МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В.П. Савельев

УПРАВЛЯЕМЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета вычислительной математики и кибернетики для студентов ННГУ, обучающихся по специальности 010501 «Прикладная математики и информатика» и направлению подготовки 010500 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2011

УДК 519.85; 519.853.3
ББК 183.4
С-12

С-12 Савельев В.П. УПРАВЛЯЕМЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. – 79 с.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент **В.М. Шашков**

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов старших курсов факультета ВМК с целью развития у них навыков применения методов качественной теории динамических систем к решению задач управления. В качестве объекта управления выбран классический нелинейный осциллятор. Поскольку в составе границы области управляемости почти всегда присутствует седловая точка вместе со своими ω-сепаратрисами одной из двух вспомогательных автономных систем, особое внимание уделено строению границы, порождаемой этой седловой точкой. Более того, проведена полная классификация всех возможных вариантов связных компонент множества неуправляемости, содержащих в составе своей границы лишь одну «порождающую» седловую точку.

Пособие может быть использовано при чтении специального курса «Управляемые динамические системы», общих курсов «Концепции современного естествознания», «Теория управления», «Математическое моделирование», а также при выполнении курсовых и дипломных работ

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии факультета ВМК ННГУ, д. ф.-м.наук, проф. Л.П. Жильцова

УДК 519.85; 519.853.3
ББК 183.4

1. Область управляемости и структура ее границы

1.1. Одномерное управляемое движение. Вспомогательные p-система и q-система, связь их траекторий с границей множества управляемости.

Будем изучать управляемое одномерное движение объекта, которое можно описать дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = u(t), \quad (1.1)$$

где кусочно-непрерывная функция $u(t)$ задает управляемое воздействие, а непрерывно-дифференцируемая функция $f(x, \dot{x})$ задает неуправляемое воздействие (воздействие среды) на движение объекта.

<u>Определение 1.1.</u> Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, определенную на конечном отрезке времени $[0, T]$ (T-не фиксировано), будем называть допустимым управлением, если ее значения заключены в заданном отрезке $[q, p]$.

<u>Определение 1.2.</u> Решение $M(t) = \{x(t), y(t)\},\ 0 \le t \le T$, системы

$$\dot{x} = y, \dot{y} = u(t) - f(x, y) \quad (1.2)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0 \quad (1.3)$$

(или геометрический образ этого решения в фазовой плоскости G переменных x, y) будем называть допустимой траекторией, выходящей из точки $M_0(x_0, y_0)$.

<u>Определение 1.3</u>. Если для точки M_0 существует выходящая из нее допустимая траектория, удовлетворяющая конечному условию

$$x(T) = 0, y(T) = 0, \quad (1.4)$$

то говорят, что начало координат достижимо из точки M_0, а система (1.2) называется управляемой в точке M_0.

Совокупность точек, в которых система (1.2) управляема, образует множество управляемости U. Дополнительное к нему множество N в фазовой плоскости G называется множеством неуправляемости.

<u>Определение 1.4</u>. Система (1.2) называется локально управляемой, если существует окрестность начала координат, принадлежащая множеству управляемости U.

Мы будем предполагать систему (1.2) локально-управляемой, вследствие чего множество управляемости U будет открытым, а множество неуправляемости N будет замкнутым.

При изучении множества управляемости U и его границы Γ нам будут нужны траектории автономных систем

$$\dot{x} = y, \dot{y} = p - f(x, y) \quad (1.5)$$

$$\dot{x} = y, \dot{y} = q - f(x, y) \quad (1.6)$$

которые будем называть соответственно p-системой и q-системой. Символом $\gamma_p(A)$ будем обозначать непродолжаемую траекторию p-системы, проходящую через точку A в некоторый момент времени t_0. Часть траектории $\gamma_p(A)$, соответствующую значениям $t > t_0$, назовем положительной полутраекторией [1], выходящей из точки A, и обозначим ее $\gamma_p^{+}(A)$. Часть траектории $\gamma_p(A)$, соответствующую значениям $t < t_0$ назовем отрицательной полутраекторией, входящей в точку A и обозначим ее $\gamma_p^{-}(A)$. Аналогичный символ имеют обозначения $\gamma_q(A), \gamma_q^{+}(A)$ и $\gamma_q^{-}(A)$ траекторий и полутраекторий q- системы.

Очевидно, вместе с точкой A, не являющейся состоянием равновесия p-системы (q- системы), множеству управляемости U принадлежит отрицательная траектория $\gamma_p^{-}(A)$ ($\gamma_q^{-}(A)$- этой системы, входящая в точку A. Отсюда легко следует.

<u>Свойство 1.1.</u> Траектория p-системы (q-системы), не совпадающая с ее состоянием равновесия, либо целиком принадлежит множеству U, либо целиком принадлежит множеству N, либо на этой траектории найдется разделяющая точка A, такая, что отрицательная полутраектория $\gamma_p^{-}(A)(\gamma_q^{-}(A))$ принадлежит множеству U, а положительная полутраектория $\gamma_p^{+}(A)$ ($\gamma_q^{+}(A)$) принадлежит множеству N.

Разделяющая точка траектории p-системы (q-системы) принадлежит, очевидно, границе Γ множества управляемости, а также множеству N, в силу его замкнутости.

Пусть точка $A(a_1, a_2)$ лежит в верхней полуплоскости $G^{+} = \{(x, y):\ y > 0\}$. Запишем уравнения положительных полутраекторий $\gamma_p^{+}(A)$ ($\gamma_q^{+}(A)$), непродолжаемых в G^{+}, в виде решений $y = \varphi_p(x; a_1, a_2), y = \varphi_q(x; a_1, a_2)$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p - f(x, y)}{y}, \tag{1.7}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q - f(x, y)}{y}, \tag{1.8}$$

с начальным условием $y(a_1) = a_2$. Так как вторая компонента $y(t)$ допустимой траектории $M(t)$ системы (1,2), выходящей из точки A, в силу своей непрерывности остается положительной на некотором отрезке $[0, t_2]$, то соотношение $\dot{x}(t) \equiv y(t) > 0$ обеспечивает существование обратной монотонной функции $t = t(x)$, определенной на некотором отрезке $[a_1, b_1]$ $a_1 < b_1$. Тогда уравнение дуги допустимой траектории, выходящей из точки A и расположенной в G^+ можно записать в виде $y=\varphi(x;a_1,a_2)$, где функция $\varphi(x;a_1,a_2)$ является решением уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u(t(x))-f(x,y)}{y} \tag{1.9}$$

с начальным условием: $y(a_1)=a_2$. Учитывая, что $u(t(x))\in[q,p]$ для всех $x\in[a_1,b_1]$, и используя на каждом интервале непрерывности функции $u(t(x))$ теорему об оценках решения двух дифференциальных уравнений первого порядка [2], получаем

Свойство 1.2. На общем интервале $(a_1,c_1), a_1<c_1$, определения решений $y=\varphi_p(x;a_1,a_2)$, $y=\varphi_q(x;a_1,a_2)$, $y=\varphi(x;a_1,a_2)$ уравнений (1.7), (1.8), (1.9) с одинаковым начальным условием $y(a_1)=a_2>0$ справедливо неравенство

$$0<\varphi_q(x;a_1,a_2)\le\varphi(x;a_1,a_2)\le\varphi_p(x;a_1,a_2) \tag{1.10}$$

Аналогичным образом для нижней полуплоскости $G^-=\{(x,y):y<0\}$ устанавливается

Свойство 1.3. На общем интервале (α_1,a_1), $\alpha_1<a_1$, определения решений $y=\varphi_p(x;a_1,a_2)$, $y=\varphi_q(x;a_1,a_2)$, $y=\varphi(x;a_1,a_2)$ уравнений (1.7), (1.8), (1.9) с одинаковым начальным условием $y(a_1)=a_2<0$ выполняется неравенство

$$\varphi_q(x;a_1,a_2)\le\varphi(x;a_1,a_2)\le\varphi_p(x;a_1,a_2)<0 \tag{1.11}$$

Свойство 1.4. Дуга траектории p-системы (q-системы), целиком расположенная или в верхней полуплоскости G^+, или в нижней полуплоскости G^-, является дугой без контакта [1] для траекторий q- системы (p-системы).

Свойство 1.4, очевидно, следует из сравнения угловых коэффициентов (1.7) и (1.8). Касание траекторий q- системы и p-системы может иметь место лишь в точках оси $0x$, которая является для обеих систем изоклиной вертикальных наклонов.

Свойство 1.5. Неравенство (1.10) при $a_2=0$ справедливо на некотором интервале (a_1,c_1), $a_1<c_1$, если в точке $A(a_1,0)$ выполнено условие: $q-f(a_1,0)>0$. Неравенство (1.11) при $a_2=0$ справедливо на некотором интервале (α_1,a_1), $\alpha_1<a_1$, если в точке $A(a_1,0)$ выполняется условие $p-f(a_1,0)<0$.

Для доказательства свойства 1.5 достаточно применить теорему об оценках решений [2] к уравнениям:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{q-f(x,y)}, \tag{1.12}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{u(t(y))-f(x,y)}, \tag{1.13}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{p-f(x,y)}, \tag{1.14}$$

а затем перейти к функциям, участвующим в неравенствах (1.10), (1.11) и являющимися обратными по отношению к решениям уравнений (1.12). (1.13) и (1.14).

В доказываемых ниже леммах 1.1-1.2 обнаруживается важная роль траекторий вспомогательных систем (1.5) и (1.6) в построении границы Γ множества управляемости U. В леммах 1.1-1.2 под траекторией $\gamma_p(A)$ $(\gamma_q(A))$ понимается траектория p-системы (q-системы), непродолжаемая или в полуплоскости G^+, если точка $A \in G^+$, или в полуплоскости G^-, если точка $A \in G^-$; аналогичный смысл имеют обозначения полутраекторий $\gamma_p^+(A)$, $\gamma_p^-(A), \gamma_q^+(A), \gamma_q^-(A)$.

ЛЕММА 1.1. Если точка A не лежит на оси $0x$, принадлежит границе Γ множества управляемости системы (1.2) и не является разделяющей для $\gamma_q(A)$ ($\gamma_p(A)$) то:

а) точка A является разделяющей для $\gamma_p(A)$ ($\gamma_q(A)$);

в состав Γ входит непродолжаемая в соответствующей полуплоскости $\gamma_q(A)$ ($\gamma_p(A)$) целиком, либо ее часть $\gamma_q^+(B)$ ($\gamma_p^+(B)$) от разделяющей ее точки B;

в) существует окрестность точки A, не содержащая других точек границы Γ, кроме указанных в пункте б) и самой точки A.

Докажем лемму 1.1. для случая, когда точка A лежит в верхней полуплоскости G^+ и не является разделяющей для траектории $\gamma_q(A)$. Остальные 3 случая доказываются аналогично.

Возьмем произвольную точку D, расположенную на положительной полутраектории $\gamma_q^+(A)$ и точку C, расположенную на отрицательной полутраектории $\gamma_q^-(A)$ и принадлежащую множеству неуправляемости N, получим дугу CD траектории $\gamma_q(A)$, принадлежащую N. В полуплоскости G^+ для дуги CD построим замкнутый элементарный топологический четырехугольник $PQLK$, ограниченный двумя дугами PQ и KL траекторий p-системы $\gamma_p(C)$ и $\gamma_p(D)$, содержащими точку C и точку D соответственно и являющимися дугами без контакта для траекторий q-системы, а также двумя дугами PK и QL траекторий q-системы (рис.1.1).

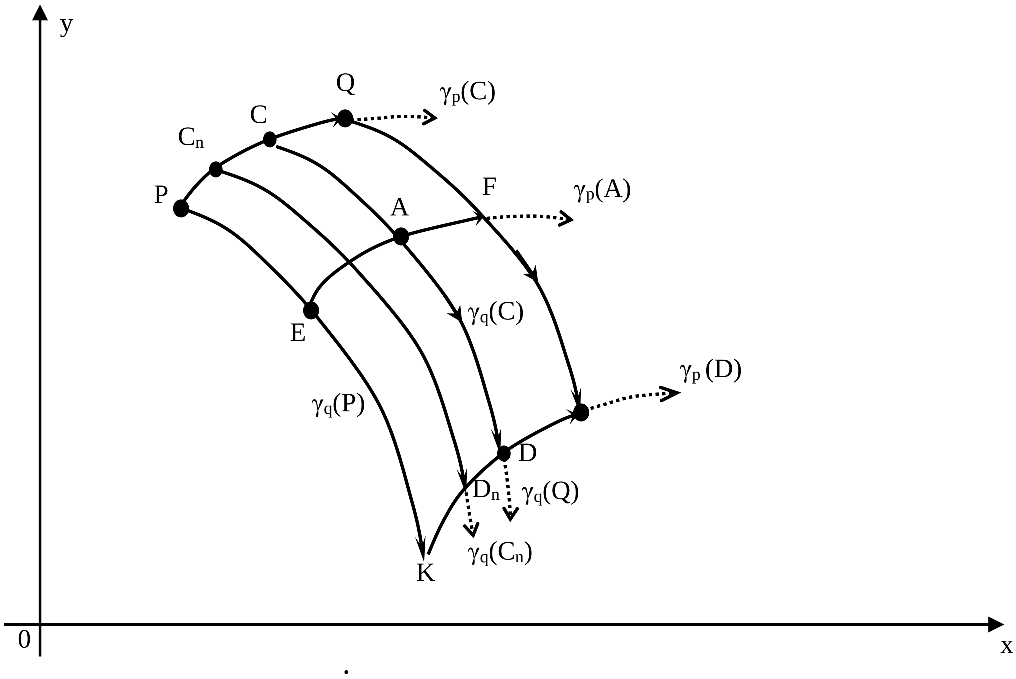

Рис.1.1. Пояснение к леммам 1.1 и 1.2.

Существование такого четырехугольника вытекает из непрерывной зависимости решений q-системы по начальным условиям, и доказано в [1], где описаны также его свойства. Поскольку точка $C \in N$, часть CQ дуги PQ принадлежит множеству N согласно свойству 1.1. Поскольку через каждую точку четырехугольника $CQLD$ проходит траектория q- системы, которая при убывании t обязательно пересекает часть CQ дуги без контакта PQ, весь четырехугольник $CQLD$ принадлежит множеству N. Точка C должна быть разделяющей для траектории $\gamma_p(C)$, ибо в противном случае ее дугу PQ без ограничения общности рассуждений можно считать принадлежащей множеству N. Но это означало бы, что весь четырехугольник $PQLK$ принадлежит множеству N, а это противоречит предположению о том, что точка A принадлежит границе Γ множества управляемости. Итак, точка $C \in \Gamma$ и часть $[PC)$, (исключая точку C) дуги без контакта PQ, принадлежит множеству управляемости U. Возьмем на дуге $[PC)$ последовательность точек $C_n \to C$. Полутраектории $\gamma_q^+(C_n)$ обязательно пересекают часть $[KD)$ дуги контакта KL в некоторых точках D_n, $D_n \to D$. Так как точка $C_n \in U$, существует допустимая траектория $\gamma(C_n)$, идущая из точки C_n в начало координат. При этом она может при возрастании t покинуть четырехугольник C_nCDD_n лишь пересекая дугу $[D_nD)$ в некоторой точке D_n^*, поскольку пересекая дугу CD она попадает в множество неуправляемости N. Из того, что $D_n \to D$ следует сходимость последовательности точек D_n^* к точке D. Но так как точка $D_n^* \in U$, отсюда следует, во-первых, что точка $D \in \Gamma$, а во-вторых, что точка D является разделяющей для траектории $\gamma_p(D)$. Итак, часть $[KD)$ дуги без контакта KL принадлежит множеству U. Но это означает, что четырехугольник $PKDC$ (исключая дугу CD) принадлежит множеству U, поскольку через каждую его точку проходит траектория q-системы, пересекающая при возрастании t дугу $[KD)$. Легко теперь видеть, что точка A является разделяющей для траектории $\gamma_p(A)$, поскольку дуга $[EA)$ полутраектории $\gamma_p^-(A)$ принадлежит U, а дуга AF полутраектории $\gamma_p^+(A)$ принадлежит N (рис.1.1).

Утверждения а) и б) нами доказаны, а утверждение в) вытекает из вышеизложенного, поскольку за искомую окрестность точки A можно взять элементарный четырехугольник $PQLK$.

ЛЕММА 1.2. Если точка A не лежит на оси $0x$ и является разделяющей для обеих траекторий $\gamma_q(A)$ и $\gamma_p(A)$, то:

а) в состав границы Γ множества управляемости системы (1.2) входят обе непродолжаемые в соответствующей плоскости полутраектории $\gamma_q^+(A)$ и $\gamma_p^+(A)$;

б) существует окрестность точки A не содержащая других точек границы Γ, кроме указанных в пункте а) и самой точки A.

Возьмем для определенности точку A в полуплоскости G^+. Взяв на полутраектории $\gamma_q^+(A)$ произвольную точку D, построим для дуги AD элементарный четырехугольник $EFLK$, расположенный в G^+ и ограниченный дугами EF и KL траекторий p-системы $\gamma_p(A)$ и $\gamma_p(D)$, являющимися дугами без контакта для траекторий q-системы, а также дугами EK и FL траекторий q-системы (рис.1.1). Поскольку часть AF дуги EF принадлежит множеству N, четырехугольник $AFLD$ также принадлежит N. Аналогично тому, как это сделано в лемме 1.1, показывается, что если часть $[EA)$ дуги EF принадлежит множеству управляемости U, то на части $[KD)$ дуги KL существует последовательность точек D_n^*, принадлежащих U, сходящаяся к точке D. А это означает, что точка D, дуга $[KD)$, а вместе с ней и четырехугольник $EKDA$ (за исключением дуги AD) принадлежат множеству управляемости U. Аналогичным образом, с помощью построения для дуги AF элементарного четырехугольника $CQLD$, докажем, что любая точка F полутраектории $\gamma_p^+(A)$ также принадлежит границе Γ. Далее, взяв дугу EF траектории $\gamma_p(A)$, построим для нее элементарный четырехугольник

$PQLK$, расположенный в G^+ и ограниченный дугами PK и QL траекторий q-системы и дугами PQ и KL траекторий p-системы (рис.1.1). Поскольку точка F, согласно лемме 1.1, является разделяющей для траектории $\gamma_q(F)$, дуга $[QF)$, а вместе с ней и четырехугольник $PQFE$ (за исключением дуги EF) принадлежат множеству U. Оставшаяся часть $EFLK$ четырехугольника $PQLK$, как мы уже видели, разбивается траекторией $\gamma_q(A)$ на два четырехугольника: четырехугольник $EKDA$ (за исключением дуги AD) принадлежит множеству U, а замкнутый четырехугольник $AFLD$ принадлежит множеству N. Этим и доказано утверждение б) леммы 1.2. Доказательство леммы 1.2 для случая, когда точка A расположена в нижней полуплоскости G^-, проводится аналогичным образом.

Из лемм 1.1 и 1.2 вытекает

Следствие 1.1. Вместе с точкой A полуплоскости $G^+(G^-)$ границе Γ множества управляемости U принадлежит одно из следующих множеств:

а) вся непродолжаемая в $G^+(G^-)$ траектория $\gamma_p(A)$, если она не содержит разделяющей точки;

б) вся непродолжаемая в $G^+(G^-)$ траектория $\gamma_q(A)$, если она не содержит разделяющей точки;

в) обе непродолжаемые в $G^+(G^-)$ полутраектории $\gamma_p^+(B)$ и $\gamma_q^+(B)$, если по крайней мере одна из непродолжаемых в $G^+(G^-)$ траекторий $\gamma_p(A)$ и $\gamma_q(A)$ содержит разделяющую точку B.

2. Структура границы множества управляемости в окрестности точек контакта траекторий p-системы и q-системы

Определение 2.1. Интервал оси $0x$, в точках которого выполнено неравенство $q - f(x,0) > 0$ $(p - f(x,0) < 0)$ будем называть интервалом положительного (отрицательного) типа.

Определение 2.2. Интервал оси $0x$, в точках которого выполнено соотношение

$$q < f(x,0) < p \tag{2.1}$$

будем называть интервалом смешанного типа.

Очевидно, если точка $A(a,0)$ не является состоянием равновесия p-системы или q-системы, она принадлежит к интервалу одного из указанных выше трех типов. Пусть точка $A(a,0)$ расположена на интервале положительного (отрицательного) типа. В леммах 2.1. и 2.2. будем понимать под $\gamma_p^+(A)$ и $\gamma_q^+(A)$ положительные полутраектории p-системы и q- системы, выходящие из точки A и непродолжаемые в полуплоскости $G^+(G^-)$. Аналогично, $\gamma_p^-(A)$ и $\gamma_q^-(A)$ означают отрицательные полутраектории p-системы и q-системы, непродолжаемые в $G^-(G^+)$.

ЛЕММА 2.1. Если точка $A(a,0)$ расположена на интервале положительного или отрицательного типа, принадлежит границе Γ множества управляемости и не является разделяющей для траектории $\gamma_p(A)$ $(\gamma_q(A))$, то:

а) точка A является разделяющей для $\gamma_q(A)$ $(\gamma_p(A))$;

б) в границу Γ входит отрицательная полутраектория $\gamma_p^-(A)$ $(\gamma_q^-(A))$ целиком, либо ее дуга BA от разделяющей ее точки B до точки A;

в) в границу Γ входит вся положительная полутраектория $\gamma_q^+(A)$ $(\gamma_p^+(A))$;

г) существует отрезок EF оси $0x$, содержащий точку A, такой, что $EA \subset N, (AF] \subset U,$ $([EA) \subset U, AF \subset N)$;

д) Существует окрестность точки A, не содержащая других точек границы Γ, кроме указанных выше.

Пусть для определенности точка A расположена на интервале положительного типа не является разделяющей для траектории p-системы $\gamma_p(A)$. Возьмем на полутраектории CA $\gamma_p^-(A)$ некоторую точку C, принадлежащую множеству N и для дуги построим элементарный четырехугольник $PQEF$, ограниченный дугой PQ траектории $\gamma_q(C)$, отрезком EF оси $0x$, содержащим точку A и не содержащим начало координат, и двумя дугами QE и PF траекторий p-системы (рис.2.1)

Дуга PQ и отрезок EF оси $0x$ служат, очевидно, дугами без контакта для траекторий p-системы. Так как часть CQ дуги PQ принадлежит множеству N, то и четырехугольник $CQEA$ принадлежит N. Аналогично тому, как это сделано в лемме 1.1, получим, что точка C является разделяющей точкой для траектории $\gamma_q(C)$, и последовательности точек $C_n \to C$ дуги (PC), принадлежащей множеству U, можно поставить в соответствие (используя свойство 1.3 допустимых траекторий) последовательность точек $A_n^* \to A$, лежащих на интервале (AF) и принадлежащих U.

Взяв на полутраектории $\gamma_q^+(A)$, принадлежащей N, произвольную точку D, построим для дуги AD элементарный четырехугольник $EFKL$ с помощью отрезка EF оси $0x$, дуги KL траектории $\gamma_p(D)$ и двух дуг EL и FK траекторий q-системы (рис.2.1). Вместе с отрезком EA множеству N принадлежит четырехугольник $EADL$. Аналогично тому, как это сделано в доказательстве леммы 1.1, последовательности точек $A_n^* \to A$ интервала (AF) принадлежащих множеству U, можно поставить в соответствие (используя свойство 1.5 допустимых траекторий) последовательность точек $D_n^* \to D$, лежащих на части (KD) дуги без контакта KL, и также принадлежащих множеству управляемости U. Но это означает, во-первых, что точка D

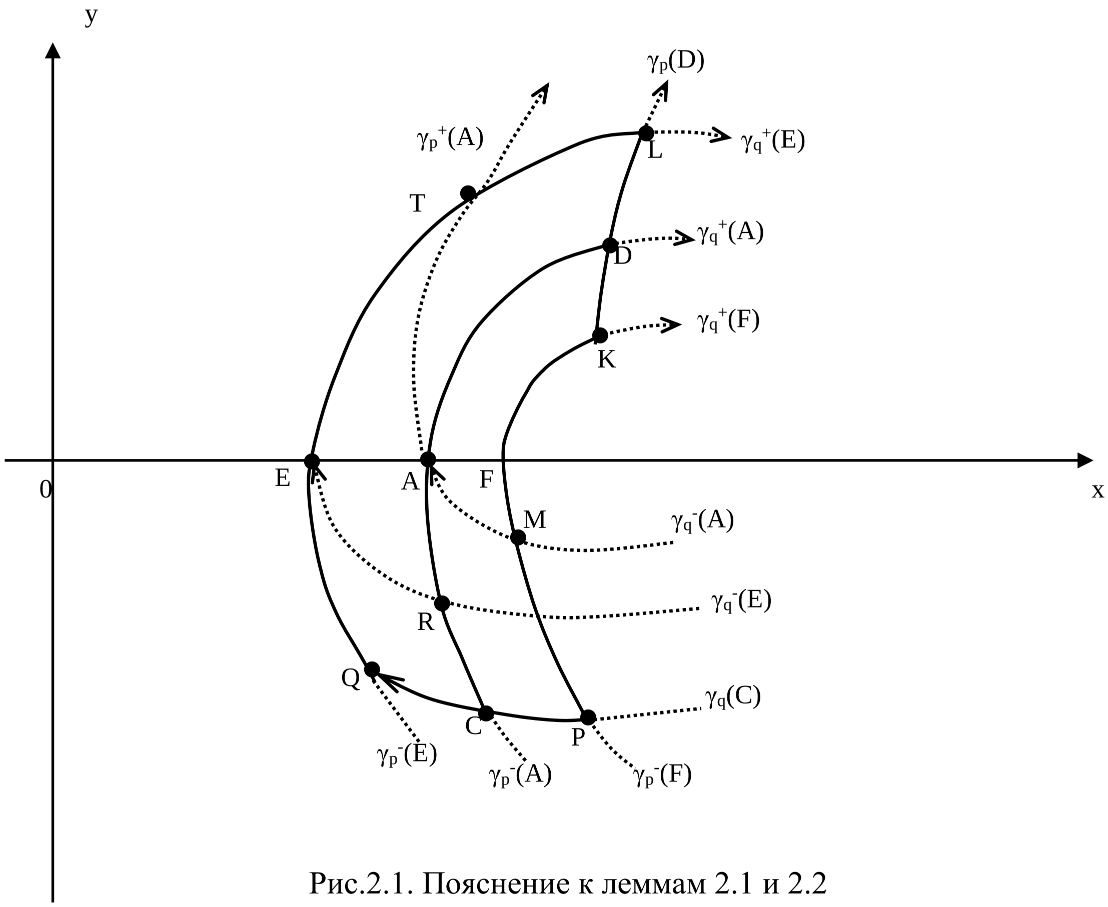

Рис.2.1. Пояснение к леммам 2.1 и 2.2

принадлежит границе Γ, и, во-вторых, что точка D является разделяющей для траектории $\gamma_p(D)$, так что часть $[KD)$ дуги KL принадлежит U. Но вместе с дугой $[KD)$ множеству управляемости будут принадлежать четырехугольник $AFKD$ (исключая дугу AD) и полуинтервал $(AF]$ оси $0x$.

