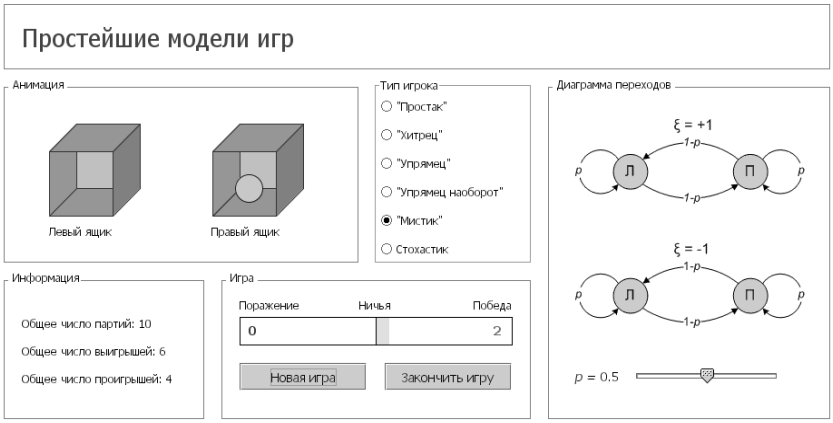


Рис. 7.9

В работе «Модель адаптивного стохастика» с помощью группы бегунков «`Параметры стратегии ЭВМ`», расположенной

справа от картинки с ящиками, можно задавать параметры стохастической адаптивной стратегии ЭВМ: глубину памяти (k) и число шагов планирования (r). По умолчанию $k = 4$ и $r = 1$. Рекомендуется запускать эту работу кнопкой (обычный запуск) на панели инструментов AnyLogic, так как при запуске кнопкой (запуск на один шаг) стохастическая адаптивная стратегия не всегда работает правильно. Имеется также кнопка «Перезапустить», нажатие которой приводит к обнулению всех индикаторов и обновлению анимации.

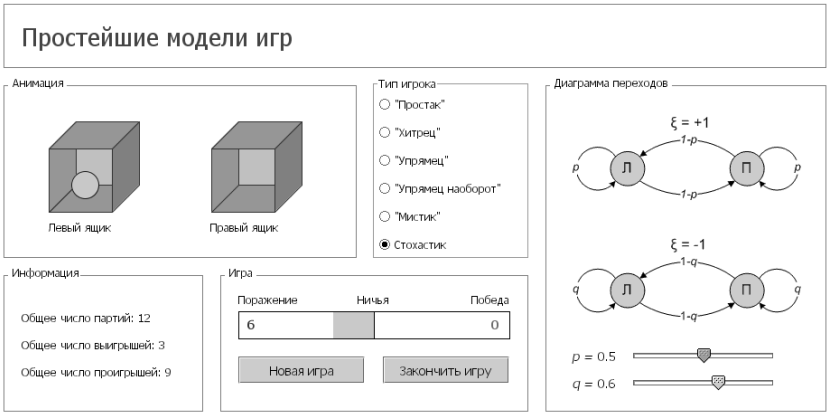


Рис. 7.10

7.4. Задания для эксперимента

1. Запустите в AnyLogic работу «Простейшие модели игр».

2. С помощью радиокнопок из группы «Тип игрока» поочередно выбирайте различные детерминированные стратегии машины («простак», «хитрец», «упрямец», «упрямец наоборот») и пронаблюдайте за игрой машины.

3. Выберите для машины стратегию «мистика» и попробуйте поиграть с ней. Изменяйте вероятность p с помощью бегунка. Удастся ли вам выработать стратегию, позволяющую обыграть «мистика» (при различных p)?

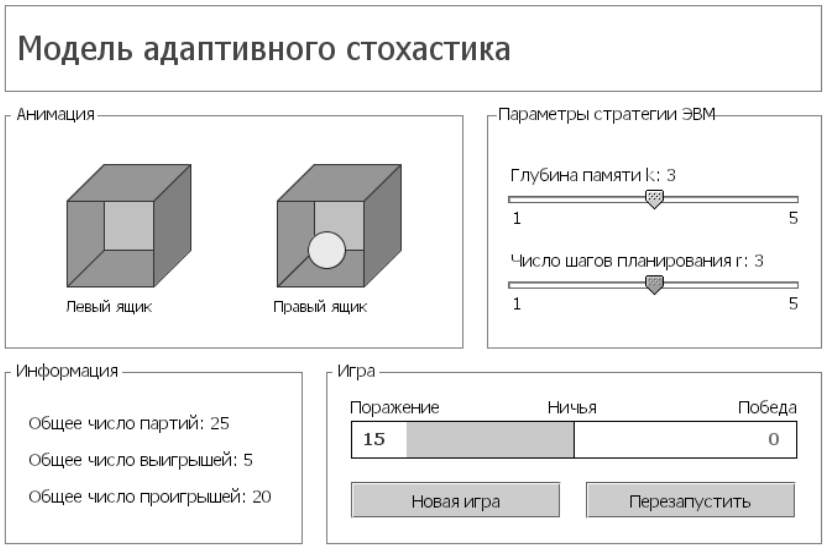


Рис. 7.11

4. Выберите для машины стратегию стохастика и попробуйте поиграть с ней. Изменяйте независимые вероятности p и q с помощью бегунка. Удастся ли вам выработать стратегию, позволяющую обыграть стохастика (при различных p и q)?

5. Запустите в AnyLogic работу «Модель адаптивного стохастика».

6. Выберите в качестве своей стратегии (стратегии человека) некоторую периодическую последовательность выбора ящиков, например повторяющуюся последовательность (*Л*, *П*) или (*Л, П*, *П*, *Л, П*, *Л*). Через сколько партий машина начнет систематически вас обыгрывать? Как это число партий зависит от параметров k и r?

7. Удастся ли машине, действующей по стохастической адаптивной стратегии, обыграть вас, если вы будете выбирать ящики совершенно случайно (без заранее определенной статистической закономерности)?

Список литературы

1. Математические модели в естествознании и технике. Лабораторный практикум в пакете AnyLogic. Часть 1 / А.В. Островский, А.С. Ефимов, О.А. Морёнов, А.Н. Половинкин. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.
2. Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2004.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, Физматгиз, 1959.
4. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. Динамические модели теории управления. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1985.
5. Винер Н. Машины изобретательнее людей? (Интервью для журнала «Юнайтед Стэйтс Ньюс энд Уорлд Рипорт») // В кн.: Винер Н. Кибернетика. М.: Советское радио, 1968. С. 306 – 313.
6. Черток Д.М., Неймарк Ю.И., Масленникова О.Е. Игра в отгадывание между человеком и компьютером // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1 (26). С. 142 – 144.
7. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы. – М.: Советское радио, 1964.

Содержание