Вместе с полуинтервалом $(AF]$ множеству будет принадлежать четырехугольник $PCAF$ (исключая дугу CA).

Из изложенного выше легко вытекают все утверждения леммы 2.1 в случае точки $A(a,0)$, не являющейся разделяющей для траектории $\gamma_p(A)$. Аналогичным образом доказывается лемма 2.1 и для второго случая, когда точка $A(a,0)$ не является разделяющей для $\gamma_q(A)$.

ЛЕММА 2.2. Если точка $A(a,0)$ расположена на интервале положительного или отрицательного типа и является разделяющей точкой для обеих траекторий $\gamma_p(A)$, $\gamma_q(A)$, то:

а) вместе с точкой A в границу Γ входят положительные полутраектории $\gamma_p^+(A)$ и $\gamma_q^+(A)$;

б) существует отрезок EF оси $0x$, содержащий точку A, такой, что $[EA)\subset U$ и $(AP]\subset U$;

в) существует окрестность точки A, не содержащая других точек границы Γ, кроме указанных в пункте а).

Доказательство леммы 2.2 проведем на основе рассмотрения построенных в лемме 2.1 элементарных четырехугольников $PQEF$ и $EFKL$. Однако, теперь полутраектории $\gamma_p^-(A)$ и $\gamma_q^-(A)$ нужно считать принадлежащими множеству управляемости U. Траектория $\gamma_q^-(A)$ с убыванием t обязательно покидает четырехугольник $PQEF$, пересекая дугу PF в некоторой точке M. Аналогично, траектория $\gamma_q^-(E)$ с убыванием t обязательно покидает четырехугольник $CQEA$, пересекая дугу CA в некоторой точке R (рис.2.1). Используя свойство 1.3 допустимых траекторий, последовательности точек $M_n \to A$ дуги (MA) полутраектории $\gamma_q^-(A)$ можно поставить в соответствие последовательность точек $F_n^* \to A$ интервала (AF), принадлежащих множеству U, а последовательности точек $R_n \to A$ дуги (RA) полутраектории $\gamma_p^-(A)$ можно поставить в соответствие последовательность точек $E_n^* \to A$ интервала (EA), принадлежащих множеству U. Используя свойство 1.5 и учитывая, что дуга AD полутраектории $\gamma_q^+(A)$ принадлежит множеству N, аналогично тому, как это сделано в лемме 1.1, поставим в соответствие последовательности $F_n^* \to A$ интервала (AF) последовательность точек $D_n^* \to D$ дуги (KD), принадлежащих множеству управляемости U. Это означает, во-первых, что точка D принадлежит границе Γ, а, во-вторых, что точка D является разделяющей для траектории $\gamma_p(D)$, так что дуга $[KD)$ дуги KL принадлежит U, а дуга DL принадлежит N. Отсюда сразу следует, что четырехугольник $AFKD$(за исключением дуги AD) принадлежит множеству U, а вместе с полуинтервалом $(AF]$ множеству U принадлежит четырехугольник $PCAF$ (за исключением лишь точки A).

Аналогичным образом, с помощью построения элементарного четырехугольника для некоторой дуги полутраектории $\gamma_p^+(A)$, и используя последовательность точек $E_n^* \to A$ интервала (EA), принадлежащих U, доказывается, что любая точка полутраектории $\gamma_p^+(A)$ принадлежит границе Γ. Полутраектория $\gamma_p^+(A)$ обязательно выходит из четырехугольника $EFKL$, пересекая дугу EL в некоторой точке T (рис.2.1). Согласно лемме 1.1, точка T является разделяющей для траектории $\gamma_q(T)$, так, что ее дуга $[ET)$ принадлежит U, а дуга TL принадлежит N. Вместе с дугой $[ET)$ множеству U будет, очевидно, принадлежать четырехугольник $CQET$, за исключением части AT дуги CT. Вместе с дугой AT множеству N принадлежит четырехугольник $ATLD$. Все утверждения леммы 2.2 доказаны, так как за искомую окрестность точки A можно взять четырехугольник $PQLK$.

ЛЕММА 2.3. Если точка $A(a,0)$ лежит на интервале оси $0x$ смешанного типа, то существует окрестность этой точки, принадлежащая или множеству управляемости, или множеству неуправляемости.

Взяв на непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^-(A)$ некоторую точку C_1, и на непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_p^+(A)$ некоторую точку D_1, построим элементарный четырехугольник $P_1Q_1K_1L_1$, ограниченный дугами P_1Q_1 и K_1L_1 траекторий $\gamma_q(C_1)$ и $\gamma_q(D_1)$, а также дугами Q_1K_1 и P_1L_1 траекторий p-системы. Аналогично строим элементарный четырехугольник $P_2Q_2K_2L_2$ для дуги C_2D_2 траектории $\gamma_q(A)$ (рис.2.2).

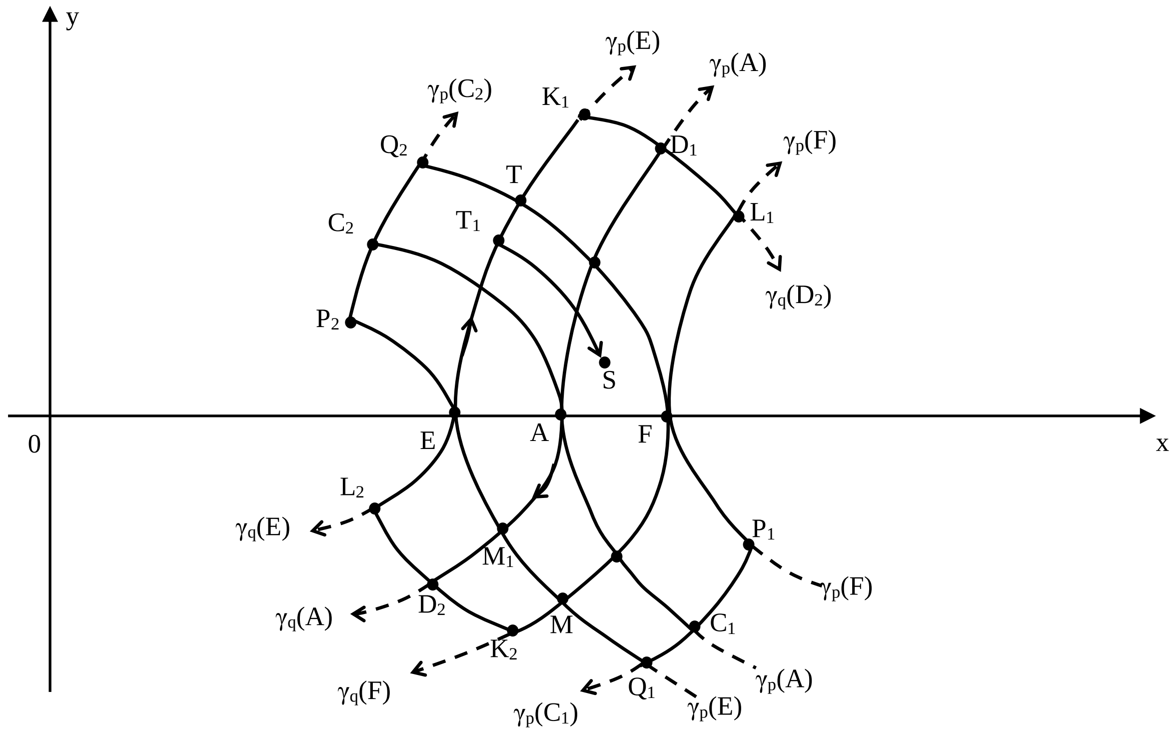

Рис.2.2. Пояснение к лемме 2.3.

Пусть EF - отрезок оси $0x$, содержащий точку A и принадлежащий обоим четырехугольникам $P_1Q_1K_1L_1$ и $P_2Q_2K_2L_2$. Без ограничения общности можно считать, что дуги Q_1K_1 и P_2L_2 проходят через точку E, а дуги P_1L_1 и Q_2K_2 проходят через точку F. Общая часть четырехугольников $P_1Q_1K_1L_1$ и $P_2Q_2K_2L_2$ представляет собой замкнутую область D, ограниченную дугой MET траектории $\gamma_p(E)$ и дугой TFM траектории $\gamma_q(F)$ (ри.2.2).

Через каждую точку указанной области D (в том числе и через точку A) проходит траектория q-системы, которая с убыванием t покидает область D, пересекая часть ET дуги MET, а с возрастанием t покидает область D, пересекая часть ME дуги MET. Этого достаточно, чтобы построить допустимую траекторию, состоящую из двух дуг AM_1 и T_1S траекторий q-системы и одной дуги M_1T_1 траектории $\gamma_p(E)$, выходящую из точки A и оканчивающуюся в любой точке S области D. Так же легко построить допустимую траекторию, выходящую из произвольной точки области D и оканчивающуюся в точке A. Это означает, что если точка A принадлежит множеству U, то область D принадлежит множеству U; если же точка A принадлежит множеству N, то ни одна точка области D не может принадлежать множеству U. Лемма 2.3 доказана.

Следствие. Достаточным условием локальной управляемости системы (1.2) является выполнение неравенства

$$q < f(0,0) < p \qquad (2.2)$$

Этот факт доказан в [3].

3. Структура границы множества управляемости в окрестности простых состояний равновесия p-системы и q-системы

ЛЕММА 3.1. Простое состояние равновесия p-системы (q-системы) типа центр, фокус, центро-фокус не может принадлежать границе множества управляемости.

Действительно, предположим, что точка $A(a,0)$ является состоянием равновесия p-системы одного из указанных в лемме типов и принадлежит границе Γ множества управляемости. Возьмем на полутраектории $\gamma_q^+(A)$, принадлежащей множеству N, точку B, достаточно близкую к точке A. Тогда полутраектория $\gamma_p^+(B)$, также принадлежащая множеству N, после одного «витка» вновь пересечет полутраекторию $\gamma_q^+(A)$ в некоторой точке C (рис.3.1). Замкнутая область D, ограниченная «витком» полутраектории $\gamma_p^+(B)$ и дугой BC полутраектории $\gamma_q^+(A)$, содержит внутри себя точку A и принадлежит множеству неуправляемости N, поскольку ее границы принадлежат N. Это противоречит тому, что точка A принадлежит границе множества управляемости.

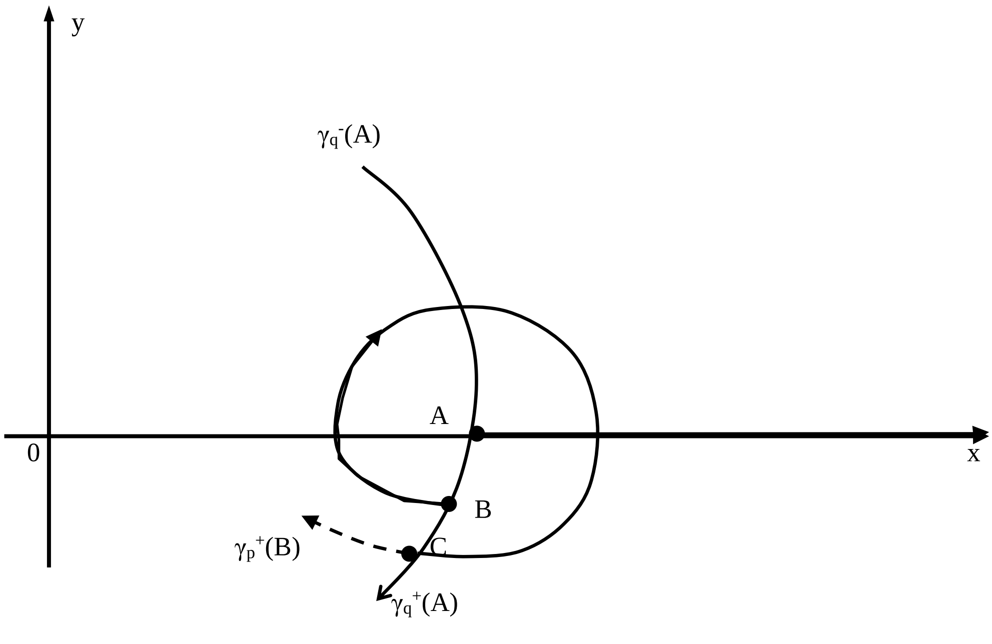

Рис.3.1. Пояснение к лемме 3.1.

Пусть точка $A(a,0)$, $a \neq 0$, является простым [1] состоянием равновесия p-системы типа седло. Обозначим через S_1^+ и S_2^+ α-сепаратрисы, входящие при $t \to -\infty$ в седло A под углом φ_1 к оси $0x$ соответственно из G^+и G^-. Обозначим через S_1^- и S_2^- ω-сепаратрисы, входящие при $t \to +\infty$ в седло A

под углом φ_2 к оси $0x$ соответственно из G^+ и G^-. Известно [1], что тангенсы K_1 и K_2 углов φ_1 и φ_2 задаются формулой:

$$K_{1,2} = \frac{-f'_y(a,0) \pm \sqrt{[f'_y(a,0)]^2 - 4f'_x(a,0)}}{2} \qquad (3.1)$$

причем, для седловой точки $A(a,0)$ имеет место неравенство $f'_x(a,0) < 0$, так что $K_2 < 0 < K_1$. Так как точка A не является состоянием равновесия q-системы, для дуги CD траектории $\gamma_q(A)$ ($C \in \gamma_q^-(A)$, $D \in \gamma_q^+(A)$), можно построить элементарный четырехугольник $PQLK$, содержащий внутри себя точку $A(a,0)$ и не содержащий начало координат. Границами этого четырехугольника являются дуги без контакта PQ и LK траекторий $\gamma_p(C)$ и $\gamma_p(D)$, а также дуги PK и QL q-траекторий. Открытый четырехугольник $PQLK$ траекторией $\gamma_q(A)$ и сепаратрисами $S_1^-, S_1^+, S_2^-, S_2^+$ разбивается на 6 открытых областей: *MPCA*, *CQRA*, *RSA*, *SLDA*, *DKTA* и *TMA*. (Рис.3.2).

Область RSA содержит интервал (AF) оси $0x$, являющийся частью интервала отрицательного типа (поскольку $f'_x(a,0) < 0$).

ЛЕММА 3.2. Если простая седловая точка $A(a,0)$ p-системы принадлежит границе Γ множества управляемости и не является разделяющей точкой для $\gamma_q(A)$, то:

а) в границу Γ входит непродолжаемая в G^- сепаратриса S_2^+;

б) в границу Γ входит непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_q^-(A)$ целиком, либо ее дуга BA, где точка B является разделяющей для $\gamma_q(A)$;

в) существует отрезок EF оси $0x$, содержащий точку A, такой, что $[EA) \subset U$ и $AF \subset N$;

г) существует окрестность точки A, не содержащая других точек границы Γ, кроме указанных выше.

Поскольку точка A не является разделяющей для $\gamma_q(A)$, ее дугу CD, для которой построен элементарный четырехугольник $PQLK$, можно считать принадлежащей множеству N. Вместе с точкой C множеству N принадлежит дуга CQ и часть $CQLD$ четырехугольника $PQLK$. В частности, отрезок AF оси $0x$ принадлежит N.

Часть $DKTA$ правильной седловой области [1] $SLKTA$ также принадлежит множеству N, поскольку траектория p-системы, проходящая через любую точку открытой области $DKTA$, при убывании t обязательно пересечет дугу без контакта SL, принадлежащую N. Из замкнутости множества N следует, что замыкание открытой части $DKTA$ также принадлежит N. В частности, дуга AT сепаратрисы S_2^+(а с ней и вся сепаратриса S_2^+) принадлежит N.

Точка C должна быть разделяющей для траектории $\gamma_p(C)$, ибо в противном случае дугу PQ можно считать принадлежащей множеству N, а это означает, что весь четырехугольник $PQLK$ принадлежит N. Последнее несовместимо с тем, что седловая точка A принадлежит границе Γ множества управляемости. Итак, дуга $[PC)$ траектории $\gamma_p(C)$ принадлежит U.

Аналогично тому, как это сделано в доказательстве леммы 1.1, последовательности точек $C_n \to C$ дуги (PC) можно поставить в соответствие последовательность $A_n \to A$ точек интервала (EA) оси $0x$, принадлежащих множеству U. Траектория $\gamma_p(A_n)$ с возрастанием t покидает область *TMA*, пересекая часть (ET) дуги MT в некоторой точке T_n. Траектория $\gamma_q(A_n)$ с возрастанием t покидает область *TMA*, пересекая дугу (AT) сепаратрисы S_2^+ в некоторой точке B_n. (Рис.3.2).

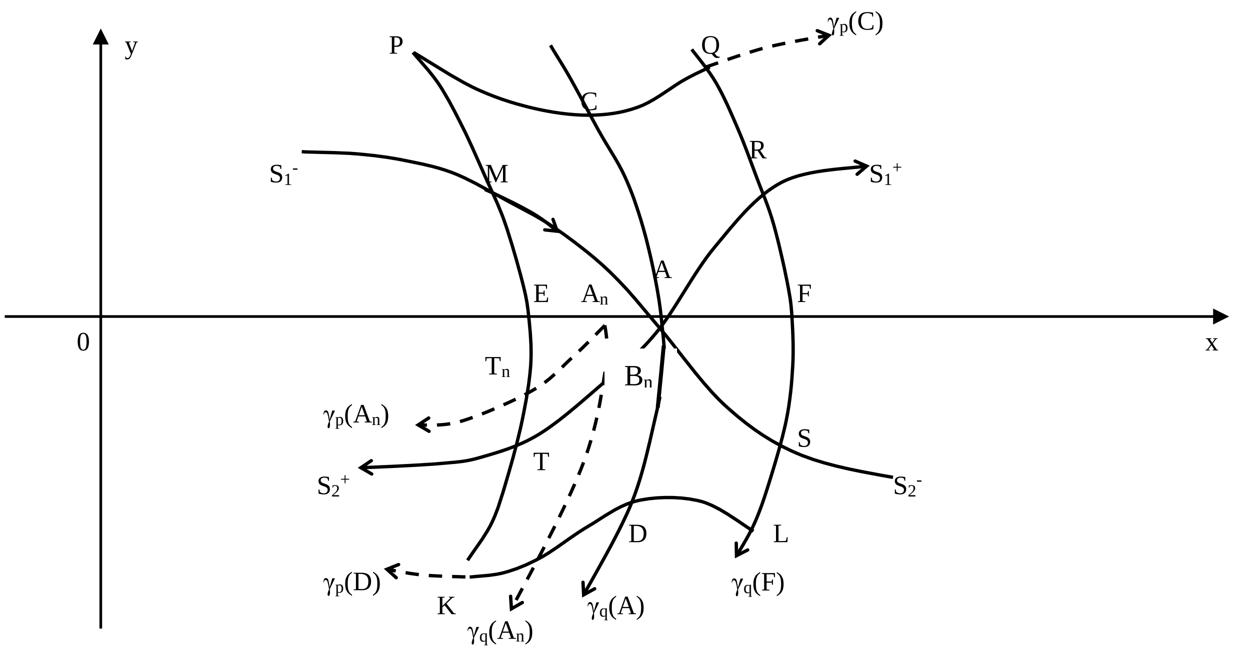

Рис. 3.2. Пояснение к леммам 3.2 и 3.3.

ак как точка $A_n \in U$, существует допустимая траектория $\gamma(A_n)$, выходящая из точки A_n и ведущая в начало координат. Но, согласно свойству (1.5), допустимая траектория $\gamma(A_n)$ может покинуть четырехугольник $A_n B_n T T_n$, лишь пересекая или дугу $B_n T$ сепаратрисы S_2^+, что невозможно, поскольку точки сепаратрисы S_2^+ принадлежат N, или дугу $[T_n T)$ q-траектории $\gamma_n(E)$ в некоторой точке T_n^*, принадлежащей U. Из сходимости $A_n \to A$ следует сходимость $T_n \to T$, а из этого следует сходимость $T_n^* \to T$. Итак, точка T сепаратрисы S_2^+ принадлежит границе Γ и является разделяющей для траектории $\gamma_q(E)$; так что ее дуга $[PT)$ принадлежит множеству U. Согласно лемме 1.1, вместе с точкой T в границу Γ входит вся непродолжаемая в G^- сепаратриса S_2^+. Так как траектория p-системы, проходящая через любую точку области MTA, при возрастании t обязательно покидает область MTA, пересекая часть (ET) дуги MT, область MTA принадлежит множеству U. Вместе с интервалом (EA) множеству U принадлежит открытый четырехугольник $PCAE$. Все утверждения леммы 3.2 можно считать доказанными, поскольку замкнутая окрестность $PQLK$ точки A оказывается разделенной на часть $CQLKTA$, принадлежащую N, и часть $PCAT$ (за исключением дуг CA и AT), принадлежащую U.

ЛЕММА 3.3. Если простая седловая точка $A(a,0)$ p-системы является разделяющей для траектории $\gamma_q(A)$, то возможны следующие шесть вариантов строения границы Γ множества управляемости U в окрестности $PQLK$ (рис.3.2) точки A:

а) замкнутая область $RLKMA$ принадлежит N, а правильная седловая область $MPQRA$ (за исключением дуг MA и AR, которые принадлежат N) принадлежит U;

б) замкнутая область $RLKTA$ принадлежит N, а область $TPQRA$ (за исключением дуг AT и AR, которые принадлежат Γ) принадлежит U;

в) замкнутая область $SLKMA$ принадлежит N, а область $MPQSA$ принадлежит U, за исключением дуг MA и SA, которые принадлежат границе Γ;

г) правильная седловая область $SLKTA$ принадлежит N, а область $TPQSA$ (за исключением дуг AT и SA, которые входят в границу Γ) принадлежит U;

д) замкнутая область $DKMA$ принадлежит N, а область $MPQLDA$ (за исключением дуг MA и AD, входящих в Γ) принадлежит U;

е) замкнутая область $DKTA$ принадлежит N, а область $TPQLDA$ (за исключением дуг AT и AD, которые входят в состав Γ) принадлежит U.

Итак, мы имеем дугу $[CA)$ полутраектории $\gamma_q^-(A)$, принадлежащую U, и дугу AD полутраектории $\gamma_q^+(A)$, принадлежащую N. Как и в лемме 3.2 область $DKTA$ обязательно принадлежит множеству N, так что дуга AT α-сепаратрисы S_2^+ принадлежит N. Относительно каждой из оставшихся трех дуг MA, AR и AS сепаратрис S_1^-, S_1^+ и S_2^-, в силу свойства 1.1 без ограничения общности рассуждений можно утверждать, что либо эта дуга принадлежит U, либо эта дуга принадлежит N.

Пусть все три дуги MA, AR и AS принадлежат множеству N. Докажем, что в этом случае осуществляется вариант а) разбиения элементарного четырехугольника $PQLK$ на два множества, одно из которых принадлежит N, а другое принадлежит U. Действительно, вместе с дугой AR множеству N принадлежит четырехугольник $ARLD$(в силу свойства 1.1), а вместе с дугой MA множеству N принадлежит четырехугольник $MADK$. Аналогично тому, как это сделано в лемме 1.1, последовательности $A_n \to A$ точек дуги (CA) можно поставить в соответствие (с помощью допустимых траекторий $\gamma(A_n)$, выходящих из точек A_n и ведущих в начало координат) последовательность точек $R_n \to R$ дуги (QR), принадлежащих множеству управляемости U. А это означает, что точка R является разделяющей для траектории $\gamma_q(R)$. Отсюда следует что дуга $[QR)$, а вместе с ней и правильная седловая область $MPQRA$ (за исключением дуг MA и AR) принадлежат множеству U. Таким образом, дуги MA и AR разбивают четырехугольник $PQLK$ на две области $RLKMA$ и $MPQRA$, принадлежащие соответственно N и U, и в границу Γ входят непродолжаемая в G^+ α-сепаратриса S_1^+ и непродолжаемая в G^+ ω-сепаратриса S_1^-(целиком либо её дуга BA, где точка B является разделяющей для S_1^-).

Аналогичным образом перебирая все варианты принадлежности каждой из дуг $[MA), (AR]$ и $[AS)$ множеству N или U, устанавливаем справедливость леммы 3.3. Отметим, что число всех возможных вариантов сократилось с 8 до 6 вследствие того, что принадлежность дуги $(AR]$ множеству N влечет за собой принадлежность дуги $[AS)$ множеству N, а принадлежность дуги $[AS)$ множеству U влечет за собой принадлежность дуги $(AR]$ множеству U.

Замечание 3.1. При соответствующих обозначениях (рис.3.3) будут справедливы леммы, аналогичные леммам 3.2, 3.3 и для седловой точки $A(a,0)$ q-системы. Нужно только в формулировках и доказательствах лемм заменить траекторию $\gamma_q(A)$ траекторией $\gamma_p(A)$, непродолжаемую в G^+ полутраекторию

$\gamma_q^-(A)$ непродолжаемой в G^- полутраекторией $\gamma_p^-(A)$, а непродолжаемую в G^- полутраекторию $\gamma_q^+(A)$ непродолжаемой в G^+ полутраекторией $\gamma_p^+(A)$.

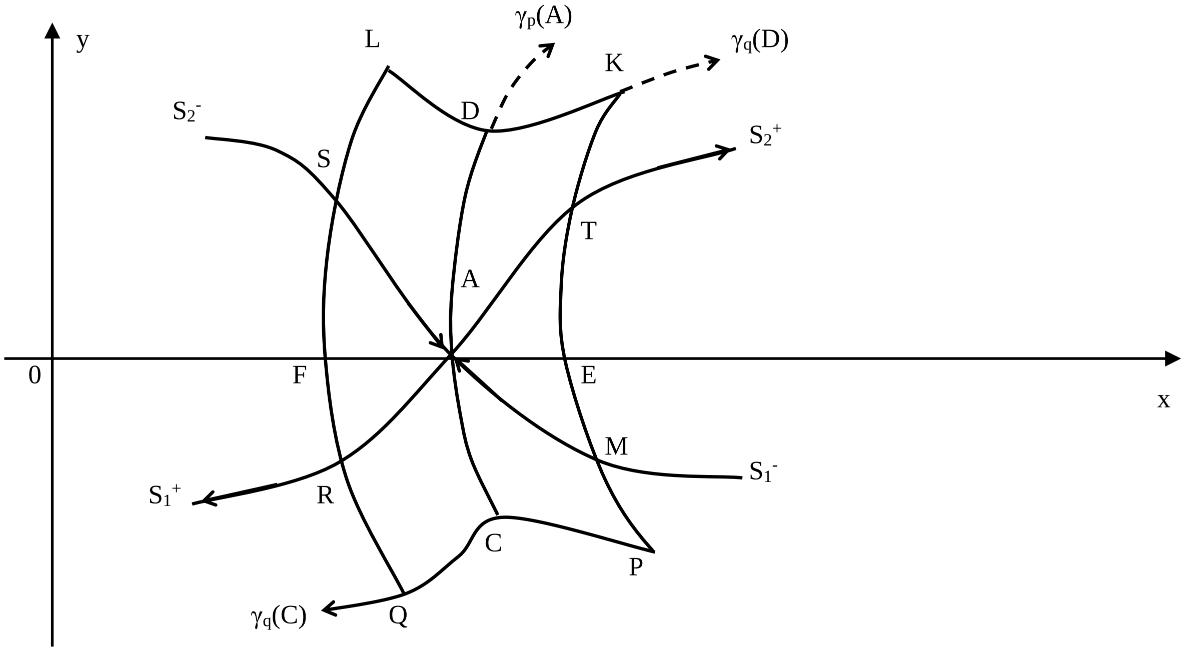

Рис.3.3. Поведение траекторий p -системы и q -системы в окрестности седла q -системы.

Пусть точка $A(a,0)$ является простым состоянием равновесия p-системы (q-системы) типа устойчивый узел. Тогда в некоторой её окрестности все траектории p-системы (q-системы) входят при $t \to +\infty$ в узел $A(a,0)$ под отрицательным углом φ_1 к оси $0x$, за исключением двух траекторий S_1^- и S_2^-, которые при $t \to +\infty$ входят в узел $A(a,0)$ под углом φ_2 соответственно из G^+ и G^-. Отрицательные значения тангенсов $K_1 > K_2$ углов φ_1 и φ_2 задаются формулой (3.1) с учетом того, что:

$$f'_x(a,0) > 0,\ \ f'_y(a,0) \geq 2\sqrt{f'_x(a,0)}\ .$$

ЛЕММА 3.4. Если простой устойчивый узел $A(a,0)$ p-системы (q-системы) принадлежит границе Γ множества управляемости, то:

а) в границу Γ входит непродолжаемая в $G^-(G^+)$ полутраектория $\gamma_q^+(A)$ $(\gamma_p^+(A))$;

б) в границу Γ входит непродолжаемая в $G^+(G^-)$ траектория S_1^- (S_2^-) целиком, либо ее дуга BA, где точка B является для нее разделяющей;

в) существует отрезок EF оси $0x$, содержащий внутри себя точку A, такой, что $EA \subset N$, $(AF] \subset U$ $([EA) \subset U,\ AF \subset N)$;

г) существует окрестность точки A такая, что в ней не содержится других точек границы Γ, кроме указанных выше.

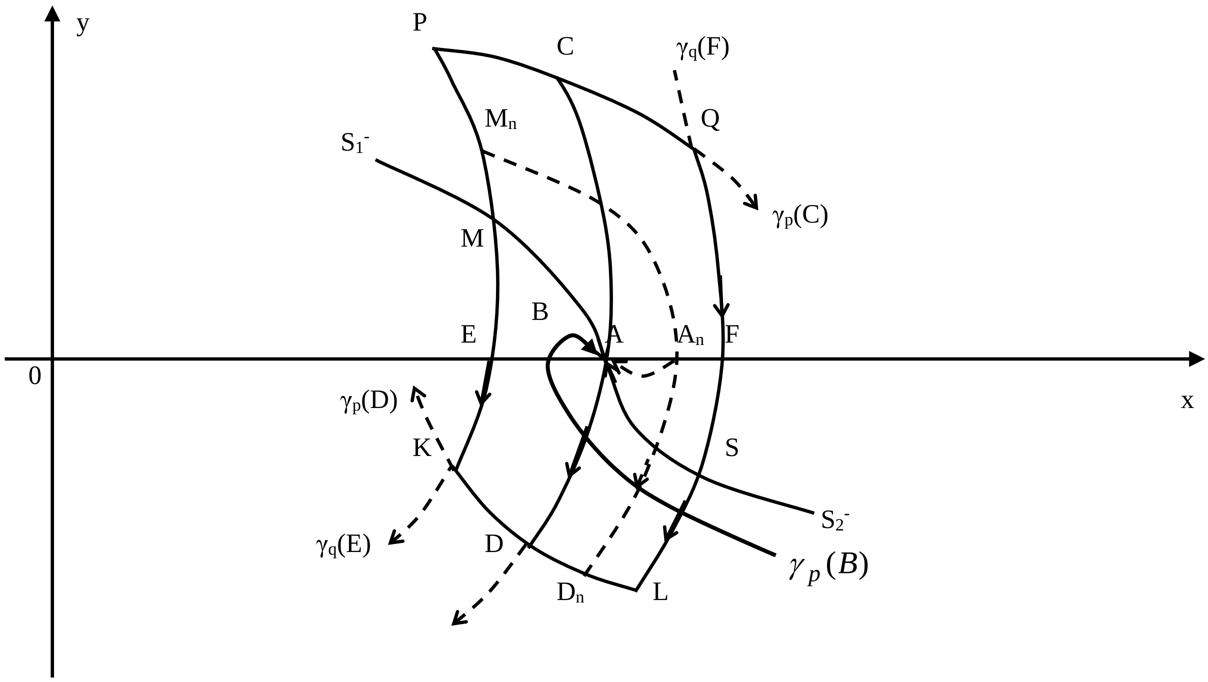

Рис.3.4. Поведение траекторий p –системы и q –системы в окретности неустойчивого узла p –системы.

Проведем доказательство леммы для случая устойчивого узла p-системы. Взяв на полутраектории $\gamma_q^-(A)$ точку C, а на полутраектории $\gamma_q^+(A)$ точку D, построим для дуги CD элементарный четырехугольник $PQLK$ с помощью дуг без контакта PQ и LK траекторий $\gamma_p(C)$ и $\gamma_p(D)$ и дуг QL и PK траекторий q-системы (рис.3.4).Этот четырехугольник содержит отрезок EF оси $0x$. Исключительные траектории S_1^- и S_2^-, входящие при $t \to +\infty$ в узел $A(a,0)$ под углом α_2, пересекают, соответственно, дугу (PE) в точке M и дугу (FL) в точке S. Часть AD дуги CD принадлежит N. Так как траектория p-системы, проходящая через произвольную точку B полуинтервала $[EA)$, при убывании t покидает четырехугольник $EADK$, пересекая дугу AD, полуинтервал $[EA)$ принадлежит множеству N. В силу свойства 1.2, любая допустимая траектория, выходящая из точки M, может покинуть область EMA лишь пересекая отрезок EA, который принадлежит N. Значит, точка M и четырехугольник $MADK$ будут принадлежать множеству N.

Точка M должна быть разделяющей для траектории $\gamma_q(M)$, ибо в противном случае без ограничения общности рассуждений можно считать, что точка P, а с ней дуга PQ и четырехугольник $PQLK$ принадлежат N, что противоречит предположению о принадлежности точки A к границе Γ области управляемости. Итак, часть $[PM)$ дуги PK принадлежит U.

Возьмем последовательность точек $A_n \to A$ интервала (AF). Траектории p-системы, проходящие через точки A_n, при убывании t покинут область $PQFAM$, пересекая дугу (PM) в точках $M_n \to M$. Траектории q-системы, проходящие через точки A_n, при возрастании t покинут область $AFLD$, пересекая дугу без контакта LD в точках $D_n \to D$. Допустимая траектория $\gamma(M_n)$, выходящая из точки M_n и ведущая в начало координат, может выйти из области $M_n A_n D_n DAM$, лишь пересекая либо дуги MA и AD, что невозможно, поскольку эти дуги принадлежат N, либо дугу $[D_n D)$ в некоторой точке D_n^*. Из сходимости $D_n \to D$ следует сходимость $D_n^* \to D$. Учитывая, что точки $D_n^* \in U$, а точка $D \in N$, получаем, что точка D является точкой границы Γ и дуга $[LD)$ траектории $\gamma_p(D)$ принадлежит U. Вместе с дугой $[LD)$ множеству U принадлежит четырехугольник $CQLD$ (исключая дугу AD). Траектория p-системы, проходящая через любую точку области $MPCA$ (исключая дугу MA), с возрастанием t обязательно пересекает дугу $[CA)$ и входит в область $CQLD$, поэтому область $MPCA$ (за исключением дуги MA) также принадлежит множеству U. Тем самым доказаны все утверждения леммы 3.4.

Пусть точка $A(a,0)$ является простым состоянием равновесия p-системы типа неустойчивый узел. Тогда в некоторой её части окрестности все траектории p-системы входят при $t \to -\infty$ в узел $A(a,0)$ под углом φ_2 к оси $0x$, за исключением двух траекторий S_1^+ и S_2^+, которые при $t \to -\infty$ входят в узел $A(a,0)$ под углом φ_1 соответственно из G^+ и G^-. Тангенсы K_1 и K_2 углов φ_1 и φ_2 задаются формулой (3.1) с учетом того, что:

$$f_x'(a,0) > 0, \; f_y'(a,0) \le -2\sqrt{f_x'(a,0)}.$$

Для дуги CD траектории q-системы $\gamma_q(A)$ $(C \in \gamma_q^-(A)), D \in \gamma_q^+(A))$ построим элементарный четырехугольник $PQLK$ с помощью дуг без контакта PQ и LK траекторий $\gamma_p(C)$ и $\gamma_p(D)$ и дуг PK и QL траекторий q-системы. Исключительные траектории S_1^+ и S_2^+ пересекают дуги QL и PK соответственно в точках R и T (рис.3.5). Четырехугольник $PQLK$ содержит отрезок EF на оси $0x$, при этом полуинтервал $[EA)$ является частью интервала смешанного типа, а AF - частью интервала отрицательного типа.

ЛЕММА 3.5. Если простой неустойчивый узел $A(a,0)$ p-системы принадлежит границе Γ множества управляемости U, то возможны лишь следующие три варианта строения границы Γ в окрестности $PQLK$ точки A:

а) замкнутая область $CQLKT^*A$ принадлежит N, а область T^*PCA (за исключением дуг CA и AT^*, которые принадлежат Γ) принадлежит U;

б) замкнутая область R^*LKT^*A принадлежит N, а область T^*PQR^*A (за исключением дуг AT^* и AR^*, которые входят в Γ), принадлежит множеству U;

в) замкнутая область DKT^*A принадлежит N, а область T^*PQLDA (за исключением дуг AT^* и AD, которые входят в Γ) принадлежит U.

В пунктах а), б), в) точка T^* означает некоторую точку части $(ET]$ дуги PK, а дуга AT^*- дугу соответствующей траектории p-системы, входящей при $t \to -\infty$ в узел $A(a,0)$.

Аналогично, $R^* \in [RF)$ и AR^*-дуга соответствующей траектории p-системы (рис.3.5).

Доказательство леммы 3.5 проведем отдельно для случая, когда точка A не является разделяющей для траектории $\gamma_q(A)$ (реализуется вариант а)) и для случая, когда точка A является разделяющей для траектории $\gamma_q(A)$ (реализуется либо вариант б), либо вариант в) леммы).

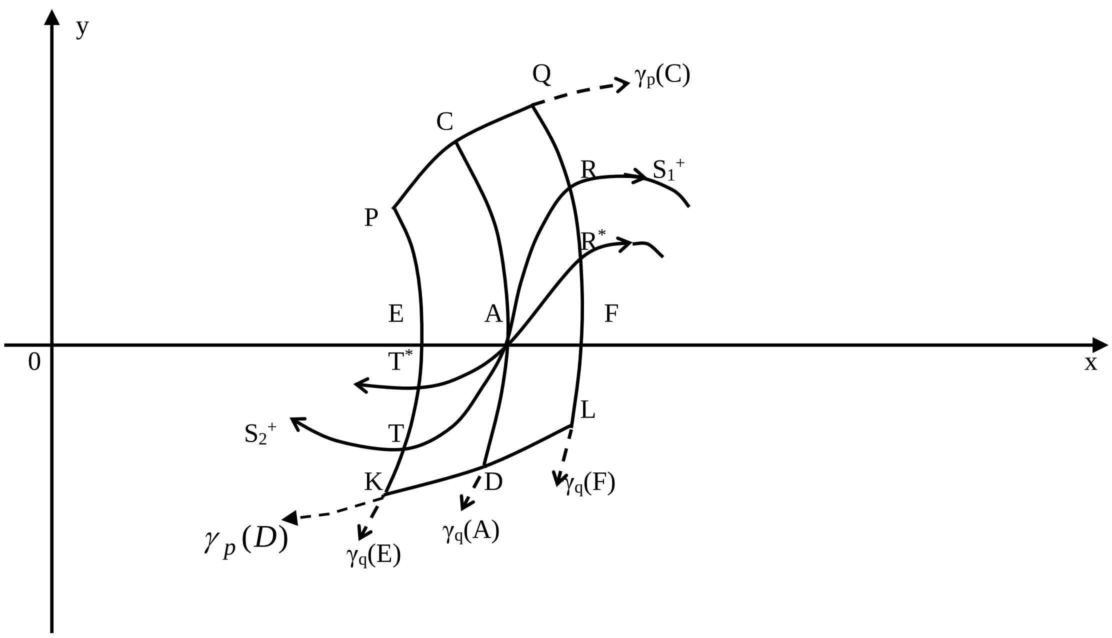

Рис.3.5. Поведение траекторий p-системы и q-системы в окрестности неустойчивого узла p-системы.

Если точка A не является разделяющей для $\gamma_q(A)$, то точку C можно считать принадлежащей множеству N. Но тогда множеству N принадлежит и дуга CQ и четырехугольник $COLD$. Аналогично, вместе с дугой AD множеству N принадлежит и четырехугольник $ADKT$ Точка C должна быть разделяющей для траектории $\gamma_p(C)$, иначе можно считать, что точка P, а вместе с ней и дуга PQ и весь четырехугольник $PQLK$ принадлежат множеству N, что противоречит принадлежности точки A границе Γ.

Возьмем на дуге PC, принадлежащей множеству U, последовательность точек $C_n \to C$. Допустимые траектории системы (1.2), ведущие в начало координат, могут выйти из четырехугольника $PCAE$, только пересекая или дугу CA, что невозможно, поскольку она принадлежит множеству N, или полуинтервал $[EA)$ оси $0x$ в точках $A_n \to A$. В силу леммы 2.3 можно считать, что полуинтервал $[EA)$, а вместе с ним и четырехугольник $PCAE$ принадлежат множеству U.

Поскольку вместе с точкой E множеству U принадлежит дуга PE траектории $\gamma_q(P)$, а вместе с точкой T множеству N принадлежит дуга TK траектории $\gamma_q(P)$, то на дуге ET этой траектории найдется разделяющая точка T^*, так что дуга ET^* принадлежит множеству U. Траектория $\gamma_p(T^*)$, идущая при $t \to -\infty$ в узел $A(a,0)$, будет входить в границу Γ. Действительно, четырехугольник AT^*KD принадлежит множеству N, поскольку любая допустимая траектория может покинуть этот четырехугольник, лишь пересекая дуги KD и KT^*, принадлежащие множеству N. С другой стороны, из каждой точки открытой области ET^*A выходит траектория p-системы, которая при возрастании времени пересекает либо дугу $[ET^*)$, либо интервал (EA), которые принадлежат множеству U, так что область ET^*A (исключая дугу AT^*) принадлежит множеству U. В итоге, в границу Γ вошли дуга CA траектории $\gamma_q(A))$ и дуга AT^* траектории $\gamma_p(T^*)$, разделившие четырехугольник $PQLK$ указанным в пункте а) образом.

Если точка A является разделяющей для $\gamma_q(A)$, то ее дуга CA принадлежит множеству U, и все траектории p-системы, проходящие через точки этой дуги, при убывании времени покидают четырехугольник $CAEP$, пересекая либо дугу PE траектории $\gamma_q(P)$, либо полуинтервал $[EA)$ оси $0x$, сплошь заполняя четырехугольник $CAEP$, что означает, что он принадлежит множеству U. С другой стороны, дуга AD, а вместе с ней и замкнутая область $ADKT$ принадлежит множеству N. Отсюда следует, что траектория $\gamma_q(P)$ имеет разделяющую точку T^* на дуге $(ET]$ и траектория $\gamma_p(T^*)$, идущая при $t \to -\infty$ в узел $A(a,0)$, входит в состав Γ. Действительно, как мы видели выше, в этом случае четырехугольник $ADKT^*$ принадлежит множеству N, а открытая область ET^*A принадлежит множеству U.

Относительно четырехугольника $CQLD$ можно сказать следующее: если точка D является разделяющей для траектории $\gamma_p(D)$, то дуга LD, а с ней и весь четырехугольник $CQLD$ принадлежит U, то есть реализуется вариант в) леммы. В противном случае дугу LD можно считать принадлежащей множеству N. Поскольку точка C принадлежит U вместе с некоторой окрестностью, точку Q можно считать принадлежащей множеству U. Это означает, что траектория $\gamma_q(Q)$ на дуге QL имеет разделяющую точку R^*. Эта точка не может принадлежать дуге FL, поскольку через дугу FL и отрезок AF оси $0x$ допустимые траектории могут лишь входить в четырехугольник $AFLD$, а выйти из него они могут лишь через дуги AD и LD, принадлежащие множеству N. Следовательно, четырехугольник $AFLD$ (вместе с дугой FL) принадлежит множеству N.

С другой стороны, так как дуга $[CA)$ принадлежит U, допустимые траектории, исходящие из точек A_n этой дуги, $A_n \to A$, и ведущие в начало координат, обязательно пересекают дугу QF в некоторых точках R_n, $R_n \to R^*$ Это означает, что разделяющая точка R^* траектории $\gamma_q(Q)$ принадлежит ее дуге $[RF)$, так что четырехугольник AR^*LD, где AR^* - дуга траектории $\gamma_p(R^*)$**,** идущей при $t \to -\infty$ в узел $A(a,0)$, будет принадлежать множеству N, а четырехугольник CAR^*Q будет принадлежать множеству U. Тем самым реализуется вариант б) леммы.

Замечание 3.2. При соответствующих обозначениях (как это сделано для седловой точки q-системы) будет справедлива лемма, аналогичная лемме 3.5 для неустойчивого узла q-системы. Нужно только в формулировке леммы заменить траектории (полутраектории) p-системы на траектории (полутраектории) q-системы и наоборот.

<u>Определение 3.1</u>. Точку $A(a,0)$, принадлежащую границе Γ множества управляемости U системы (1.2), будем называть левосторонней (правосторонней) граничной точкой, если существует такой отрезок EF оси $0x$, содержащий внутри себя точку A, что $[EA) \subset U, [AF] \subset N$ $(EA \subset N, (AF] \subset U)$.

<u>Определение 3.2</u>. Точку $A(a,0)$, принадлежащую границе Γ множества управляемости U системы (1.2), будем называть двусторонней (несущественной) граничной точкой, если существует такой отрезок EF оси $0x$, содержащий внутри себя точку A, что $[EA) \subset U, [AF] \subset U$ $(EA \subset N, AF \subset N)$.

Так как простые состояния равновесия являются изолированными состояниями равновесия, и все их возможные типы [1] перечислены в леммах 3.1 – 3.5 и замечаниях 3.1, 3.2, то справедливо:

Следствие 3.1. Если p-система (1.5) и q-система (1.6) имеют лишь простые состояния равновесия, то пересечение границы Γ множества управляемости системы (1.2) с осью $0x$ является множеством изолированных точек, каждая из которых принадлежит к одному из четырех типов, указанных в определениях 3.1 и 3.2.

Будем под $\gamma_p^+(A)$ $(\gamma_q^+(A))$ понимать не только положительную полутраекторию p-системы (q-системы), выходящую из точки A, но и α-сепаратрису седловой точки $A(a,0)$ p-системы, а также некоторую траекторию p-системы (q-системы), входящую при $t \to -\infty$ в узел $A(a,0)$. Аналогично, символ $\gamma_p^-(A)\,(\gamma_q^-(A))$ будет обозначать не только отрицательную полутраекторию p-системы (q-системы), входящую в точку A, но и ω-сепаратрису седловой точки $A(a,0)$ p-системы (q-системы), а также исключительную траекторию p-системы (q-системы), входящую при $t \to +\infty$ в узел $A(a,0)$ под углом φ_2. С учетом такой договоренности систематизируем результаты, полученные в леммах 1.1 – 1.2, 2.1 – 2.2, 3.2 – 3.5 и замечаниях 3.1 – 3.2, в виде следствий 3.2 – 3.5:

Следствие 3.2. Вместе с левосторонней граничной точкой $A(a,0)$ границе Γ множества управляемости системы (1.2) в полуплоскости $G^+(G^-)$ принадлежит либо непродолжаемая в ней полутраектория $\gamma_p^+(A)$, либо непродолжаемая в ней полутраектория $\gamma_q^-(A)$ целиком или частично (т.е. её дуга BA от разделяющей точки B до точки A); (рис.3.6):

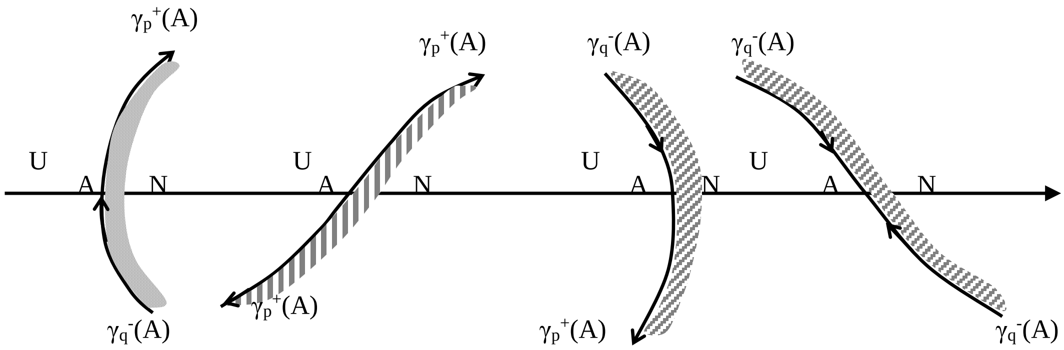

Рис.3.6. Варианты структуры границы области управляемости в окрестности левосторонней граничной точки.

Следствие 3.3. Вместе с правосторонней граничной точкой $A(a,0)$ границе Γ множества управляемости системы (1.2) в полуплоскости $G^+(G^-)$ принадлежит либо непродолжаемая в ней полутраектория $\gamma_q^+(A)$, либо непродолжаемая в ней полутраектория $\gamma_p^-(A)$ целиком или частично (рис.3.7).

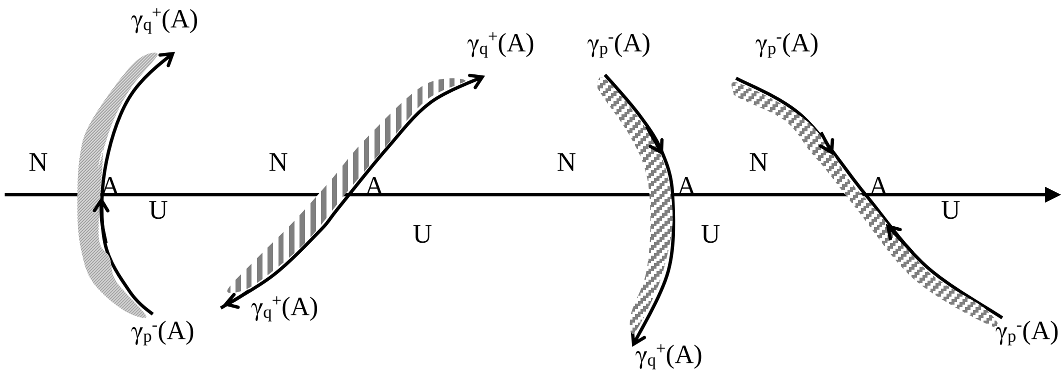

Рис.3.7. Варианты структуры границы области управляемости в окрестности правосторонней граничной точки.

Следствие 3.4. а) Если двусторонняя граничная точка $A(a,0)$ удовлетворяет условию $q - f(a,0) > 0$ $(p - f(a,o) < 0)$, то границе множества управляемости системы (1.2) в полуплоскости $G^+(G^-)$ принадлежат обе непродолжаемые в ней полутраектории $\gamma_p^+(A)$ и $\gamma_q^+(A)$;

б) Если двусторонняя граничная точка $A(a,0)$ является седловой точкой q-системы (p-системы), то наряду с указанным выше вариантом структуры границы Γ возможен другой вариант: в границу Γ в полуплоскости $G^+(G^-)$ входят непродолжаемая в ней α-сепаратриса $\gamma_q^+(A)\,(\gamma_p^+(A))$ целиком и ω-сепаратриса $\gamma_q^-(A)\,(\gamma_{\mathrm{p}}^-(A))$ целиком или частично;

в) В обоих случаях а) и б) существует такая окрестность $O_\delta(A)$ точки A, что $O_\delta(A) \cap G^- \subset U$ $(O_\delta(A) \cap G^+ \subset U)$ (рис.3.8)

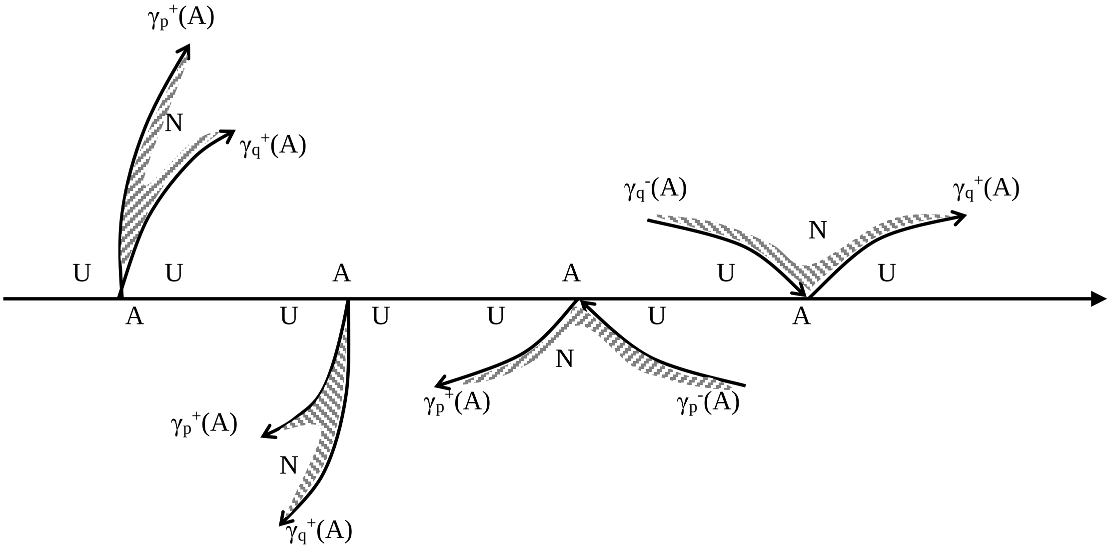

Рис.3.8. Варианты структуры границы области управляемости в окрестности двусторонней граничной точки.

Следствие 3.5. Несущественной граничной точкой может быть лишь седловая точка $A(a,0)$ p- системы (q-системы). Вместе с ней границе Γ множества управляемости системы (1.2) в полуплоскости $G^{+}(G^{-})$ принадлежат непродолжаемые в ней α-сепаратриса $\gamma_p^{+}(A)$ ($\gamma_q^{+}(A)$) целиком и ω-сепаратриса $\gamma_p^{-}(A)$ ($\gamma_q^{-}(A)$) целиком или частично. Существует такая окрестность $O_\delta(A)$ точки A, что $O_\delta(A)\bigcap G^{-}\subset N$ $(O_\delta(A)\bigcap G^{+}\subset N)$ (рис. 3.9).

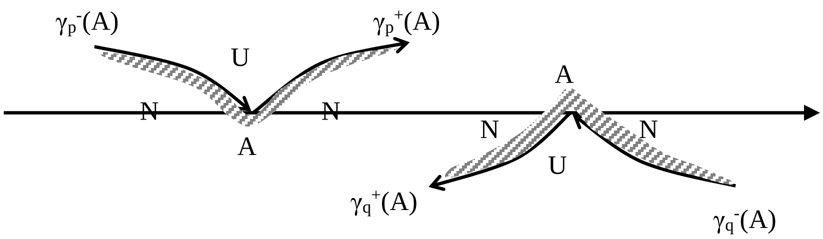

Рис. 3.9. Варианты структуры границы области управляемости в окрестности Несуществующей граничной точки.

4. О наличии седловых точек в составе границы множества управляемости

При сделанных предположениях относительно локальной управляемости системы (1.2) множество управляемости U является открытой связной областью. Однако, множество неуправляемости N представляет собой, как правило, совокупность связных множеств, которые мы будем называть ***связными компонентами*** множества неуправляемости. Очевидно, множество управляемости можно найти путем построения всех связных компонент множества неуправляемости. Возникает вопрос, с чего начать построение связных компонент множества неуправляемости? В данном разделе мы покажем, что при достаточно общих предположениях относительно системы (1.2) практически любая связная компонента множества N, за исключением нескольких типов (их мы укажем), содержит в составе своей границы седловую точку одной из систем (1.5) , (1.6) вместе с ее ω-сепаратрисами.

В данном разделе мы будем предполагать, что системы (1.5) и (1.6) имеют лишь простые состояния равновесия, а их траектории не могут иметь вертикальных асимптот.

Определение 4.1. Седловую точку одной из систем (1.5) и (1.6) будем называть порождающей седловой точкой связной компоненты K множества неуправляемости N, если она входит в состав ее границы вместе с ω-сепаратрисами (целиком или частично).

Определение 4.2. Пусть непродолжаемая в $G^+(G^-)$ полутраектория $\gamma_p^+(M)$ имеет предельную точку B на оси $0x$, являющуюся седлом p-системы (1.5). Тогда, в соответствии с [1], α-сепаратрису этого седла, непродолжаемую в $G^+(G^-)$, будем называть α-продолжением полутраектории $\gamma_p^+(M)$ и траектории $\gamma_p(M)$. Траекторию $\gamma_p(M)$, продолженную таким образом через седловые точки p-системы, будем называть α-непродолжаемой в $G^+(G^-)$ траекторией $\gamma_p(M)$.

Определение 4.3. Пусть непродолжаемая в $G^+(G^-)$ полутраектория $\gamma_p^-(M)$ имеет предельную точку A на оси $0x$, являющуюся седлом p-системы. Тогда ω-сепаратрису этого седла, непродолжаемую в $G^+(G^-)$, будем называть ω-продолжением полутраектории $\gamma_p^-(M)$ и траектории $\gamma_p(M)$. Траекторию $\gamma_p(M)$, продолженную таким образом через седловые точки p-системы, будем называть ω-непродолжаемой в $G^+(G^-)$ траекторией $\gamma_p(M)$.

Аналогично вводятся понятия α-непродолжаемых и ω-непродолжаемых в $G^+(G^-)$ траекторий $\gamma_q(M)$. Траекторию p-системы или q -системы, α-

непродолжаемую и ω-непродолжаемую в $G^+(G^-)$, будем называть $\alpha\omega$-непродолжаемой в $G^+(G^-)$ траекторией.

Определение 4.4. Если в состав границы Γ области управляемости U входит лишь конечная дуга AC $\alpha\omega$-непродолжаемой в $G^+(G^-)$ траектории $\gamma_q(M)$ и точка A не является разделяющей для $\gamma_q(M)$, то точки A и C называются соответственно начальной граничной точкой и конечной граничной точкой траектории $\gamma_q(M)$.

Из следствий 1.1 и 3.2-3.5 следует, что конечная граничная точка $\alpha\omega$-непродолжаемой в $G^+(G^-)$ траектории $\gamma_q(M)$ может быть лишь левосторонней граничной точкой оси $0x$ (рис.3.5). Начальная граничная точка непродолжаемой в $G^+(G^-)$ траектории $\gamma_q(M)$ может быть лишь правосторонней граничной точкой оси $0x$ (рис.3.6).

Отметим, что $\alpha\omega$-непродолжаемая в G^+ траектория $\gamma_q(M)$, входящая в состав Γ, может не иметь конечной граничной точки, если все ее общие точки с осью $0x$ являются седловыми точками q-системы и двусторонними граничными точками (рис.3.7.). По той же причине $\gamma_q(M)$, входящая в состав Γ, может не иметь и начальной граничной точки.

Аналогично вводятся понятия начальной и конечной граничных точек для $\alpha\omega$-непродолжаемой в $G^+(G^-)$ траектории $\gamma_p(M)$, входящей в состав границы Γ. В этом случае конечная граничная точка является правосторонней граничной точкой оси $0x$, а начальная граничная точка может быть лишь левосторонней граничной точкой оси $0x$. При доказательстве лемм 4.1 – 4.5 и основной теоремы 4.1 мы будем использовать построения , использующие понятия положительного луча $L^+(A) = \{(x, y) : x = x_0,\ y \geq y_0\}$ и отрицательного луча $L^-(A) = \{(x, y) : x = x_0,\ y \leq y_0\}$, выходящих из некоторой точки $A(x_0, y_0)$, а также следующие свойства 4.1. – 4.4.

Свойство 4.1. Если в состав Γ входит α-непродолжаемая в $G^+(G^-)$ полутраектория $\gamma_p^+(M)$ $(\gamma_q^+(M))$, то она обязательно имеет конечную граничную точку.

Действительно, в противном случае область, расположенная справа (слева) от луча $L^+(M)$ $(L^-(M))$ и выше (ниже) α-непродолжаемой в $G^+(G^-)$ полутраектории $\gamma_p^+(M)\,(\gamma_q^+(M))$, принадлежит множеству N, так как через точки луча $L^+(M)$ $(L^-(M))$ допустимые траектории системы (1.2) могут лишь входить в эту область. А это противоречит тому, что полутраектория $\gamma_p^+(M)\,(\gamma_q^+(M))$ входит в состав Γ.

Свойство 4.2. Пусть точка $B(b,0), b>0$, является ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой некоторой связной компоненты множества N, и вместе с ней в состав границы $\varGamma$ входит α-непродолжаемая α-неограниченная в G^- полутраектория $\gamma_p^+(B)$. Тогда в состав границы $\varGamma$ входит ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(B)$.

Действительно, поскольку область, не содержащая начало координат и ограниченная лучом $L^+(B)$ (справа от него) и непродолжаемой в G^- полутраекторией $\gamma_p^+(B)$, принадлежит множеству N, то в состав границы $\varGamma$ не может входить непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(B)$, а поэтому в состав границы $\varGamma$ входит непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(B)$ целиком, либо ее дуга RB, где точка R является ее разделяющей точкой. Однако, в последнем случае в состав $\varGamma$ должна входить и непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(R)$, что невозможно, поскольку она расположена в области, ограниченной лучом $L^+(R)$ (справа от него), дугой RB полутраектории $\gamma_q^-(B)$, непродолжаемой в G^+ полутраекторией $\gamma_p^+(B)$ (рис.4.1), и принадлежащей множеству N.

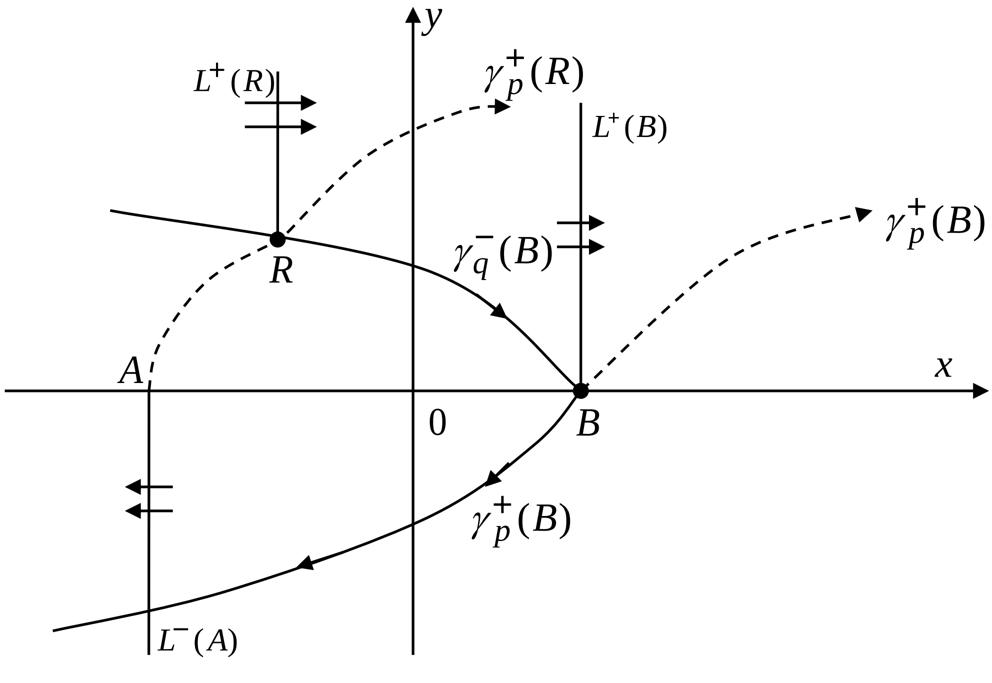

Рис.4.1. Пояснение к свойству 4.2.

Рассматривая далее ω-непродолжаемую в G^+ полутраекторию $\gamma_q^-(B)$, заметим, что она не может иметь не только разделяющей точки, но и начальной граничной точки. Действительно, ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(B)$ не может иметь начальной граничной точки ни на интервале $0B$, в силу выбора точки B, ни на отрицательной полуоси $0x$. Если бы она имела на отрицательной полуоси $0x$ начальную граничную точку A, то проведя луч $L^{-}(A)$, который пересечет полутраекторию $\gamma_p^{+}(B)$ в некоторой точке P , мы получили бы область, не содержащую начало координат и ограниченную отрезком $[AP]$ луча $L^{-}(A)$ (слева от него), дугой AB полутраектории $\gamma_q^{-}(B)$ и дугой BP полутраектории $\gamma_p^{+}(B)$. Эта область не содержит начало координат и принадлежит множеству N (рис.4.1). А это означает, что часть α-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_p^{+}(B)$, начиная с точки ее пересечения с лучом $L^{-}(A)$, лежит внутри множества N, что противоречит исходному предположению.

Аналогично доказывается и следующее свойство.

Свойство 4.3. Пусть точка $B(b,0), b<0$, является ближайшей к началу координат правосторонней граничной точкой некоторой связной компоненты множества N, и вместе с ней в состав границы Γ входит α-непродолжаемая α-неограниченная в G^{+} полутраектория $\gamma_q^{+}(B)$. Тогда в состав границы Γ входит ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^{-} полутраектория $\gamma_p^{-}(B)$.

Свойство 4.4. Пусть в состав границы Γ некоторой связной компоненты множества неуправляемости входит лишь дуга BC $\alpha\omega$-непродолжаемой в G^{+} (в G^{-}) траектории q-системы (p-системы), причем интервал (BC) оси $0x$ содержит точку 0. Тогда α-непродолжаемая в G^{-}(в G^{+}) полутраектория $\gamma_p^{+}(C)$ ($\gamma_q^{+}(C)$) может входить в состав границы Γ только в том случае, если ее конечная граничная точка D расположена на полуинтервале $[B0)$ (на полуинтервале $(0B]$) оси $0x$.

Предположим, что дуга CD α-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_p^{+}(C)$ входит в состав границы Γ, и точка D лежит правее точки 0. Построим луч $L^{+}(D)$, который пересечет дугу BC в некоторой точке P. Нетрудно видеть, что область, ограниченная дугой CD α-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_p^{+}(C)$, отрезком $[DP]$ луча $L^{+}(D)$ и дугой PC $\alpha\omega$-непродолжаемой в G^{+} траектории q-системы (рис.4.2.), принадлежит множеству неуправляемости.

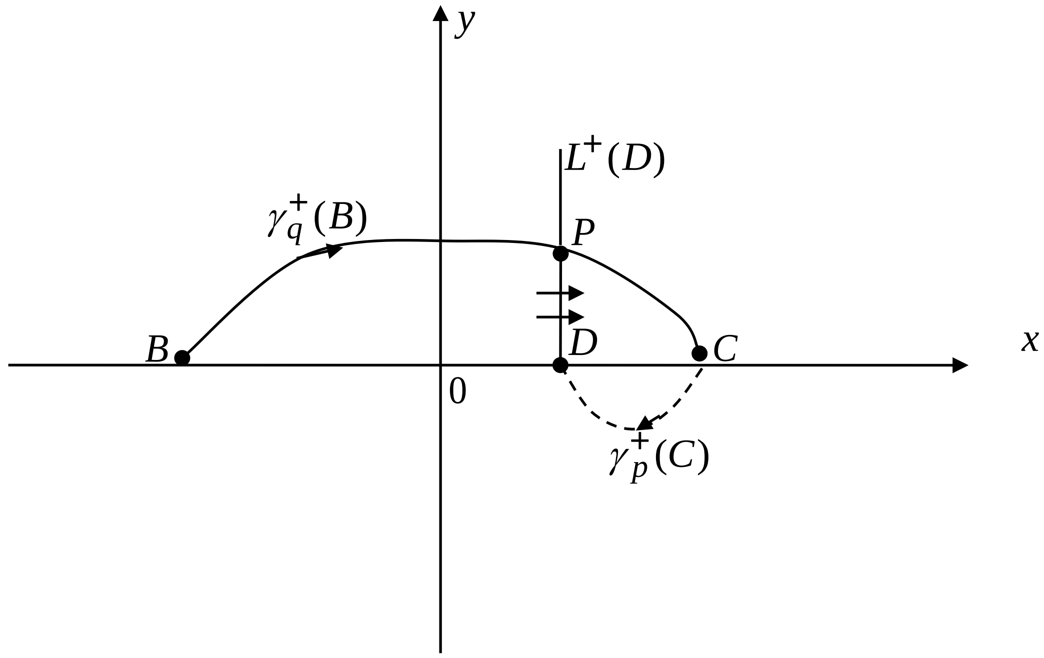

Рис.4.2. Пояснение к свойству 4.4.

Это противоречит тому, что α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(C)$ входит в состав границы Γ, поскольку с обеих сторон от нее будет располагаться множество неуправляемости. Предположим, что точка D лежит левее точки B. Построим луч $L^-(B)$, который пересечет дугу CD в некоторой точке F. Нетрудно видеть, что область, расположенная вне замкнутой кривой, образованной отрезком $[BF]$ луча $L^-(B)$ (слева от него), дугой BC и дугой CF α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(C)$ (рис.4.2), принадлежит множеству неуправляемости. Это противоречит тому, что вся дуга CD α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(C)$ входит в состав границы Γ.

Аналогично доказывается и второй вариант свойства 4.4.

Свойство 4.5. Пусть в состав границы Γ некоторой связной компоненты множества неуправляемости входят:

- дуга BC $\alpha\omega$-непродолжаемой в G^+ траектории $\gamma_p(M)$, где точки B и C являются соответственно ее начальной и конечной граничными точками;
- дуга CD α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_q^+(C)$, где точка D является ее конечной граничной точкой.

Если точка D лежит на интервале (BC) оси $0x$ и интервал (DC) оси $0x$ не содержит начало координат, то точка D будет порождающей седловой точкой этой связной компоненты.

Действительно, вместе с левосторонней граничной точкой D в состав границы Γ входит либо α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(D)$, либо ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(D)$. Построим луч $L^+(D)$, который пересечет дугу BC в некоторой точке P. Очевидно, что область, ограниченная отрезком $[DP]$луча $L^+(D)$ (справа от него), дугой PC траектории $\gamma_p(M)$ и дугой CD полутраектории $\gamma_q^+(C)$ (рис.4.3), принадлежит множеству неуправляемости.

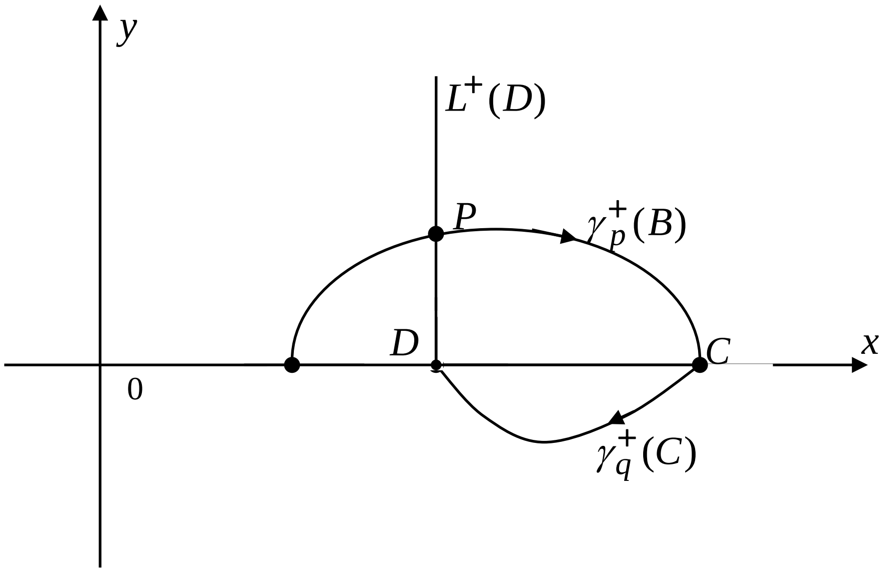

Рис.4.3. Пояснение к свойству 4.5.

Это значит, что α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(D)$ не может входить в состав границы Γ. Следовательно, в состав границы Γ входит ω-непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_q^-(D)$ целиком или частично, которая как и дуга CD α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_q^+(C)$, является ω-сепаратрисой седла D q-системы.

*Замечание***.** Свойство остается справедливым, если вместо дуги BC $\alpha\omega$-непродолжаемой в G^+ траектории p -системы взять ω-неограниченную в G^+ полутраекторию $\gamma_p^-(C)$.

Свойство 4.6. Пусть в состав границы Γ некоторой связной компоненты множества неуправляемости входят:

- дуга BC $\alpha\omega$-непродолжаемой в G^- траектории $\gamma_q(M)$, где точки B и C являются соответственно её начальной и конечной граничными точками;
- дуга CD α-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_p^+(C)$, где точка D является ее конечной граничной точкой.

Если точка D лежит на интервале (CB) оси $0x$ и интервал (CD) оси $0x$ не содержит начало координат, то точка D будет порождающей седловой точкой этой связной компоненты. Доказывается так же, как свойство 4.5.

*Замечание***.** Свойство остается справедливым, если вместо дуги BC $\alpha\omega$-непродолжаемой в G^- траектории q-системы взять ω-неограниченную в G^- полутраекторию $\gamma_q^-(C)$.

ЛЕММА 4.1. Пусть некоторая связная компонента K^+ (K^-) множества неуправляемости N полностью расположена в замыкании $G^+(G^-)$. Тогда найдется такая точка M, что границей этой связной компоненты будет $\alpha\omega$-непродолжаемая в $G^+(G^-)$ траектория $\gamma_q(M)$ $(\gamma_p(M))$, не имеющая ни разделяющей точки, ни начальной и конечной граничных точек.

Доказательство проведем для связной компоненты K^+, расположенной в замыкании полуплоскости G^+. Возьмем произвольную точку D в K^+, не лежащую на оси $0x$ и проведем отрезок прямой $0D$. Так как точка 0 принадлежит U, а точка D принадлежит N, то на отрезке $0D$ должна существовать точка M, принадлежащая Γ (если она не одна, то выберем ближайшую к точке 0 и принадлежащую K^+). В соответствии со следствием 1.1 в состав Γ вместе с точкой M входит либо непродолжаемая в G^+ траектория $\gamma_p(M)$, либо непродолжаемая в G^+ траектория $\gamma_q(M)$, либо непродолжаемые в G^+ полутраектории $\gamma_p^+(R)$ и $\gamma_q^-(R)$**,** где точка R является разделяющей для одной из траекторий $\gamma_p(M)$ и $\gamma_q(M)$. Однако, из определения связной компоненты K^+ следует, что непродолжаемая в G^+ траектория $\gamma_p^+(M)$ не может иметь предельной точки на оси $0x$ и по свойству 4.1 не может входить в состав Γ. Значит, в состав границы Γ связной компоненты K^+ входит непродолжаемая в G^+ траектория $\gamma_q(M)$, либо ее часть $\gamma_q^+(R)$, где точка R является разделяющей для траектории $\gamma_q(M)$. Однако, в случае разделяющей точки в состав Γ должна входить и непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(R)$, не имеющая предельной точки на оси $0x$, что невозможно по свойству 4.1. Итак, в состав Γ входит непродолжаемая в G^+ траектория $\gamma_q(M)$. Рассматривая её $\alpha\omega$-продолжение в

G^+, отметим, что оно не может иметь ни начальной, ни конечной граничных точек, поскольку в этом случае связная компонента K^+ будет иметь непустое пересечение с G^-. Таким образом, границу Γ связной компоненты K^+ образует $\alpha\omega$-непродолжаемая $\alpha\omega$-неограниченная в G^+ траектория $\gamma_q(M)$, общими точками которой с осью $0x$ являются лишь седла q-системы. Заметим, что эти точки могут располагаться лишь на положительной полуоси $0x$. Действительно, если бы $\alpha\omega$-непродолжаемая, $\alpha\omega$-неограниченная в G^+ полутраектория $\gamma_q(M)$ имела общую точку B с отрицательной полуосью $0x$, то область, не содержащая начало координат и ограниченная полутраекторией $\gamma_q^+(B)$ и лучом $L^-(B)$ (слева от него) принадлежала бы множеству N, что противоречит определению связной компоненты K^+.

ЛЕММА 4.2. Пусть связная компонента K_1^+ множества неуправляемости имеет в пересечении с осью $0x$, кроме, может быть, конечного числа изолированных точек лишь полуинтервал $[b,+\infty)$, причем точка $B(b,0), b>0$, не является порождающей седловой точкой q-системы. Тогда границу Γ связной компоненты K_1^+ образуют α-непродолжаемая α-неограниченная в G^- полутраектория $\gamma_q^+(B)$, и ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(B)$.

Поскольку точка B(b,0) является левосторонней граничной точкой и полуинтервал [b,+∞) оси $0x$ принадлежит N, в состав границы Γ не может входить непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(B)$, ибо ее α-продолжение в G^+ должно иметь конечную граничную точку по свойству 4.1. Значит, в состав границы Γ входит непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(B)$. Так как точка B не является порождающей седловой точкой q-системы, в состав Γ должна входить непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(B)$. В силу предположений относительно связной компоненты K_1^+ α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(B)$ не может иметь конечную граничную точку, а по свойству 4.2 ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(B)$ не имеет ни разделяющей, ни начальной граничной точек.

Аналогично доказывается

ЛЕММА 4.3 . Пусть связная компонента K_1^-- множества неуправляемости имеет в пересечении с осью $0x$, кроме, может быть, конечного числа изолированных точек лишь полуинтервал (-∞,b], причем точка $B(b,0)$, $b<0$, не является порождающей седловой точкой p-системы. Тогда границу Γ связной компоненты K_1^-- образуют α-непродолжаемая α-

неограниченная в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(B)$, и ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^- полутраектория $\gamma_p^-(B)$.

ЛЕММА 4.4. Пусть связная компонента K_2 множества неуправляемости имеет в пересечении с осью $0x$ лишь один отрезок $[AB]$, не содержащий начало координат. Если точки $A(a,0)$ и $B(b,0)$, $a<b$, не являются порождающими седловыми точками соответственно q-системы и p-системы, то границу Γ связной компоненты K_2 образуют дуга AB α-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_p^+(A)$ и дуга BA α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_q^+(B)$.

Пусть для определенности отрезок $[AB]$ расположен на положительной полуоси $0x$ (рис.4.4).

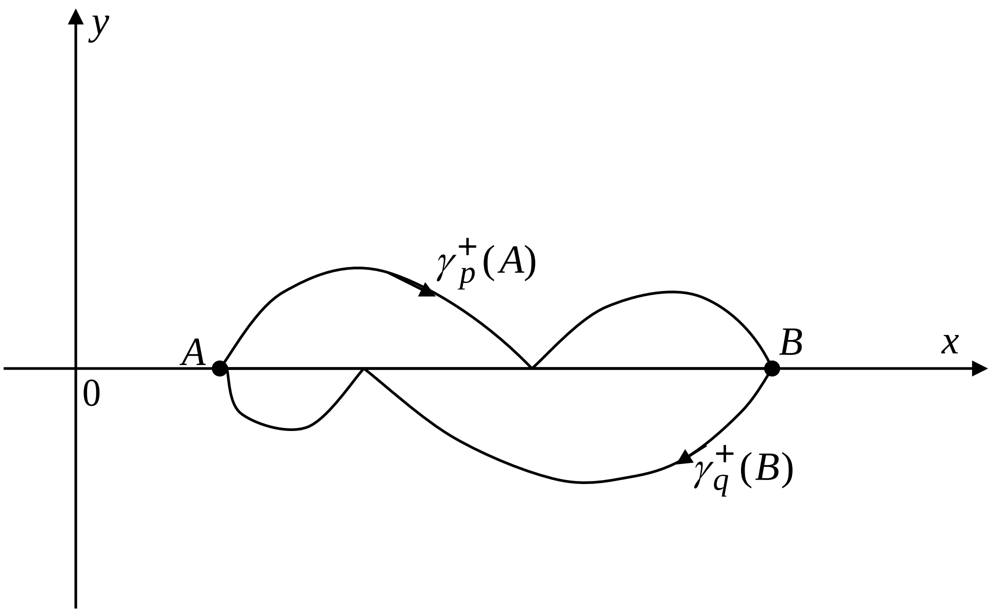

Рис.4.4. Связная компонента K_2 .

Поскольку точка A является левосторонней граничной точкой, в состав Γ должна входить либо непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(A)$, либо непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(A)$. Но в первом случае полутраектория $\gamma_p^+(A)$ не может иметь предельных точек на оси $0x$ по условию леммы. Это означает, что область, не содержащая начало координат и ограниченная лучом $L^+(A)$ (справа от него) и полутраекторией $\gamma_p^+(A)$, должна принадлежать множеству N вместе с полуинтервалом $[a,+\infty)$ оси $0x$, что противоречит условию леммы. Значит, в состав Γ входит непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(A)$. Так как точка A не является порождающей седловой точкой q-системы, в состав Γ входит непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(A)$. Рассматривая α-непродолжаемую в G^+ полутраекторию $\gamma_p^+(A)$, заметим, что по свойству 4.1. она обязана иметь конечную граничную точку. Поскольку конечная граничная точка полутраектории $\gamma_p^+(A)$ является правосторонней граничной точкой оси $0x$, она обязательно совпадет с точкой B, ибо в противном случае мы получим противоречие с определением связной компоненты K_2.

Так как точка B не является порождающей седловой точкой p-системы, в состав Γ входит непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^+(B)$. Рассматривая α-непродолжаемую в G^- полутраекторию $\gamma_q^+(B)$, заметим, что по свойству 4.1. она обязана иметь конечную граничную точку, которая, будучи левосторонней граничной точкой оси $0x$, обязательно совпадет с точкой A.

ЛЕММА 4.5. Пусть связная компонента K_3 множества неуправляемости имеет в пересечении с осью $0x$, кроме конечного числа изолированных точек, лишь два полуинтервала $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$. Если точки $A(a.0)$, $a < 0$, и $B(b.0)$, $b > 0$, не являются порождающими седловыми точками, то границу Γ связной компоненты K_3 образуют дуга AB α-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^+(A)$, и дуга BA α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(B)$.

Как показано в лемме 4.2, в состав границы Γ вместе с левосторонней точкой B должна входить ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(B)$, а поскольку точка B не является порождающей седловой точкой q-системы, то в состав Γ входит непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(B)$. Рассматривая α-продолжение $\gamma_p^+(B)$ в G^-, заметим, что на интервале (AB) оси $0x$ она по условиям леммы может иметь лишь двусторонние граничные точки, являющиеся седлами p-системы. Если предположить, что она не имеет конечной граничной точки, то мы получим противоречие с тем, что она вся входит в состав Γ, поскольку, не имея вертикальной асимптоты, она обязательно пересечет луч $L^-(A)$ в некоторой точке F. А это значит, что ее часть $\gamma_p^+(F)$ будет расположена внутри множества N, частью которого является область, расположенная левее луча $L^-(A)$ и ниже оси $0x$ (рис.4.5).

Итак, α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(B)$ имеет конечную граничную точку, которая, являясь правосторонней граничной точкой оси $0x$, обязательно совпадает с точкой A в силу условий леммы. Поскольку точка A

не является порождающей седловой точкой p -системы, то в состав Γ входит непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(A)$. Рассматривая ее α-продолжение в G^+, мы так же придем к выводу о существовании конечной граничной точки для $\gamma_q^+(A)$, которая обязательно совпадает с точкой B.

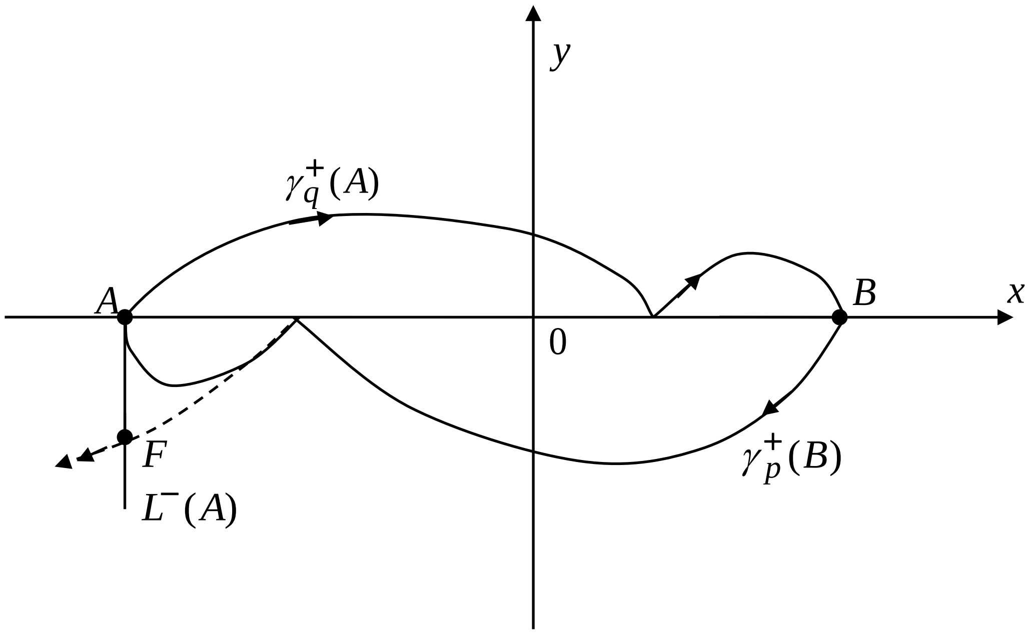

Рис.4.5. Связная компонента К3 .

Отметим в заключение, что двусторонние граничные точки α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(A)$ может иметь лишь на интервале $(0B)$, а α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(B)$ лишь на интервале $(A0)$ оси $0x$. Действительно, если предположить, что $\gamma_q^+(A)$ имеет общую точку D с осью $0x$ на интервале $(A0)$, то область, не содержащая начало координат и ограниченная полуинтервалом $(-\infty, a)$ оси $0x$, дугой (AD) полутраектории $\gamma_q^+(A)$ и лучом $L^-(D)$ должна принадлежать множеству N, что противоречит определению связной компоненты K_3 .

ТЕОРЕМА 4.1. Любая связная компонента K множества неуправляемости системы (1.2), кроме указанных в леммах 4.1-4.5 шести типов $K^+, K^-, K_1^-, K_1^+, K_2$ и K_3, имеет в составе своей границы хотя бы одну порождающую седловую точку p-системы, либо q-системы.

Поскольку компонента K не является компонентой типа K^+ и K^-, то она содержит, как минимум один отрезок оси $0x$. Пусть хотя бы один из них расположен на положительной полуоси $0x$ и точка B – левый конец ближайшего к началу координат такого отрезка.

В состав границы Γ вместе с левосторонней граничной точкой B может входить либо непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_p^{+}(B)$, либо непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_q^{-}(B)$ целиком или частично.

Рассмотрим подробно первый случай. Если α-непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_p^{+}(B)$ не имеет конечной граничной точки, то по свойству 4.2. в состав границы Γ входит ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^{+} полутраектория $\gamma_q^{-}(B)$. В этом случае компонента K имеет тип K_1^{+}. Если же $\gamma_p^{+}(B)$ имеет конечную граничную точку C, то она должна располагаться на отрицательной полуоси $0x$ в силу предположения о точке B. Если вместе с правосторонней граничной точкой C в состав Γ войдет непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_p^{-}(C)$, то точка C будет порождающей седловой точкой p-системы для компоненты K. Пусть в состав Γ войдет непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_q^{+}(C)$, которая по свойству 4.1 должна иметь конечную граничную точку. Рассматривая α-непродолжаемую в G^{+} полутраекторию $\gamma_q^{+}(C)$, заметим, что по свойству 4.4 она не может иметь общих точек с интервалом $(C0)$ оси $0x$.Траектория $\gamma_p^{+}(C)$ не может иметь конечную граничную точку на интервале $(0B)$ оси $0x$ в силу предположения о точке B. Если же ее конечной граничной точкой является точка B , то компонента K имеет тип K_3 (рис.4.6). Если предположить, что α-непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_q^{+}(C)$ не имеет конечной граничной точки, либо она расположена правее точки B, то полутраектория $\gamma_q^{+}(C)$ пересечет луч $L^{+}(B)$ в некоторой точке F. В результате мы получим область, расположенную вне замкнутой кривой, образованной отрезком BF луча $L^{+}(B)$, дугой BC полутраектории $\gamma_p^{+}(B)$ и дугой CF полутраектории $\gamma_p^{+}(C)$ (рис.4.6), принадлежащую множеству N.

Часть $\gamma_p^{+}(F)$ α-непродолжаемой в G^{+} полутраектории $\gamma_p^{+}(C)$ будет лежать внутри множества N, что противоречит тому, что она либо целиком входит в состав Γ, либо ее конечная граничная точка расположена правее точки B.

Тем самым предположение о том, что в состав Γ вместе с точкой B входит непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_p^{+}(B)$ приводит либо к существованию порождающей седловой точки C p-системы, либо к одному из указанных выше типов связных компонент множества неуправляемости, не содержащих порождающих седловых точек.

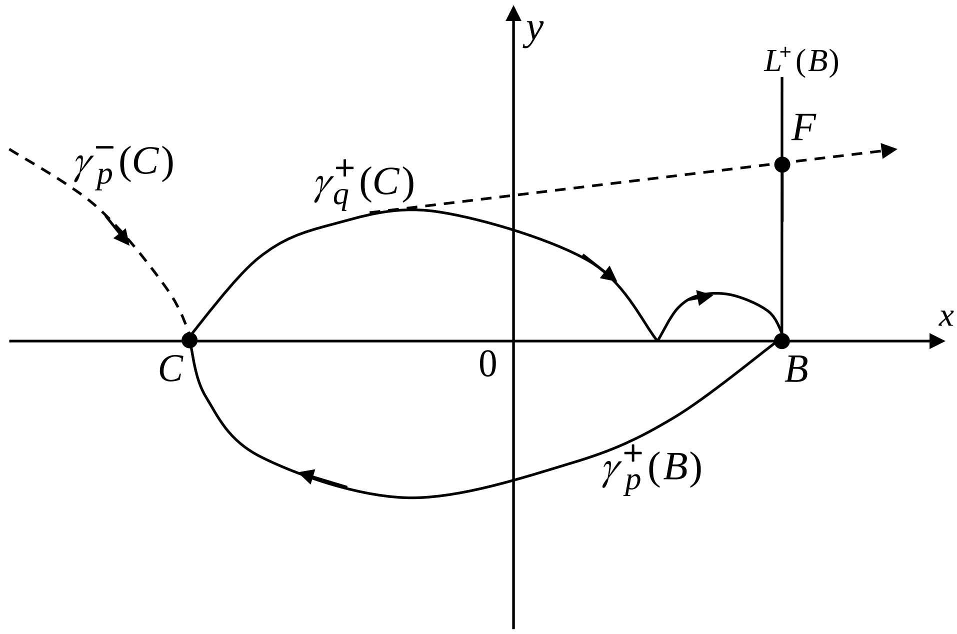

Рис.4.6. Пояснение к теореме 4.1.

Рассмотрим теперь второй случай, когда вместе с левосторонней граничной точкой B в границу Γ входит непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(B)$ целиком или частично. Если при этом в состав Γ войдет непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(B)$ целиком или частично, то точка B становится порождающей седловой точкой q-системы для компоненты K. В противном случае в состав Γ должна входить непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(B)$ (рис.4.7).

Рассмотрим возможное поведение α-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_p^+(B)$. По свойству 4.1 она должна иметь конечную граничную точку C, являющуюся правосторонней граничной точкой оси $0x$. Если в состав Γ вместе с точкой C войдет непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^-(C)$ целиком или частично, то точка C становится порождающей седловой точкой p-системы для компоненты K. В противном случае в состав Γ должна войти непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^+(C)$.

Рассматривая α-непродолжаемую в G^- полутраекторию $\gamma_q^+(C)$, заметим, что по свойству 4.1 она должна иметь конечную граничную точку H, являющуюся левосторонней граничной точкой оси $0x$. Если эта точка лежит на интервале (BC) оси $0x$, то по свойству 4.5 точка H становится порождающей седловой точкой q-системы для компоненты K. На интервале $(0B)$ оси $0x$ точка H располагаться не может в силу выбора точки B. Если же точка H совпадает с точкой B, то компонента K будет типа K_2. Рассмотрим теперь вариант, когда точка H расположена на отрицательной полуоси $0x$. Если в

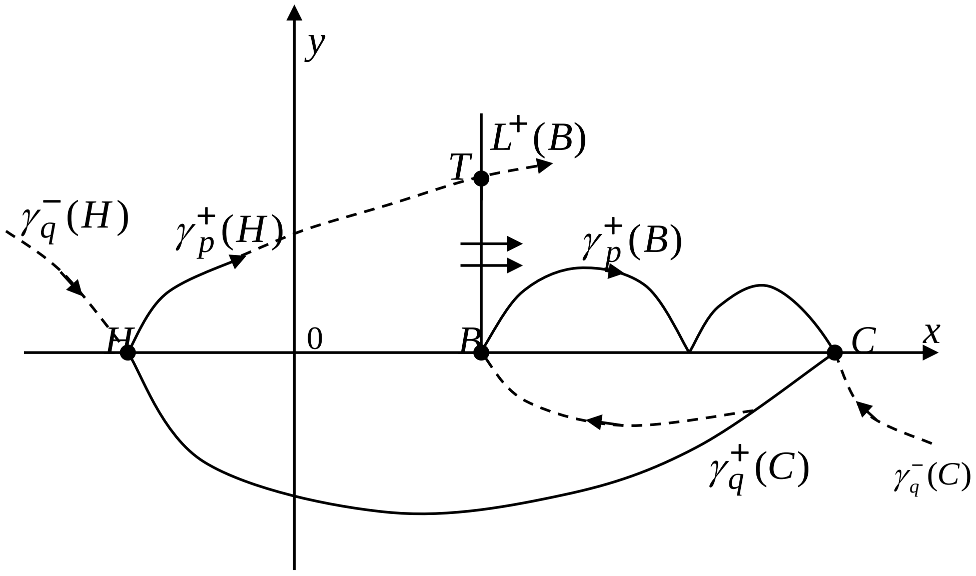

Рис.4.7. Пояснение к теореме 4.1.

состав Γ войдет непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(H)$ целиком или частично, то точка H становится порождающей седловой q-системы для компоненты K. Поэтому рассмотрим ситуацию, когда в состав Γ войдет непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(H)$. Рассматривая α-непродолжаемую в G^+ полутраекторию $\gamma_p^+(H)$, заметим, что по свойству 4.1 она должна иметь конечную граничную точку Q на оси $0x$, являющуюся правосторонней граничной точкой. Покажем, что точка Q должна располагаться на интервале $(H0)$ оси $0x$. Действительно, на интервале $(0B)$ оси $0x$ точка Q располагаться не может в силу выбора точки B, а на отрезке $[BC]$ эта точка оказаться не может, поскольку точки B и C соединены дугой BC полутраектории $\gamma_p^+(B)$. Если же предположить, что конечная граничная точка Q расположена правее точки C, то область, расположенная вне замкнутой кривой, образованной отрезком $[BT]$ луча $L^+(B)$, где точка T является точкой пересечения полутраектории $\gamma_p^+(H)$ с лучом $L^+(B)$, дугой HT полутраектории $\gamma_p^+(H)$, дугой CH полутраектории $\gamma_q^+(C)$ и дугой BC полутраектории $\gamma_p^+(B)$ (рис.4.7), будет принадлежать множеству N. Это противоречит тому, что полутраектории $\gamma_p^+(H)$, $\gamma_p^+(B)$ и $\gamma_q^+(C)$ входят в состав

Γ, а точки C и H являются соответственно правосторонней и левосторонней граничными точками. Итак, конечная граничная точка Q располагается на интервале $(H0)$ оси $0x$ и по свойству 4.6 является порождающей седловой точкой p-системы для компоненты K. Таким образом, и во втором случае, когда вместе с левосторонней граничной точкой B в границу Γ входит непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_q^{-}(B)$ целиком или частично, связная компонента либо имеет в составе своей границы порождающую седловую точку, либо имеет один из указанных в леммах 4.2 -4.5 типов.

Аналогичным образом доказывается утверждение теоремы 4.1 и для случая, когда связная компонента K множества неуправляемости имеет общие отрезки с отрицательной полуосью $0x$.

5. О классификации связных компонент множества неуправляемости нелинейного осциллятора с одной порождающей седловой точкой

В данном параграфе кроме локальной управляемости объекта (1) мы будем предполагать, что:

a) системы (2) и (3) имеют лишь простые состояния равновесия;

b) положительные полутраектории p-системы и q-системы не имеют вертикальных асимптот;

c) любая α-непродолжаемая в G^{+} (в G^{-}) положительная полутраектория q-системы (p-системы) имеет конечную точку (“условие эффективности торможения”).

В силу свойства 4.1 и предположения c) любая связная компонента K множества неуправляемости N будет иметь в пересечении с осью $0x$ хотя бы один отрезок (конечный или бесконечный). Предположим, что хотя бы один такой отрезок расположен на положительной полуоси $0x$ и точка B является левым концом ближайшего к началу координат такого отрезка. Это означает, что точка B является ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой, входящей в состав границы Γ некоторой связной компоненты K множества неуправляемости. Отметим, что случай, когда точка B является ближайшей к началу координат правосторонней граничной точкой отрицательной полуоси $0x$, входящей в состав границы Γ некоторой связной компоненты K множества неуправляемости, рассматривается аналогично с заменой траекторий и полутраекторий p-системы на траектории и полутраектории q-системы и наоборот.

В окрестности левосторонней граничной точки B возможны четыре варианта [1] строения границы Γ (рис.3.5). А именно, в состав границы Γ могут входить:

- обе ω-непродолжаемые в G^{+} и в G^{-} полутраектории $\gamma_q^{-}(B)$, в этом случае точка B является седлом q-системы и порождающей седловой точкой связной компоненты K ;
- α-непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_p^{+}(B)$ целиком или ее дуга BC, где точка C является ее конечной граничной точкой, и α-непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_p^{+}(B)$ целиком или ее дуга BD , где точка D является ее конечной граничной точкой;
- ω-непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_q^{-}(B)$ целиком или ее дуга AB, где точка A является либо начальной граничной точкой, либо разделяющей точкой, и α-непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_p^{+}(B)$

целиком или ее дуга BD , где точка D является ее конечной граничной точкой;

- α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(B)$ целиком или ее дуга BC, где точка C является ее конечной граничной точкой, и ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(B)$ целиком или ее дуга AB , где точка A является либо начальной граничной точкой, либо разделяющей точкой.

Рассмотрим подробно возможную структуру границы Γ и соответствующие типы связных компонент множества неуправляемости для первого случая, когда в состав границы Γ вместе с седловой точкой B q-системы входят обе ее ω-сепаратрисы: ω-непродолжаемая в G^+ сепаратриса S_1 целиком или частично и ω-непродолжаемая в G^- сепаратриса S_2 целиком или частично Остальные три случая предполагается рассмотреть самостоятельно.

Определение 5.1. Если в состав границы Γ входит вся ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^+ сепаратриса S_1, то будем говорить, что в состав границы Γ входит сепаратриса $S_1(1F)$; если в состав границы Γ входит лишь дуга RB ω-непродолжаемой в G^+ сепаратрисы S_1, где точка R является ее разделяющей точкой, то будем говорить, что в состав границы Γ входит сепаратриса $S_1(1R)$; если в состав границы Γ входит лишь дуга A_1B ω-непродолжаемой в G^+ сепаратрисы S_1, где точка A_1 является ее начальной граничной точкой, расположенной на отрицательной полуоси $0x$, то будем говорить, что в состав границы Γ входит как минимум сепаратриса $S_1(1E)$.

В случаях $S_1(1F)$ и $S_1(1R)$ процесс построения границы Γ на основе сепаратрисы S_1 будет закончен. В случае $S_1(1E)$ процесс построения границы Γ на основе сепаратрисы S_1 будет также закончен, если в состав границы Γ вместе с начальной граничной точкой A_1 войдет непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^+(A_1)$. В этом случае мы будем говорить, что в состав границы Γ входит сепаратриса $S_1(1E)$. Если же в состав границы Γ вместе с начальной граничной точкой A_1 войдет ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^-(A_1)$ частично или полностью , то мы будем ее рассматривать как двухкратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 и процесс построения границы Γ на основе сепаратрисы S_1 будет продолжен.

Если в состав границы Γ входит вся ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^- полутраектория $\gamma_p^-(A_1)$, то будем говорить, что в состав границы Γ входит сепаратриса $S_1(2F)$. Если двухкратным ω-

продолжением сепаратрисы S_1 является дуга A_2A_1 ω-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$, где точка A_2 является ее начальной граничной точкой, то возможны следующие два варианта, в зависимости от того, каким является интервал (A_1A_2) оси $0X$. Если интервал (A_1A_2) оси $0X$ содержит в себе начало координат, то двухкратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 будем называть внешним. В этом случае будем говорить, что в состав границы Γ входит: $S_1(2R)$, если двухкратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является лишь дуга RA_1 полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$; как минимум $S_1(2E)$, если двухкратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является вся дуга A_2A_1 полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$. Если интервал (A_1A_2) оси $0X$ не содержит в себе начало координат, то двухкратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 будем называть внутренним. В этом случае будем говорить, что в состав границы Γ входит: $S_1(1E+1R)$, если двухкратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является лишь дуга RA_1 полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$; как минимум $S_1(1E+1I)$, если двухкратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является вся дуга A_2A_1 полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$.

В случаях $S_1(2F)$, $S_1(2R)$ и $S_1(1E+1R)$ процесс построения границы Γ на основе сепаратрисы S_1 будет закончен. В случаях $S_1(2E)$ и $S_1(1E+1I)$ процесс построения границы Γ на основе сепаратрисы S_1 будет также закончен, если в состав границы Γ вместе с начальной граничной точкой A_2 войдет непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(A_2)$. В этих случаях мы будем говорить, что в состав границы Γ входит соответственно сепаратриса $S_1(2E)$ или $S_1(1E+1I)$. Если же в состав границы Γ вместе с начальной граничной точкой A_2 войдет ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(A_2)$ целиком или частично, то мы будем ее рассматривать как трехкратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 и процесс построения границы Γ будет продолжен и т.д. Отметим, что если на каком-то шаге ω-продолжение сепаратрисы S_1 оказалось внутренним, то все дальнейшие ω-продолжения сепаратрисы S_1 могут быть только внутренними. Аналогичный смысл имеют обозначения $S_2(1F)$, $S_2(1R)$, $S_2(1E)$, а также $S_2(2F)$, $S_2(2R)$, $S_2(2E)$, $S_2(1E+1I)$, $S_2(1E+1R)$ и т.д.

В зависимости от того, какие ω-продолжения сепаратрис S_1 и S_2 порождающей седловой точки В q-системы входят в состав границы Γ, образуется тот или иной тип связной компоненты множества неуправляемости: будем обозначать символом $K_q(1F,1F)$) связную компоненту, границу которой образуют сепаратрисы $S_1(1F)$ и $S_2(1F)$; символом $K_q(1R,1R)$ связную компоненту, границу которой образуют сепаратрисы $S_1(1R)$ и $S_2(1R)$; символом $K_q(2E+1I,1E)$ связную компоненту, границу которой образуют сепаратрисы $S_1(2E+1I)$ и $S_2(1E)$ и т.д.

Теорема 5.1. Пусть точка B положительной полуоси $0x$ является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты K и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Γ входит $S_2(1F)$, то связная компонента K имеет либо тип $K_q(1F,1F)$, либо тип $K_q(2F,1F)$.

Действительно, ω-продолжение сепаратрисы S_1 в G^+ не может иметь вид $S_1(1R)$ или $S_1(1E)$. В первом случае в состав границы Γ вместе с разделяющей точкой R должна войти и непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(R)$, чего быть не может, поскольку она лежит в области, ограниченной лучом $L^+(R)$ (справа от него), сепаратрисами $S_1(1R)$, $S_2(1F)$ (рис.5.1) и принадлежащей множеству неуправляемости. Во втором случае вместе с начальной граничной точкой A_1, лежащей на отрицательной полуоси $0x$, (на положительной полуоси точка A_1 не может располагаться в силу выбора точки B) в состав границы Γ должна войти непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^+(A_1)$. Однако она лежит внутри области, ограниченной лучом $L^-(A_1)$ (слева от него), сепаратрисами $S_1(1E), S_2(1F)$ и принадлежащей множеству неуправляемости. Таким образом, либо в состав границы должна войти $S_1(1F)$, и тогда связная компонента имеет тип $K_q(1F,1F)$, либо сепаратриса S_1 имеет двухкратное ω-продолжение через точку A_1 (рис.5.1), то есть в состав границы Γ входит ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^-(A_1)$ целиком или частично.

Предположение о том, что двухкратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 имеет вид $S_1(2R)$ или $S_1(1E+1R)$, как и в случае $S_1(1R)$, приводит к противоречию с тем, что в состав границы Γ должна входить и положительная полутраектория $\gamma_q^+(R)$. Это ω-продолжение не может быть внешним, то есть иметь вид $S_1(2E)$, так как траектория р-системы $\gamma_p^-(A_1)$ не может пересекать траекторию q-системы $S_2(1F)$ в G^- справа налево. Покажем, что если это ω-продолжение является внутренним, то есть имеет вид $S_1(1E+1I)$, то связная компонента будет иметь в составе своей границы еще одну порождающую седловую точку.

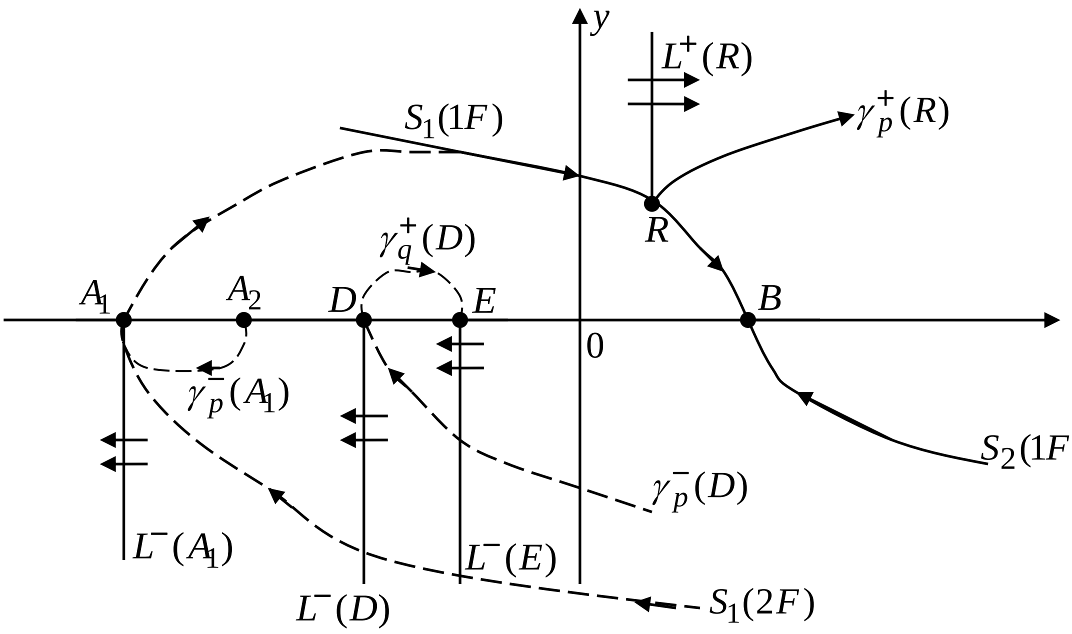

Рис.5.1. Пояснение к теореме 5.1.

Действительно, в этом случае в состав границы Γ должна входить дуга A_2A_1 ω-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_p^{-}(A_1)$, где точка A_2 располагается на интервале (A_10) отрицательной полуоси $0x$ (на интервале $(0B)$ точка A_2 не может располагаться в силу выбора точки B). Поскольку точка A_2 является левосторонней граничной точкой, то связная компонента K будет содержать в себе некоторый отрезок $[A_2D]$ отрицательной полуоси $0x$, так что точка D будет правосторонней граничной точкой. Вместе с точкой D в состав границы Γ должна войти либо α- непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_q^{+}(D)$, либо ω-непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_p^{-}(D)$ целиком или частично. Однако первый случай приводит к противоречию, поскольку полутраектория $\gamma_q^{+}(D)$ будет располагаться внутри области, ограниченной лучом $L^{-}(D)$ (слева от него), отрезком $[A_2D]$, сепаратрисами $S_1(1E+1I)$, $S_2(1F)$ и принадлежащей множеству неуправляемости. Таким образом, в состав границы Γ должна войти ω-непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_p^{-}(D)$ целиком или частично. Покажем, что вместе с точкой D в состав границы Γ должна войти и ω-непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_p^{-}(D)$ целиком или частично, то есть точка D будет второй порождающей седловой точкой. Действительно, в противном случае в состав границы Γ должна войти α- непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D)$. Однако этот случай приводит к противоречию, поскольку полутраектория $\gamma_q^+(D)$ не может пересечь дугу A_1B сепаратрисы S_1 и поэтому должна иметь конечную граничную точку E на интервале $(D0)$ оси $0x$ (точка E не может располагаться на интервале $(0B)$ в силу выбора точки B). Но тогда область, ограниченная лучом $L^-(E)$(слева от него), дугой DE, отрезком $[A_2D]$, сепаратрисами $S_1(1E+1I)$, $S_2(1F)$ (рис.5.1), принадлежит множеству неуправляемости. Это противоречит тому, что точка D является правосторонней граничной точкой. Итак, предположение о том, что двухкратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 имеет вид $S_1(1E+1I)$, приводит к противоречию со статусом связной компоненты K. Поэтому если сепаратриса S_1 имеет двухкратное ω-продолжение, то оно может иметь лишь вид $S_1(2F)$, и в этом случае связная компонента K будет иметь тип $K_q(2F,1F)$.

Теорема 5.2. Пусть точка В положительной полуоси $0x$ является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты K и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Γ входит $S_2(2F)$, то связная компонента K имеет лишь один из указанных трех типов: либо $K_q(1F,2F)$, либо $K_q(2F,2F)$, либо $K_q(3F,2F)$.

Итак, пусть в состав границы Γ связной компоненты K входит $S_2(2F)$, то есть некоторая дуга C_1B ω-непродолжаемой в G^- серапатрисы S_2 и ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(C_1)$. Так как точка B является порождающей седловой точкой q-системы, то в состав границы Γ входит также ω-непродолжаемая в G^+ сепаратриса S_1 целиком или частично. Заметим вначале, что если ω-непродолжаемая в G^+ сепаратриса S_1 пересечет ω-непродолжаемую ω-неограниченную в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(C_1)$ в некоторой точке R, то в соответствии с леммой 1.1 эта точка будет разделяющей для S_1 и сепаратриса S_1 не может входить в состав границы Γ.

Аналогично тому, как это сделано в теореме 1, показывается, что в состав границы Γ не может входить ни $S_1(1R)$, ни $S_1(1E)$. Таким образом, либо в состав границы Γ должна войти $S_1(1F)$, и мы получим связную компоненту $K_q(1F,2F)$, либо ω-непродолжаемая в G^+ сепаратриса S_1 имеет двухкратное ω-продолжение через начальную граничную точку A_1 (рис.5.2).

Варианты двухкратного ω-продолжения типа $S_1(2E)$ и $S_1(2R)$ невозможны по тем же причинам, что и варианты $S_1(1E)$ и $S_1(1R)$.

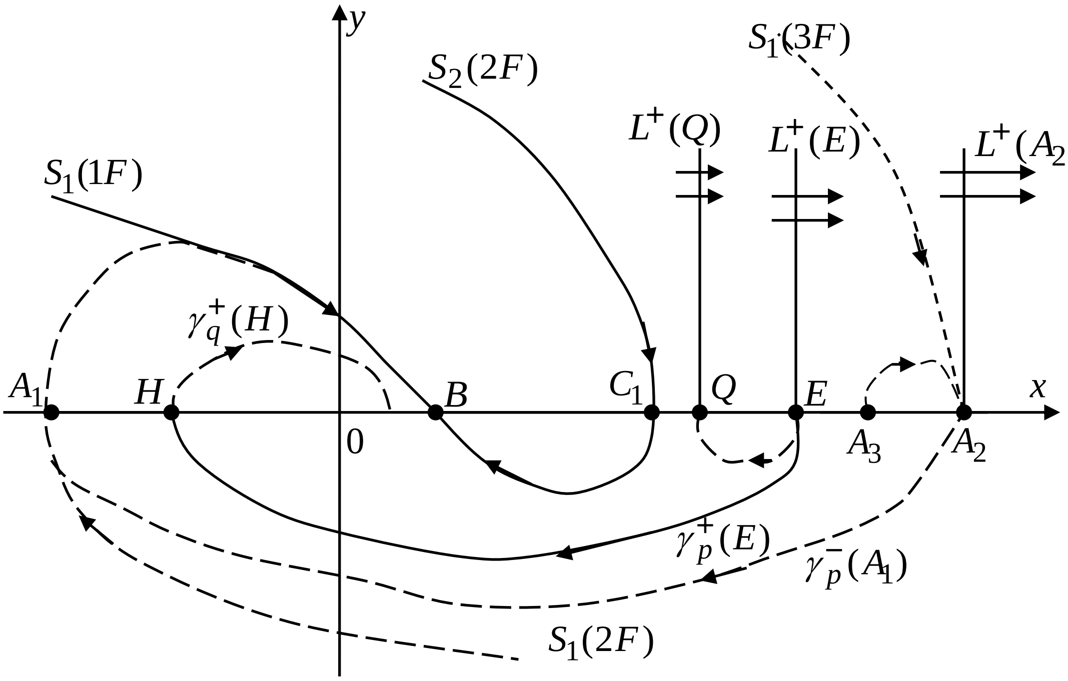

Рис.5.2. Пояснение к теореме 5.2.

В точности так, как это сделано в теореме 1 показывается, что и вариант $S_1(1E+1I)$ тоже невозможен, поскольку приводит к наличию второй порождающей седловой точки в составе границы Γ связной компоненты K. Значит, в состав границы Γ должна войти либо $S_1(2F)$, и тогда мы получим связную компоненту $K_q(2F,2F)$, либо сепаратриса S_1 имеет трехкратное ω-продолжение через точку A_2, где точка A_2 располагается на положительной полуоси $0x$. Эта точка будет правее точки C_1, так как траектория p-системы не может пересекать в G^- траекторию q-системы справа налево. Вместе с левосторонней граничной точкой A_2 в состав границы Γ должна входить ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(A_2)$ целиком или частично. Предположение, что полутраектория $\gamma_q^-(A_2)$ имеет разделяющую точку R, приводит к противоречию с тем, что в состав границы Γ должна входить и α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(R)$. Вариант $S_1(3E)$ невозможен, поскольку непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(A_2)$ не может пересечь справа налево ω-непродолжаемую ω-неограниченную в G^+ полутраекторию $\gamma_p^-(C_1)$.

Покажем, что трехкратное ω-продолжение типа $S_1(2E+1I)$ влечет за собой появление второй порождающей седловой точки в составе границы Γ. Предположим, что в состав границы Γ входит дуга A_3A_2 ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^-(A_2)$, где точка A_3 является ее начальной граничной точкой и расположена справа от точки C_1 (рис.5.2). Поскольку точка A_3 является правосторонней граничной точкой оси $0x$ и точка C_1 является правосторонней граничной точкой оси $0x$, то на интервале (C_1A_3) существует левосторонняя граничная точка E, такая что отрезок $[EA_3]$ принадлежит связной компоненте K. Так как область, ограниченная лучом $L^+(E)$ (справа от него), отрезком $[EA_3]$ оси $0x$, сепаратрисой $S_1(2E+1I)$ и серапатрисой $S_2(2F)$, принадлежит множеству неуправляемости, то в состав границы Γ входит ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(E)$ целиком или частично, а не α- непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(E)$. Если же предположить, в состав границы Γ входит ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(E)$ целиком или частично, то это будет означать, что в состав границы $\gamma_q^-(E)$ связной компоненты K входит еще одна порождающая седловая точка. Значит, в состав границы $\gamma_q^-(E)$ входит α- непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(E)$, которая по условию эффективности торможения должна иметь конечную граничную точку. Предположим, что конечная граничная точка Q расположена на интервале (C_1E) оси $0x$. Нетрудно видеть, что область, ограниченная лучом $L^+(Q)$(справа от него), дугой EQ полутраектории $\gamma_p^+(E)$, отрезком $[EA_3]$ оси $0x$, сепаратрисой $S_1(2E+1I)$ и серапатрисой $S_2(2F)$, принадлежит множеству неуправляемости. Это несовместимо с тем, что точка E является левосторонней граничной точкой. На интервале (BC_1) конечная граничная точка располагаться не может, так как если полутраектория $\gamma_p^+(E)$ пересечет дугу C_1B сепаратрисы S_2, то точка пересечения должна стать для полутраектории $\gamma_p^+(E)$ разделяющей точкой. На интервале (0B) конечная граничная точка располагаться не может в силу выбора точки B. Таким образом, полутраектория $\gamma_p^+(E)$ будет иметь конечную граничную точку H на интервале (A_10). В силу свойства 4.4 вместе с точкой H в состав границы Γ α- непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(H)$ может войти лишь при условии, что ее конечная граничная точка будет лежать на интервале $(0B)$ оси $0x$, но это противоречит выбору точки B. Значит, в состав границы Γ войдет ω-непродолжаемая в

G^+ полутраектория $\gamma_p^-(H)$, а это и означает, что точка H становится второй порождающей седловой точкой. Таким образом, трехкратное ω-продолжение сепаратрисы S_1, не приводящее к наличию еще одной порождающей седловой точки в составе границы Γ, возможно только в виде $S_1(3F)$, и в этом случае мы имеем связную компоненту типа $K_q(3F,2F)$.

Лемма 5.1. Пусть

- точка B положительной полуоси $0x$ является порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты K и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой;
- сепаратриса S_2 имеет как минимум m-кратное ω-продолжение типа $S_2(mE)$ через некоторые начальные граничные точки $C_1,C_2,...,C_m$, где m – натуральное число;
- сепаратриса S_1 имеет как минимум $(m+1)$-кратное ω-продолжение типа $S_1(m+1)E)$ через некоторые начальные граничные точки $A_1,A_2,...,A_{m+1}$.
- при нечетном значении m в состав границы Γ связной компоненты K входит некоторая дуга $D_{m+1}D_m$ α- непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(D_{m+1})$, где точка D_{m+1} лежит на интервале (C_mA_{m+1}), а точка D_m лежит на интервале (A_mC_{m-1}) (здесь под точкой C_0 понимается точка 0);
- при четном значении m в состав границы Γ связной компоненты K входит некоторая дуга $D_{m+1}D_m$ α- непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^+(D_{m+1})$, где точка D_{m+1} лежит на интервале $(A_{m+1}C_m)$, а точка D_m лежит на интервале $(C_{m-1}A_m)$.

Тогда в состав границы Γ связной компоненты K входит еще одна порождающая седловая точка.

Доказательство леммы проведем с помощью метода математической индукции. Пусть $m=1$ и в состав границы Γ входят как минимум $S_2(1E)$ и $S_1(2E)$, а также дуга D_2D_1 α- непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(D_2)$, где точка D_2 лежит на интервале (C_1A_2), а точка D_1 лежит на интервале (A_10) (рис.5.3).

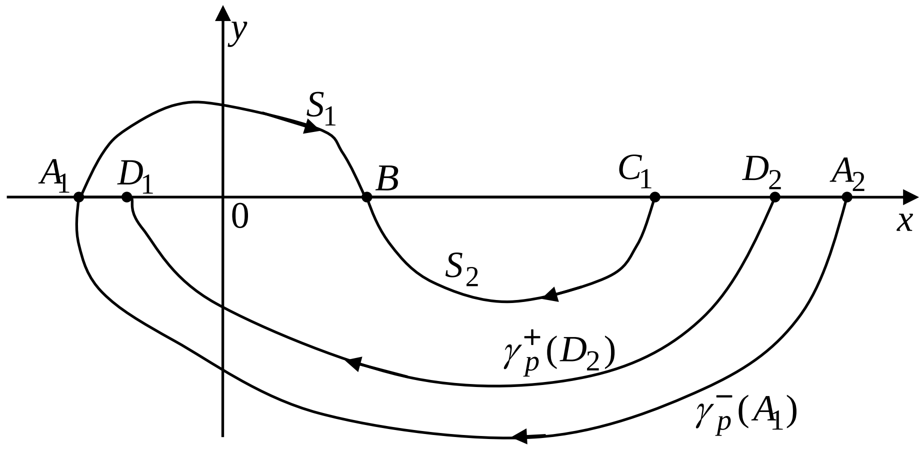

Рис.5.3. Пояснение к лемме 5.1 (случай $m=1$).

Вместе с правосторонней граничной точкой D_1 в состав границы Γ связной компоненты K может входить либо α- непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D_1)$, либо ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(D_1)$. Но в первом случае в соответствии с леммой 5.3 α- непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D_1)$ должна иметь конечную граничную точку на интервале $(0B)$ оси $0x$, что противоречит статусу точки B. Во втором случае точка D_1 становится второй порождающей седловой точкой в составе границы Γ.

Пусть $m=2$ и в состав границы Γ входят как минимум $S_2(2E)$ и $S_1(3E)$. Тогда 2-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга C_2C_1 ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_p^-(C_1)$; 3-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является дуга A_3A_2 ω-непродолжаемой в G^+полутраектории $\gamma_q^-(A_2)$, 2-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является дуга A_2A_1 ω-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$. Пусть в состав границы Γ входит также дуга D_3D_2 α- непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^+(D_3)$, где точка D_3 лежит на интервале (A_3C_2), а точка D_2 лежит на интервале (C_1A_2) (рис.5.4).

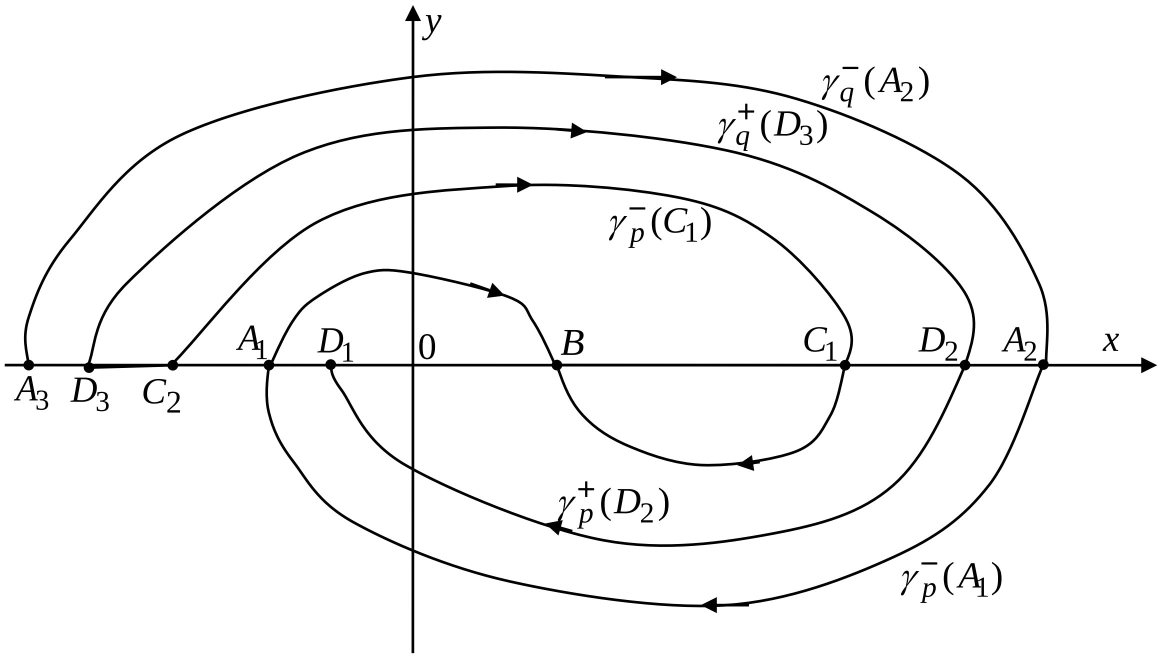

Рис.5.4. Пояснение к лемме 5.1 (случай m=2).

Вместе с левосторонней граничной точкой D_2 в состав границы Γ связной компоненты K может входить либо ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_2)$, либо α- непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(D_2)$. Но в первом случае точка D_2 является второй порождающей седловой точкой в составе границы Γ. Во втором случае α- непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(D_2)$, в соответствии со свойством 4.4, должна иметь конечную граничную точку D_1 на отрицательной полуоси $0x$ правее точки D_3. Нетрудно видеть, что точка D_1D₁ может располагаться только на интервале (A₁O) оси $0x$, так как α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(D_2)$ не может пересечь ω-непродолжаемую в G^- полутраекторию $\gamma_p^-(A_1)$. Это означает (как мы видели для значения $m=1$), что точка D_1 будет второй порождающей седловой точкой в составе границы Γ.

Предположим, что утверждение леммы 5.1 справедливо для некоторого натурального $m \geq 3$. Докажем, что оно справедливо и для $m+1$. Пусть, для определенности, $m+1$– четное число, то есть m – нечетное число. Тогда ($m+1$)-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга $C_{m+1}C_m$ ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_p^-(C_m)$, m-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга C_mC_{m-1} ω-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_q^-(C_{m-1})$; $(m+2)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы

S_1 является дуга $A_{m+2}A_{m+1}$ ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^-(A_{m+1})$, $(m+1)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является дуга $A_{m+1}A_m$ ω-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^-(A_m)$. Пусть дуга $D_{m+2}D_{m+1}$ α- непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^-(D_{m+2})$ входит в состав границы Γ связной компоненты K. Точка D_{m+2} располагается на интервале $(A_{m+2}C_{m+1})$ отрицательной полуоси $0x$, а точка D_{m+1} располагается на интервале (C_mA_{m+1}) положительной полуоси $0x$ (рис.5.5).

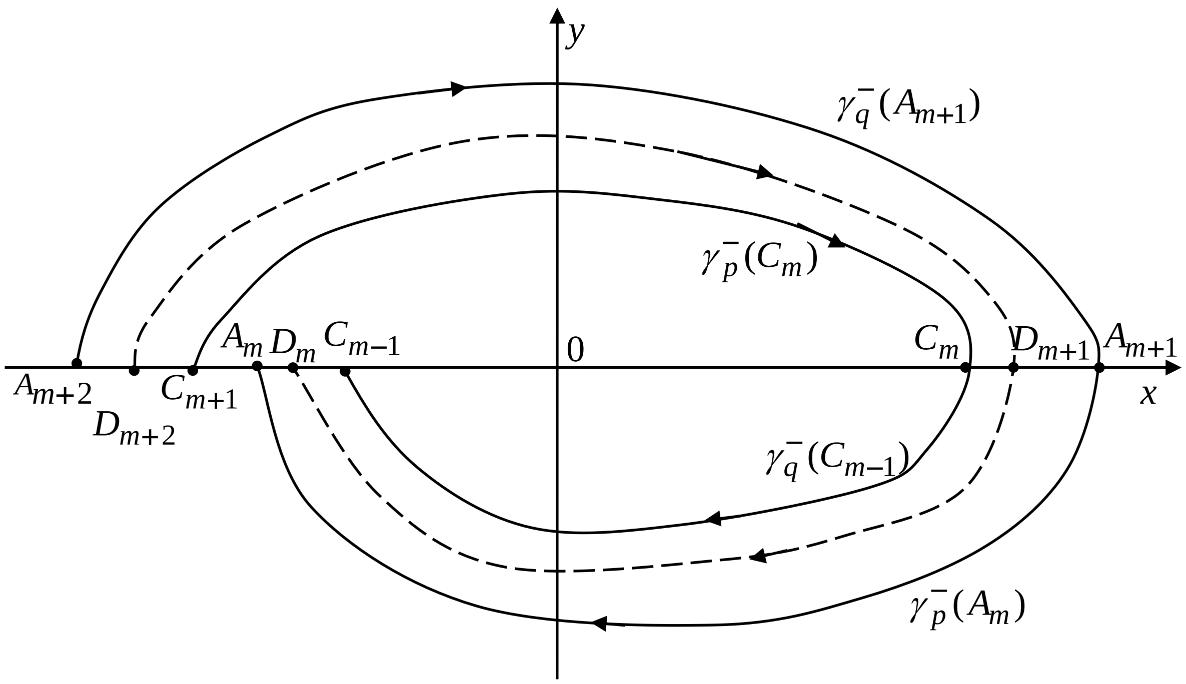

Рис.5.5. Пояснение к лемме 5.1 (m -нечетное).

Вместе с левосторонней граничной точкой D_{m+1} в состав границы Γ связной компоненты K может входить либо ω- непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_{m+1})$, либо α- непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(D_{m+1})$. В первом случае точка D_{m+1} становится второй порождающей седловой точкой в составе границы Γ. Во втором случае (в соответствии со свойством 4.4) α- непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(D_{m+1})$ должна иметь конечную граничную точку D_m на отрицательной полуоси $0x$. Нетрудно видеть, что точка D_m будет располагаться на интервале (A_mC_{m-1}) отрицательной полуоси $0x$. Действительно, полутраектория $\gamma_p^+(D_{m+1})$ не может пересекать дугу $A_{m+1}A_m$ ω-непродолжаемой в G^- полутраектории

$\gamma_p^-(A_m)$. Если же предположить, что она пересекает дугу C_mC_{m-1} ω-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_q^-(C_{m-1})$ в некоторой точке R, то в соответствии с леммой 1.1 эта точка должна быть разделяющей для полутраектории $\gamma_p^+(D_{m+1})$. Итак, в состав границы Γ связной компоненты K входит дуга $D_{m+1}D_m$ α- непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(D_{m+1})$. Это значит, что выполняются условия леммы 5.1 для нечетного значения m, следовательно, в состав границы Γ связной компоненты K входит еще одна порождающая седловая точка. Аналогичным образом доказывается лемма 5.5 и для четного значения m.

Лемма 5.2. Пусть точка B положительной полуоси $0X$ является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты K и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если сепаратриса S_2 имеет как минимум m-кратное ω-продолжение типа S_2(mE) через некоторые начальные граничные точки $C_1, C_2, ..., C_m$, где m – натуральное число, $m \geq 2$, то сепаратриса S_1 имеет как минимум (m-1)-кратное ω-продолжение типа $S_1((m-1)E)$ через некоторые начальные граничные точки $A_1, A_2, ..., A_{m-1}$.

Доказательство проведем с помощью метода полной математической индукции. Проверим справедливость утверждения для $m=2$. Итак, пусть в состав границы Γ связной компоненты K входит как минимум $S_2(2E)$, то есть некоторая дуга C_1B ω-непродолжаемой в G^- серапатрисы S_2 и некоторая дуга C_2C_1 ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_p^-(C_1)$, где точка C_2 лежит на отрицательной полуоси $0x$ (рис.5.6).

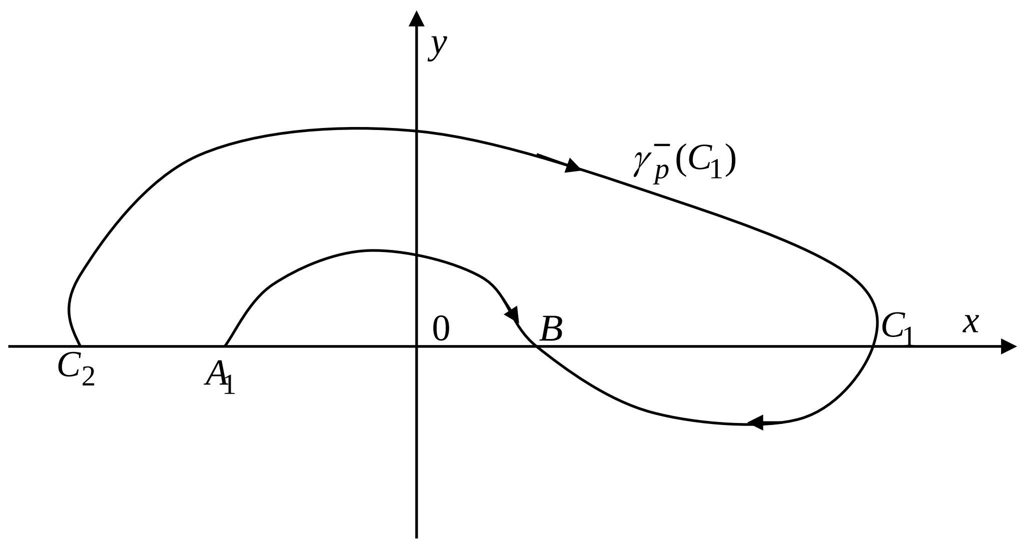

Рис.5.6. Пояснение к лемме 5.2. (m =2).

Так как точка B является порождающей седловой точкой q-системы, то в состав границы Γ входит также ω-непродолжаемая в G^{+} сепаратриса S_1 целиком или частично. Заметим, что в состав границы Γ не может входить $S_1(1F)$. Действительно, в этом случае ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^{+} сепаратриса S_1 обязательно пересечет дугу C_2C_1 в некоторой точке R. В соответствии с леммой 1.1 эта точка должна быть разделяющей для сепаратрисы S_1, что противоречит нашему предположению. Аналогично тому, как это сделано в теореме 5.1 , показывается, что в состав границы Γ не может входить и $S_1(1R)$. Итак, в состав границы Γ должна войти как минимум $S_1(1E)$, то есть некоторая дуга A_1B ω-непродолжаемой в G^{+} сепаратрисы S_1, где точка A_1 лежит на отрицательной полуоси $0x$ (в силу предположения относительно точки B).

Предположим теперь, что утверждение леммы справедливо для некоторого натурального числа $m = n+2 \geq 2$. Докажем, что оно справедливо и для $m+1 = n+3$. Пусть сепаратриса S_2 имеет как минимум $(n+3)$-кратное ω-продолжение типа $S_2((n+3)E)$ через некоторые начальные граничные точки $C_1, C_2, ..., C_{n+3}$. Это означает, что она имеет как минимум $(n+2)$-кратное ω-продолжение типа $S_2((n+2)E)$ и поэтому сепаратриса S_1 имеет как минимум (n+1)-кратное ω-продолжение типа $S_1((n+1)E)$ через некоторые начальные граничные точки $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$.

Пусть для определенности n (а значит и m) –нечетное число. Тогда n-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга C_nC_{n-1} ω-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_q^{-}(C_{n-1})$, $(n+1)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга $C_{n+1}C_n$ ω-непродолжаемой в G^{+} полутраектории $\gamma_p^{-}(C_n)$, $(n+2)$- кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга $C_{n+2}C_{n+1}$ ω-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_q^{-}(C_{n+1})$, (n+3)-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга $C_{n+3}C_{n+2}$ ω-непродолжаемой в G^{+} полутраектории $\gamma_p^{-}(C_{n+2})$, а $(n+1)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является дуга $A_{n+1}A_n$ ω-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_p^{-}(A_n)$, где правосторонняя граничная точка A_n расположена на интервале $(C_{n+1}C_{n-1})$, а левосторонняя граничная точка A_{n+1} расположена на интервале (C_nC_{n+2}) (рис.5.7). Построив луч $L^{+}(A_{n+1})$, который пересечет дугу $C_{n+3}C_{n+2}$ в некоторой точке B_n , легко убеждаемся в том, что область, ограниченная отрезком $[A_{n+1}B_n]$ луча $L^{+}(A_{n+1})$ (справа от него), дугой B_nB сепаратрисы $S_2((n+3)E)$ и сепаратрисой

$S_1((n+1)E)$, принадлежит множеству неуправляемости. Отсюда следует, что вместе с левосторонней граничной точкой A_{n+1} в состав границы Γ может входить лишь ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(A_{n+1})$ целиком или частично, то есть сепаратриса S_1 имеет $(n+2)$-кратное ω-продолжение. Заметим, прежде всего, что $(n+2)$ -кратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 не может иметь вид $S_1((n+2)F)$ или $S_1((n+2)R)$ по тем же причинам, что и $S_1(1F)$ и $S_1(1R)$ в случае $m=2$.

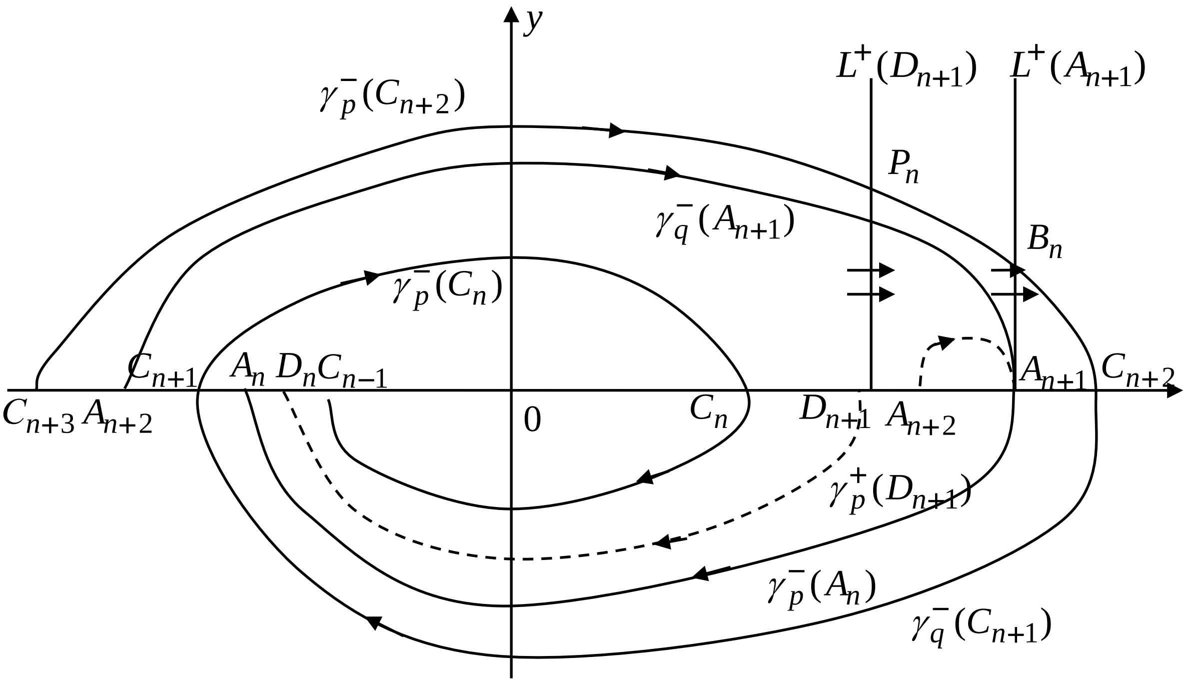

Рис.5.7. Пояснение к лемме 5.2 (m -нечетное).

Таким образом, $(n+2)$ -кратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 может быть лишь некоторая дуга $A_{n+2}A_{n+1}$ ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^-(A_{n+1})$, где точка A_{n+2} является ее начальной граничной точкой. Рассмотрим вариант $(n+2)$-кратного ω-продолжения типа $S_1((n+1)E+1I)$, когда точка A_{n+2} расположена на интервале (C_nA_{n+1}) оси $0x$ (рис.5.7). Поскольку точка A_{n+2} является правосторонней граничной точкой и точка C_n является правосторонней граничной точкой, то на интервале (C_nA_{n+2}) существует левосторонняя граничная точка D_{n+1} такая, что отрезок $[D_{n+1}A_{n+2}]$ принадлежит множеству неуправляемости (и связной компоненте К). Построив луч $L^+(D_{n+1})$, который пересечет дугу $C_{n+3}C_{n+2}$ в некоторой точке P_n, легко убеждаемся в том, что область, ограниченная отрезком $[A_{n+1}P_n]$ луча

L+(D_{n+1}) (справа от него), дугой P_nB сепаратрисы $S_2((n+3)E)$ и сепаратрисой $S_1((n+1)E)$, принадлежит множеству неуправляемости. Это означает, что вместе с левосторонней граничной точкой D_{n+1} в состав границы Γ должна войти ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(D_{n+1})$ целиком или частично. Если при этом в состав границы Γ войдет и ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_{n+1})$, то точка D_{n+1} станет второй порождающей седловой точкой в составе границы Γ. Рассмотрим второй вариант, когда в состав границы Γ войдет α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(D_{n+1})$. Во-первых, заметим, что она обязательно имеет конечную граничную точку D_n, поскольку не может пересечь дугу $A_{n+1}A_n$ полутраектории $\gamma_p^+(A_n)$, являющуюся $(n+1)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_1. Если же допустить, что полутраектория $\gamma_p^+(D_{n+1})$ пересекает дугу C_nC_{n-1} полутраектории $\gamma_q^-(C_{n-1})$ в некоторой точке R, то в соответствии с леммой 1.1 эта точка должна быть разделяющей для полутраектории $\gamma_p^-(D_{n+1})$. Аналогично тому, как это сделано в теореме 2, показывается, что эта точка D_n не может располагаться на интервале (C_nD_{n+1}) оси $0x$. Значит, конечная граничная точка D_n располагается на интервале (A_nC_{n-1}) отрицательной полуоси $0x$ (рис.5.7).

Таким образом, выполнены все условия леммы 5.1 для нечетного значения натурального числа n, то есть в случае $(n+2)$-кратного ω-продолжения типа $S_1((n+1)E+1I)$ в границу Γ связной компоненты K обязательно войдет вторая порождающая седловая точка. Следовательно, начальная граничная точка A_{n+2} ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^-(A_{n+1})$ расположена на интервале $(C_{n+3}C_{n+1})$ отрицательной полуоси $0x$, так как полутраектория $\gamma_q^-(A_{n+1})$ не может пересекать в полуплоскости G^+ дугу $C_{n+1}C_n$ полутраектории $\gamma_p^-(C_n)$ справа налево. Если же полутраектория $\gamma_q^-(A_{n+1})$ пересечет дугу $C_{n+3}C_{n+2}$ полутраектории $\gamma_p^-(C_{n+2})$ в некоторой точке R, то вследствие леммы 1.1 эта точка должна быть разделяющей для $\gamma_q^-(A_{n+1})$, а входить в состав границы Γ она может лишь при условии, что точка R является разделяющей и для полутраектории $\gamma_p^-(C_{n+2})$. Мы показали, что сепаратриса S_1 имеет как минимум $(n+2)$-кратное ω-продолжение типа $S_1((n+2)E)$. То есть, если сепаратриса S_2 имеет как минимум $(m+1)$-кратное ω-продолжение типа $S_2((m+1)E)$, то сепаратриса S_1 имеет как минимум m-кратное ω-продолжение типа $S_1(mE)$, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом утверждение леммы доказывается и для случая четного натурального числа m.

Теорема 5.3. Пусть точка B является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты K множества неуправляемости и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Γ связной компоненты K входит $S_2(mF), m = 2,3,..,$ то связная компонента K имеет тип либо $K_q((m-1)F, mF)$, либо $K_q(mF, mF)$, либо $K_q((m+1), mF)$.

Справедливость утверждения теоремы 5.3 для $m = 2$ доказана в теореме 5.2.

Докажем, что утверждение теоремы верно для любого натурального m ≥3. Итак, пусть в состав границы Γ связной компоненты K входит $S_2(mF)$.

Если m – нечетное число, то $(m-2)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга $C_{m-2}C_{m-3}$ ω-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_q^-(C_{m-3})$, где точка C_{m-2} расположена на положительной полуоси $0x$, а точка C_{m-3} расположена на отрицательной полуоси $0x$, $(m-1)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга $C_{m-1}C_{m-2}$ ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_p^-(C_{m-2})$, где точка C_{m-1} расположена на отрицательной полуоси $0x$ левее точки C_{m-3}, m-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^- полутраектория $\gamma_q^-(C_{m-1})$. Отметим, что в случае $m = 3$ точка C_0 означает точку B. В силу леммы 5.2 сепаратриса S_1 имеет как минимум $(m-2)$-кратное ω-продолжение типа $S_1((m-2)E)$ через некоторые начальные граничные точки $A_1,...,A_{m-2}$. В частности, в состав границы Γ входит дуга $A_{m-2}A_{m-3}$ ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^-(A_{m-3})$, где точка A_{m-2} расположена на отрицательной полуоси $0x$ правее точки C_{m-1}, а точка A_{m-3} расположена на положительной полуоси $0x$ левее точки C_{m-2} (рис.5.8). Отметим, что в случае $m = 3$ точка A_0 означает точку B. Проведем луч $L^-(A_{m-2})$, который пересечет полутраекторию $\gamma_q^-(C_{m-1})$ в некоторой точке P, если полутраектория $\gamma_q^-(C_{m-1})$ не имеет вертикальной асимптоты левее луча $L^-(A_{m-2})$. В обоих случаях мы получим область, ограниченную лучом $L^-(A_{m-2})$ (слева от него) или его отрезком $[A_{m-2}P]$, сепаратрисой $S_2(mF)$ или ее дугой PB и сепаратрисой $S_1((m-2)E)$, принадлежащую множеству неуправляемости. Это означает, что в состав границы Γ должна входить ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^-(A_{m-2})$ полностью или частично, то есть сепаратриса S_1 имеет $(m-1)$-кратное ω-продолжение. Аналогично тому, как это сделано в теореме 1, показывается, что вариант $S_1((m-1)R)$ приводит к противоречию с тем, что в состав Γ входит еще и полутраектория $\gamma_q^+(R)$, а вариант $S_1((m-2)E+1I)$ приводит к наличию второй порождающей точки в составе границы Γ. Если $(m-1)$-кратное ω-продолжение имеет тип $S_1((m-1)F)$, то мы получим связную компоненту $K_q((m-1)F, mF)$. В противном случае сепаратриса S_1 имеет как минимум ω-продолжение типа $S_1((m-1)E)$, то есть, в состав границы Γ входит некоторая дуга $A_{m-1}A_{m-2}$ ω-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^-(A_{m-2})$, при этом точка A_{m-1} будет расположена на положительной полуоси $0x$ правее точки C_{m-2}, поскольку полутраектория $\gamma_p^-(A_{m-2})$ не может пересечь в полуплоскости G^- дугу $C_{m-2}C_{m-3}$ полутраектории $\gamma_q^-(C_{m-3})$ справа налево (рис.5.8). Отметим, что полутраектория $\gamma_p^-(A_{m-2})$ не может также пересечь полутраекторию $\gamma_q^-(C_{m-1})$ в некоторой точке R, ибо в этом случае точка R должна быть разделяющей для обеих траекторий. Проведя луч $L^+(A_{m-1})$, мы получим область, ограниченную лучом $L^+(A_{m-1})$ (справа от него), сепаратрисой $S_1((m-1)E)$ и сепаратрисой $S_2(mF)$, принадлежащую множеству неуправляемости. Следовательно, в состав границы Γ должна войти ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(A_{m-1})$ целиком или частично, то есть сепаратриса S_1 имеет m-кратное ω-продолжение.

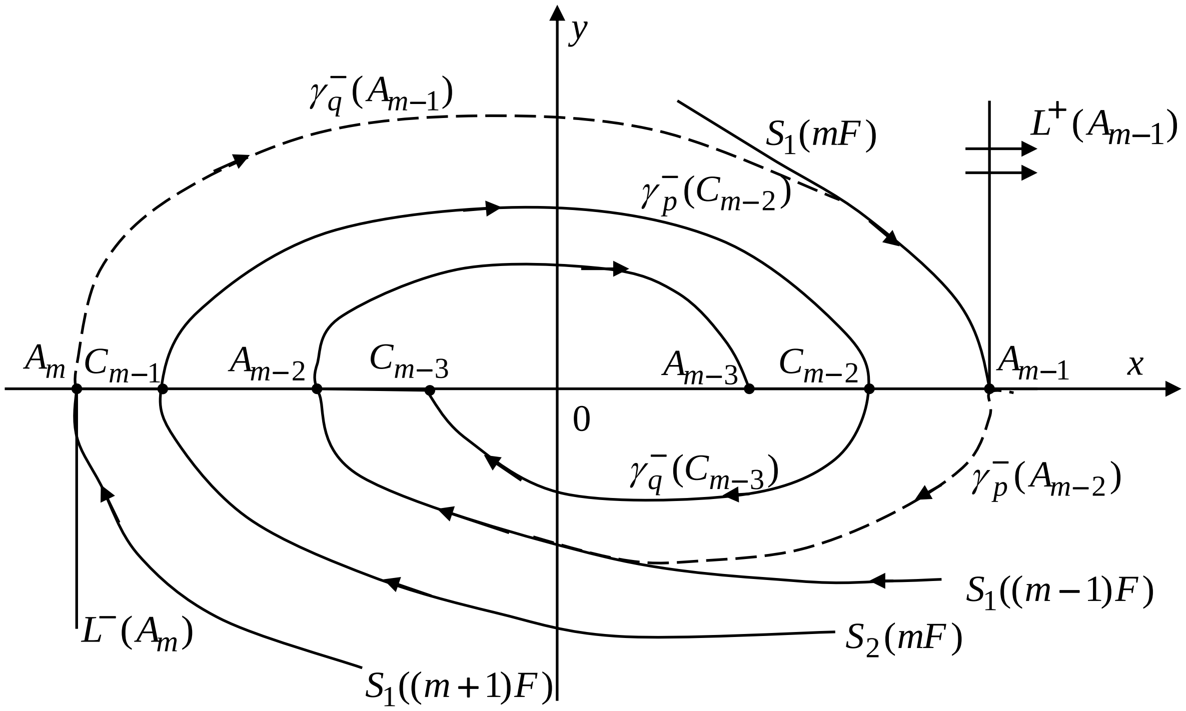

Рис.5.8. Пояснение к теореме 5.3.

Аналогично тому, как это сделано в теореме 2, показывается, что вариант $S_1(mR)$ приводит к противоречию с тем, что в состав Γ входит еще и полутраектория $\gamma_q^+(R)$, а вариант $S_1((m-1)E+1I)$ приводит к наличию второй порождающей точки в составе границы Γ. Если m-кратное ω-продолжение имеет тип $S_1(mF)$, то мы получим связную компоненту $K_q(mF,mF)$. В противном случае сепаратриса S_1 имеет ω-продолжение как минимум типа $S_1(mE)$, то есть в состав границы Γ входит некоторая дуга A_mA_{m-1} ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^-(A_{m-1})$, при этом точка A_m расположена на отрицательной полуоси $0x$ левее точки $C_{m-1}C_{m-1}$ (рис.5.8), так как полутраектория $\gamma_q^-(A_{m-1})$ не может пересечь в верхней полуплоскости справа налево дугу $C_{m-1}C_{m-2}$ полутраектории $\gamma_p^-(C_{m-2})$. Построив луч $L^-(A_m)$, мы получим область, ограниченную лучом $L^-(A_m)$ (слева от него), сепаратрисой $S_1(mE)$ и сепаратрисой $S_2(mF)$, принадлежащую множеству неуправляемости. Это означает, что в состав границы Г должна войти ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^-(A_m)$, то есть сепаратриса S_1 имеет $(m+1)$-кратное ω-продолжение. Аналогично тому, как это сделано в теореме 1, можно показать, что вариант $S_1((m+1)R)$ приводит к противоречию, поскольку в состав Γ должна входить еще и полутраектория $\gamma_q^+(R)$, а вариант $S_1((m+1)E+1I)$ приводит к наличию второй порождающей точки в составе границы Γ. Вариант продолжения $S_1((m+1)E)$ тоже невозможен, поскольку полутраектория $\gamma_p^-(A_m)$ не может пересечь справа налево в G^- полутраекторию $\gamma_q^-(C_{m-1})$, являющуюся m-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2. Следовательно, $(m+1)$-кратное ω-продолжение имеет тип $S_1((m+1)F)$, и мы получаем связную компоненту $K_q((m+1)F,mF)$.

Теорема 5.4. Пусть точка B является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты K множества неуправляемости и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Γ связной компоненты K входит $S_2(mE), m$–натуральное число, то связная компонента K имеет тип $K_q((m+1)E+1I,mE)$.

Докажем утверждение теоремы для $m=1$. Пусть в состав границы Γ связной компоненты K входит $S_2(1E)$, то есть некоторая дуга C_1B ω-непродолжаемой в G^- серапатрисы S_2 и непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(C_1)$. В силу условия эффективности торможения α-

непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(C_1)$ должна иметь конечную граничную точку D_2, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. Вместе с точкой D_2 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_2)$, ибо тогда точка D_2 становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α- непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(D_2)$. В силу условия эффективности торможения полутраектория $\gamma_p^+(D_2)$ должна иметь конечную граничную точку D_1, которая будет правосторонней граничной точкой оси $0x$. В соответствии со свойством 4.4 точка D_1 не может располагаться на интервале (C_1D_2) оси $0x$. Точка D_1 не может располагаться на интервале (BC_1) оси $0X$, так как траектория р-системы не может пересекать траекторию q-системы в G^- слева направо. Точка D_1 не может также располагаться на интервале $(0B)$ оси $0x$ в силу выбора точки B. Значит, точка D_1 располагается на отрицательной полуоси $0x$. Вместе с точкой D_1 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(D_1)$ целиком или частично, ибо тогда точка D_1 становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D_1)$. В силу условия эффективности торможения α- непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D_1)$ должна иметь конечную граничную точку F, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. В силу свойства 4.4 точка F может располагаться лишь на положительной полуоси $0x$.

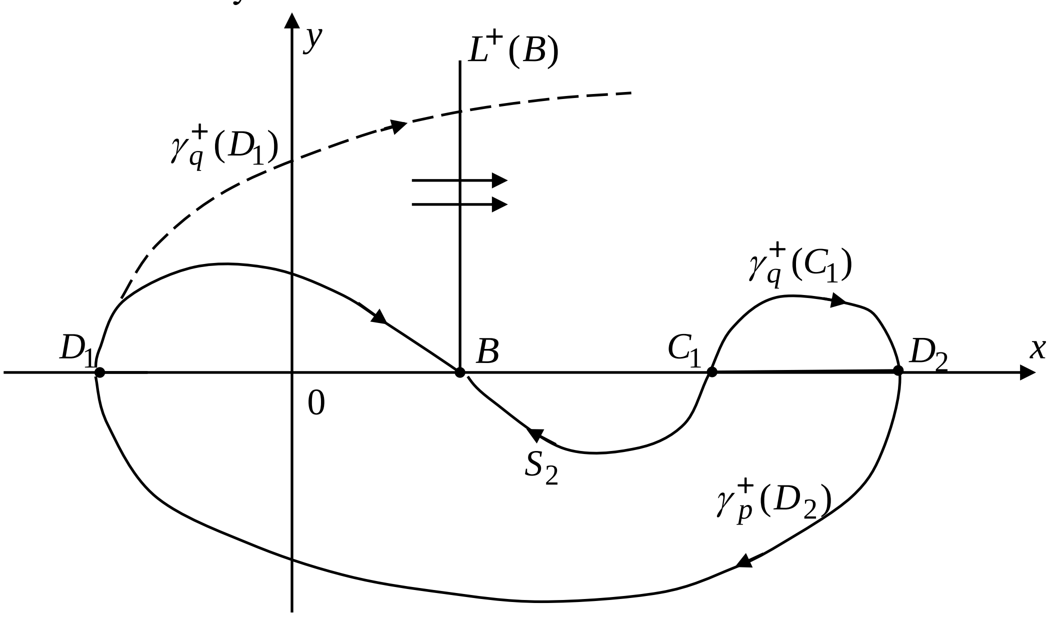

Рис.5.9. Пояснение к теореме 5.4 (m=1).

Точка F не может располагаться на интервале $(0B)$ оси $0x$ в силу выбора точки В. Предположение о том, что точка F лежит правее точки B, приведет к противоречию с принадлежностью полутраектории $\gamma_q^+(D_1)$ границе Γ. Действительно, построив луч $L^+(B)$, который пересечет полутраекторию $\gamma_q^+(D_1)$ в некоторой точке T, мы получим область, расположенную вне замкнутой кривой, образованной отрезком BT луча $L^+(B)$ (справа от него), дугой D_1T полутраектории $\gamma_q^+(D_1)$, дугой D_2D_1 полутраектории $\gamma_p^+(D_2)$, дугой C_1D_2 полутраектории $\gamma_q^+(C_1)$ и дугой C_1B сепаратрисы S_2 (рис.5.9), и принадлежащую множеству неуправляемости. Остается единственный вариант, состоящий в том, что точка F совпадает с точкой B, в результате чего получается связная компонента типа $K_q(2E+1I),1E)$.

Докажем теперь, что утверждение теоремы верно для $m=2$. Пусть в состав границы Γ связной компоненты K входит $S_2(2F)$, то есть некоторая дуга C_1B ω-непродолжаемой в G^- серапатрисы S_2, дуга C_2C_1 непродолжаемой в G^+полутраектории $\gamma_p^-(C_1)$ и α- непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(C_2)$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(C_2)$ должна иметь конечную граничную точку D_3, которая будет правосторонней граничной точкой оси $0x$ (рис.5.10). Вместе с точкой D_3 в состав границы Γдолжна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(D_3)$, ибо тогда точка D_3 становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α- непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_p^+(D_3)$. В силу условия эффективности торможения полутраектория $\gamma_q^+(D_3)$ должна иметь конечную граничную точку D_2, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. В соответствии со свойством 4.4 точка D_2 не может располагаться на интервале (D_3C_2) оси $0x$.

Если полутраектория $\gamma_q^+(D_3)$ пересечет дугу C_2C_1 непродолжаемой в G^+полутраектории $\gamma_p^-(C_1)$ в некоторой точке R, то эта точка должна стать для полутраектории $\gamma_q^+(D_3)$ разделяющей в силу леммы 1.1. Значит, точка D_2 располагается на положительной полуоси $0x$ правее точки C_1. Вместе с точкой D_2 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_2)$, ибо тогда точка D_2 становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α- непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_p^{+}(D_2)$. В силу условия эффективности торможения полутраектория $\gamma_p^{+}(D_2)$ должна иметь конечную граничную точку D_1, которая будет правосторонней граничной точкой оси $0x$. В силу свойства 4.4 точка D_1 может располагаться лишь на отрицательной полуоси $0x$.

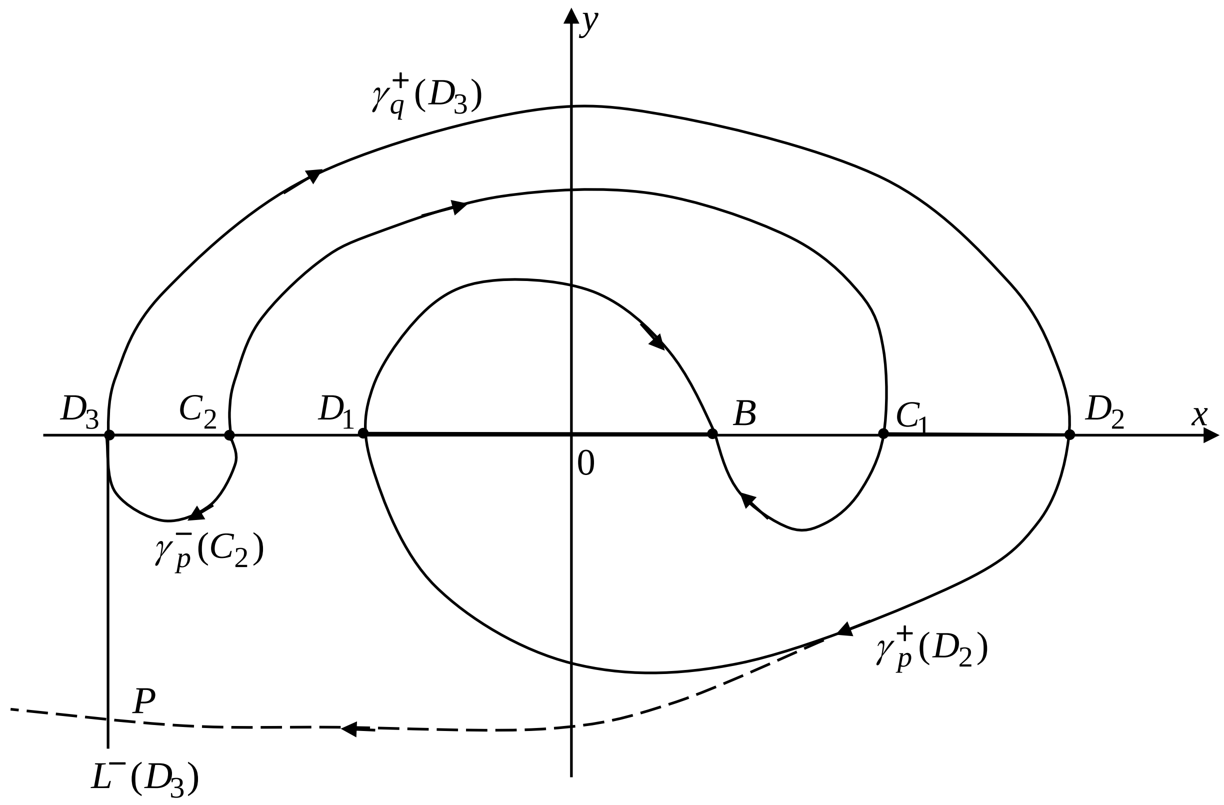

Рис.5.10. Пояснение к теореме 5.4 (m=2).

Но поскольку полутраектория $\gamma_p^{+}(D_2)$ не может пересекать полутраекторию $\gamma_p^{+}(C_2)$, то точка D_1 будет расположена либо левее точки D_3, либо на интервале $(C_2 0)$. Но первый случай приводит к противоречию. Построив луч $L^{-}(D_3)$, который пересечет полутраекторию $\gamma_p^{+}(D_3)$ в некоторой точке P, мы получим область, расположенную вне замкнутой кривой, образованной отрезком $[D_3 P]$ луча $L^{-}(D_3)$, дугой $D_3 D_2$ полутраектории $\gamma_q^{+}(D_3)$ и дугой $D_2 P$ полутраектории $\gamma_p^{+}(D_2)$. Эта область принадлежит множеству неуправляемости, а значит часть $\gamma_p^{+}(P)$ полутраектории $\gamma_p^{+}(D_2)$ не может входить в состав границы Γ.

Во втором случае вместе с точкой D_1 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_p^{-}(D_1)$ целиком или частично , ибо тогда точка D_1 становится второй порождающей точкой в составе границы Γ

связной компоненты K, а непродолжаемая в G^{+}полутраектория $\gamma_q^{+}(D_1)$. В силу условия эффективности торможения α- непродолжаемая в G^{+}полутраектория $\gamma_q^{+}(D_1)$ должна иметь конечную граничную точку F, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. Эта точка не может располагаться правее точки C_1, поскольку полутраектория $\gamma_q^{+}(D_1)$ не может пересечь в G^{+} дугу C_2C_1 полутраектории $\gamma_p^{-}(C_1)$. В силу свойства 4.4 точка F не может располагаться лишь на интервале $(D_1 0)$ отрицательной полуоси $0x$. Точно так же, как выше доказано для $m=1$, доказывается, что точка F совпадает с точкой B. Следовательно, связная компонента имеет тип $K_q(3E+1I,2E)$.

Докажем теперь, что утверждение теоремы верно для любого натурального числа $m=n+2\geq 2$. Пусть в состав границы Γ связной компоненты K входит $S_2(mE)$, то есть $S_2((n+2)E)$. При нечетном m (и нечетном n $(n+2)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга $C_{n+2}C_{n+1}$ ω-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_q^{-}(C_{n+1})$, $(n+1)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга $C_{n+1}C_n$ ω-непродолжаемой в G^{+}полутраектории $\gamma_p^{-}(C_n)$ и n-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_2 является дуга C_nC_{n-1} ω-непродолжаемой в G^{-}полутраектории $\gamma_q^{-}(C_{n-1})$. В соответствии с леммой 5.2 сепаратриса S_1 имеет как минимум $(n+1)$)-кратное ω-продолжение типа $S_1((n+1)E)$.

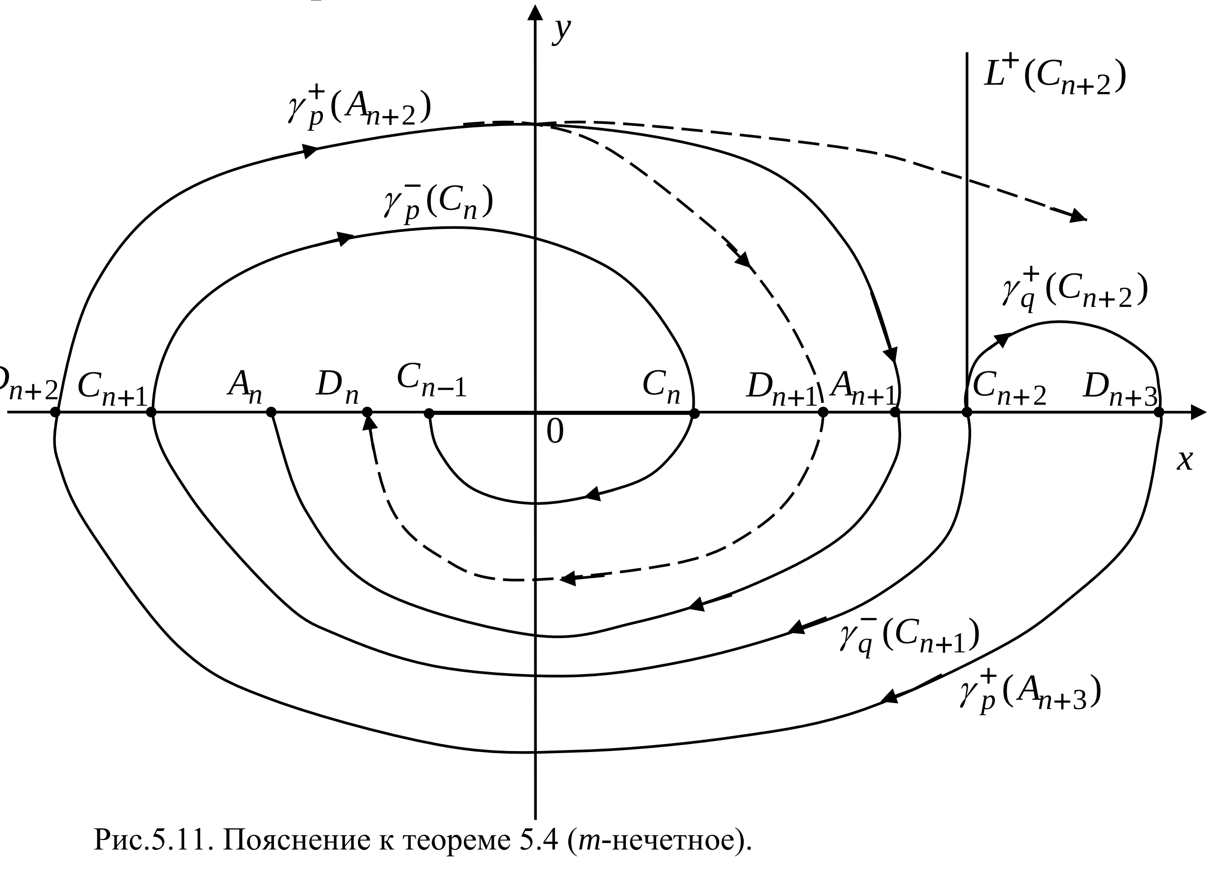

Рис.5.11. Пояснение к теореме 5.4 (m-нечетное).

При нечетном m $(n+1)$-кратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является дуга $A_{n+1}A_n$ ω-непродолжаемой в G^-полутраектории γ_p-(A_n) , где точка A_n расположена на интервале $(C_{n+1}C_{n-1})$, а точка A_{n+1} расположена на интервале (C_n,C_{n+2}) оси $0x$ (рис.5.11). В состав границы Γ связной компоненты K входит также α- непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_q^+(C_{n+2})$, которая в силу условия эффективности торможения имеет конечную граничную точку D_{n+3}, являющуюся левосторонней граничной точкой. Вместе с точкой D_{n+3} в состав границы Γ входит не ω-непродолжаемая в в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_{n+3})$, ибо тогда точка D_{n+3} становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α- непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(D_{n+3})$. В силу условия эффективности торможения полутраектория $\gamma_p^+(D_{n+3})$ должна иметь конечную граничную точку D_{n+2} , которая будет правосторонней граничной точкой оси $0x$. Так же, как для $m=1$, показывается, что точка D_{n+2} не может располагаться на интервале (C_{n+2},D_{n+3}) полуоси $0x$. Полутраектория $\gamma_p^+(D_{n+3})$ не может пересечь полутраекторию γ_q-(C_{n+1}) в некоторой точке R, ибо в этом случае эта точка должна стать разделяющей для полутраектории $\gamma_p^+(D_{n+3})$ в силу леммы 1.1. Значит, точка D_{n+2} будет расположена на отрицательной полуоси $0x$ левее точки C_{n+1}. Вместе с точкой D_{n+2} в состав границы Γдолжна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(D_{n+2})$ целиком или частично , ибо тогда точка D_{n+2} становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_q^+(D_{n+2})$. В силу условия эффективности торможения α- непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D_{n+2})$ должна иметь конечную граничную точку D_{n+1} , которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. В силу свойства 4.4 точка D_{n+1} должна располагаться на положительной полуоси $0x$. Покажем, что точка D_{n+1} должна совпадать с точкой A_{n+1}. Предположим, что точка D_{n+1} расположена правее точки A_{n+1}. Проведем луч $L^+(A_{n+1})$, который пересечет полутраекторию $\gamma_q^+(D_{n+2})$ в некоторой точке P. В результате мы получим область, расположенную вне замкнутой кривой, ограниченной отрезком $[A_{n+1}P]$ луча $L^+(A_{n+1})$, сепаратрисой $S_1((n+1)E)$, сепаратрисой $S_2((n+2)E)$, дугой $C_{n+2}D_{n+3}$ полутраектории $\gamma_q^+(C_{n+2})$, дугой $D_{n+3}D_{n+2}$ полутраектории $\gamma_p^+(D_{n+3})$ и дугой $D_{n+2}P$ полутраектории $\gamma_q^+(D_{n+2})$ (рис.5.11). Эта область принадлежит множеству неуправляемости, что противоречит тому, что полутраектория $\gamma_q^+(D_{n+2})$ входит в состав границы Γ. Предположим теперь, что точка D_{n+1} расположена левее точки A_{n+1}, то есть на интервале (C_n, A_{n+1}) оси $0x$. Вместе с точкой D_{n+1} в состав границы Γ входит не ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_{n+1})$, ибо тогда точка D_{n+1} становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α- непродолжаемая в G^-полутраектория $\gamma_p^+(D_{n+1})$. В силу условия эффективности торможения полутраектория $\gamma_p^+(D_{n+1})$ должна иметь конечную граничную точку D_n, а по свойству 4.4 эта точка должна располагаться на отрицательной полуоси $0x$, то есть на интервале $(A_n C_{n-1})$. Это означает, что выполнены все условия леммы 5.1.(для нечетного значения n), то есть в составе границы Γ появится еще одна порождающая седловая точка. Таким образом, точка D_{n+1} должна обязательно совпадать с точкой A_{n+1} и мы получаем связную компоненту типа $K_q((n+2)E+1I, mE)$, то есть $K_q((m+1)E+1I, mE)$. Аналогично проводится доказательство и для четного значения m.

Теорема 5.5. Пусть точка B является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты K множества неуправляемости и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Γ связной компоненты K входит $S_2(mR)$, m –натуральное число, то связная компонента K имеет тип $K_q((m+1)E+2R, mR)$.

Докажем утверждение теоремы для $m=1$. Пусть в состав границы Γ связной компоненты K входит $S_2(1R)$, то есть некоторая дуга RB ω-непродолжаемой в G^- серапатрисы S_2, где точка R является разделяющей для сепаратрисы S_2. Вместе с точкой R в состав границы Γ входит непродолжаемая в G^-полутраектория $\gamma_p^+(R)$. Рассматривая α-непродолжаемую в G^-полутраекторию $\gamma_p^+(R)$, заметим, что она должна иметь конечную граничную точку C_1 на оси $0x$ правее точки B. Вместе с точкой C_1 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(C_1)$, ибо тогда точка $C_1 C_1$ становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_p^+(C_1)$. В силу условия эффективности торможения α- непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_q^+(C_1))$ должна иметь конечную граничную точку D_2, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. Вместе с точкой D_2 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_2)$, ибо тогда точка D_2 становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α- непродолжаемая в G^-полутраектория $\gamma_p^+(D_2)$. В силу условия эффективности торможения и свойства 4.4 полутраектория $\gamma_p^+(D_2)$ должна иметь конечную граничную точку D_1, которая будет правосторонней граничной точкой отрицательной полуоси $0x$ (рис.5.12).

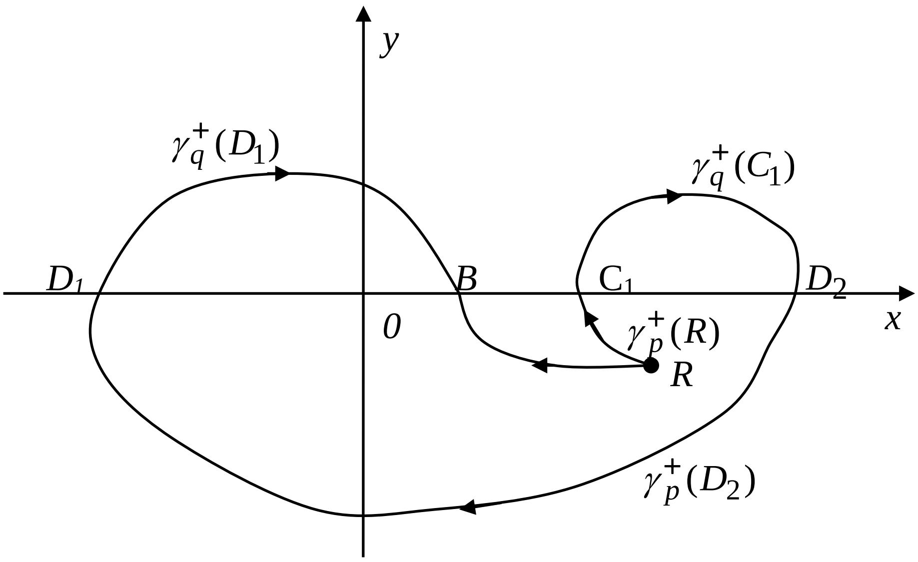

Рис.5.12. Связная компонента $K_q(2E+2R),1R)$.

Далее доказательство полностью совпадает с доказательством теоремы 5.4 для $m=1$. В результате мы получим связную компоненту типа $K_q(2E+2R,1R)$.

Для натуральных чисел $m \geq 2$ доказательство теоремы 5.5 так же мало отличается от доказательства теоремы 5.4, как и для $m=1$.

Теорема 5.6. Пусть точка B положительной полуоси $0x$ является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты множества неуправляемости и её ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Γ связной компоненты входит $S_2(1E+nI)$, n - натуральное число, то связная компонента K имеет тип $K_q(2E+(n+1)I,1E+nI)$.

Пусть, для определенности, n – нечетное число. По условиям теоремы в состав границы Γ входят: дуга C_1B ω-непродолжаемой в G^-сепаратрисы S_2, дуги C_iC_{i-1} $(i=2,4,...,n+1)$ ω-непродолжаемых в G^+полутраекторий $\gamma_p^-(C_{i-1})$, дуги C_iC_{i-1} $(i=3,5,...,n)$ ω-непродолжаемых в G^-полутраекторий $\gamma_q^-(C_{i-1})$, где каждый следующий интервал (C_iC_{i-1}), $i=1,2,3,...,n+1$, содержится в предыдущем (точка C_0 означает точку B). В состав границы Г входит также дуга $C_{n+1}D_{n+2}$ α-непродолжаемой в G^-полутраектории $\gamma_p^+(C_{n+1})$, где точка D_{n+2} располагается правее точки C_{n-1} (рис. 5.13). Вместе с точкой D_{n+2} в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(D_{n+2})$, ибо тогда точка D_{n+2} становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D_{n+2})$, которая будет 2-кратным α-продолжением полутраектории $\gamma_p^+(C_{n+1})$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_q^+(D_{n+2})$ должна иметь конечную граничную точку D_{n+1} , которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. Эта точка будет располагаться на интервале (C_n, C_{n-2}) оси $0x$. Действительно, полутраектория $\gamma_q^+(D_{n+2})$ не может пересекать в G^+ полутраекторию $\gamma_p^-(C_{n-2})$ справа налево, а также она не может пересечь в некоторой точке R и полутраекторию $\gamma_p^-(C_{n-2})$, ибо это означало бы, что точка R является разделяющей точкой для полутраектории $\gamma_q^+(D_{n+2})$. Вместе с точкой D_{n+1} в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_{n+1})$, ибо тогда точка D_{n+1} становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^-полутраектория $\gamma_p^+(D_{n+1})$, которая будет 3-кратным α-продолжением полутраектории $\gamma_p^+(C_{n+1})$ В силу условия эффективности торможения полутраектория $\gamma_p^+(D_{n+1})$ должна иметь конечную граничную точку D_n , которая будет правосторонней граничной точкой, расположенной на интервале (C_{n-3}, C_{n-1}) оси $0x$, и т.д. Если $n=3$, то этот интервал совпадает с интервалом (B, C_2), в общем случае n-кратным α-продолжением полутраектории $\gamma_p^+(C_{n+1})$является дуга D_4D_3 α-непродолжаемой в G^-полутраектории $\gamma_p^+(D_4)$, где точка D_3 расположена на интервале (B, C_2).

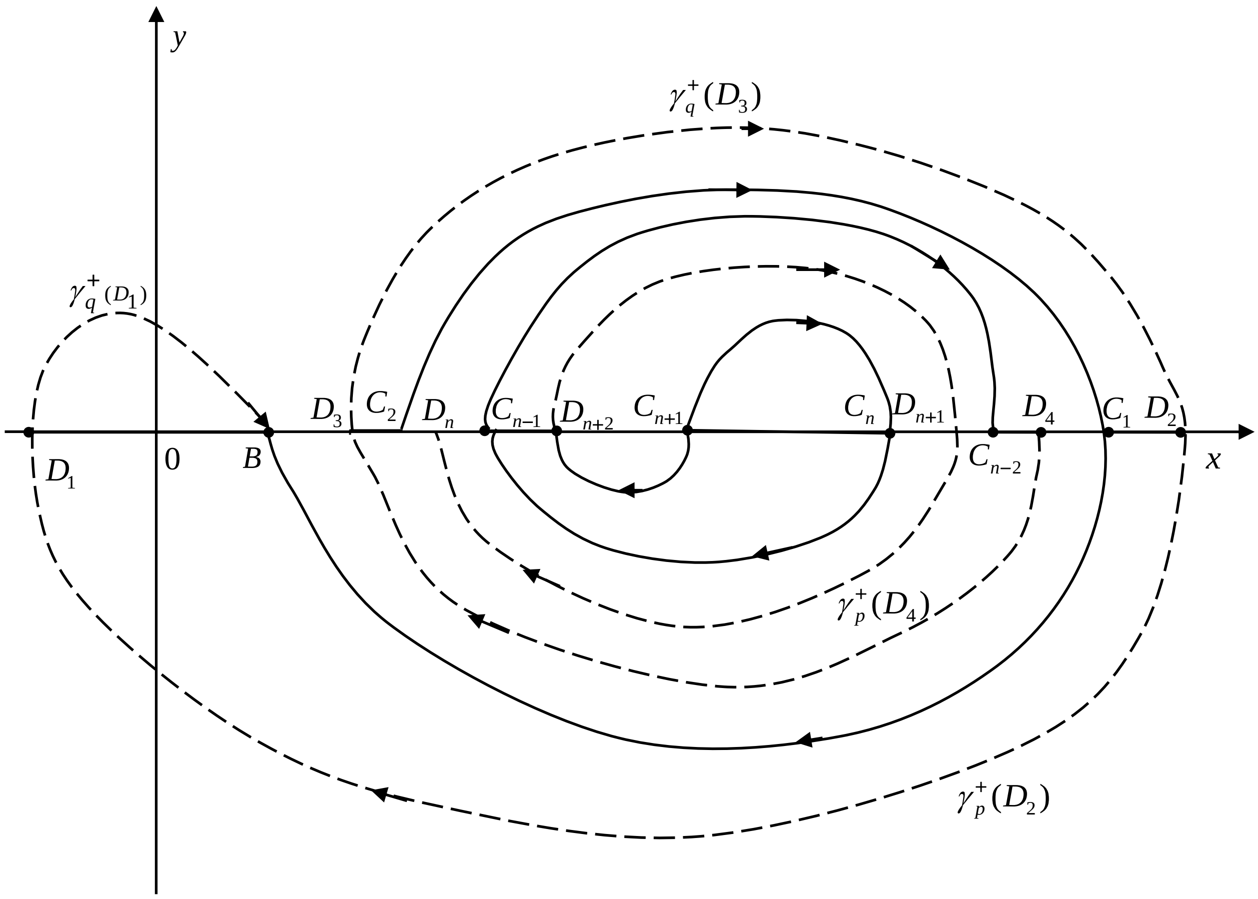

Рис.5.13. Связная компонента $K_q(2E+(n+1)I, 1E+nI)$.

Вместе с точкой D_3 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(D_3)$, ибо тогда точка D_3 становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D_3)$, которая будет $(n+1)$-кратным α-продолжением полутраектории $\gamma_p^+(C_{n+1})$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D_3)$ должна иметь конечную граничную точку D_2, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. Эта точка будет располагаться правее точки C_1. Вместе с точкой D_2 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D_2)$, ибо тогда точка D_2 становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(D_2)$. В силу условия эффективности торможения и свойства 4.4 полутраектория $\gamma_p^+(D_2)$ должна иметь конечную граничную точку D_1, которая будет расположена на отрицательной полуоси $0x$. Вместе с точкой D_1 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(D_1)$, ибо тогда точка D_1 становится второй порождающей точкой в составе границы $\varGamma$ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_q^+(D_1)$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_q^+(D_1)$ должна иметь конечную граничную точку, которая в силу свойства 4.4 должна располагаться на положительной полуоси $0x$ и будет совпадать с точкой B. В результате получим связную компоненту типа $K_q(2E+(n+1)I,1E+nI)$.

Теорема 5.7. Пусть точка B положительной полуоси $0X$ является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты множества неуправляемости и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы $\varGamma$ связной компоненты входит $S_2(mE+nI)$, m - натуральное число, $m \ge 2, n$ - натуральное число, то связная компонента K имеет либо тип $K_q((m-1)E+(n-1)I, mE+nI)$ либо тип $K_q((m+1)E+(n+1)I, mE+nI)$.

Пусть для определенности m и n – четные числа. По условиям теоремы в состав границы $\varGamma$ входят дуга C_1B ω-непродолжаемой в G^-сепаратрисы S_2, дуги C_iC_{i-1} $(i=2,4,...,m)$ ω-непродолжаемых в G^+полутраекторий $\gamma_p^-(C_{i-1})$, дуги C_iC_{i-1} $(i=3,5,...,m-1)$ ω-непродолжаемых в G^-полутраекторий $\gamma_q^-(C_{i-1})$, соответствующие внешнему m-кратному ω-продолжению сепаратрисы S_2. В соответствии с леммой 5.2 сепаратриса S_1 имеет как минимум $(m-1)$-кратное ω-продолжение типа $S_1((m-1)E)$. В частности, в состав границы $\varGamma$ входит дуга $A_{m-1}A_{m-2}$ ω-непродолжаемой в G^+полутраектории $\gamma_q^-(A_{m-2})$, где точка A_{m-1} расположена на интервале (C_mC_{m-2}) оси $0x$, а точка A_{m-2} расположена на интервале $(C_{m-3}C_{m-1})$ оси $0x$. Заметим, что в случае $m=2$ точка A_{m-2} означает точку B, а точки C_{m-2} и C_{m-3} означают начало координат. В состав границы $\varGamma$ входят также дуга C_mD_1 ω-непродолжаемой в G^-полутраектории $\gamma_p^-(C_m)$, где точка D_1 располагается на интервале (C_mC_{m-2}), дуги D_iD_{i-1} $(i=2,4,...,n)$ ω-непродолжаемых в G^+полутраекторий $\gamma_p^-(D_{i-1})$ и дуги D_iD_{i-1} $(i=3,5,...,n-1)$ ω-непродолжаемых в G^-полутраекторий $\gamma_q^-(D_{i-1})$, соответствующие внутреннему n-кратному ω-продолжению сепаратрисы S_2. При этом возможны два варианта:

1) точка D_1 располагается на интервале (C_mA_{m-1}),

2) точка D_1 располагается на полуинтервале $[A_{m-1}C_{m-2})$.

1) Рассмотрим сначала первый вариант. В соответствии с условием теоремы в состав границы Γ входит (при четном значении n) дуга $D_n E_{n+1}$ α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(D_n)$, где точка E_{n+1} располагается на интервале $(D_{n-2}D_n)$. В частности, при $n=2$ точка E_3 будет расположена на интервале $(C_m D_2)$. В общем случае (при $n=2,4,\ldots$ так же, как в теореме 5.6, показывается, что $(n-1)$-кратным α-продолжением полутраектории $\gamma_p^+(D_n)$ является дуга E_3E_4 α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(E_4)$, где точка E_3 располагается на интервале $(C_m D_2)$ (рис.5.14). Вместе с точкой E_3 в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(E_3)$, ибо тогда точка E_3 становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(E_3)$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(E_3)$ должна иметь конечную граничную точку F_{m+2}, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. На интервале (E_3D_2) точка F_{m+2} не может располагаться в силу свойства 4.4. Полутраектория $\gamma_q^+(E_3)$ не может пересечь дугу D_2D_1 полутраектории $\gamma_p^-(D_1)$, ибо в этом случае точка пересечения должна стать для нее разделяющей точкой, поэтому конечная граничная точка F_{m+2} полутраектории $\gamma_q^+(E_3)$ должна располагаться правее точки D_1.

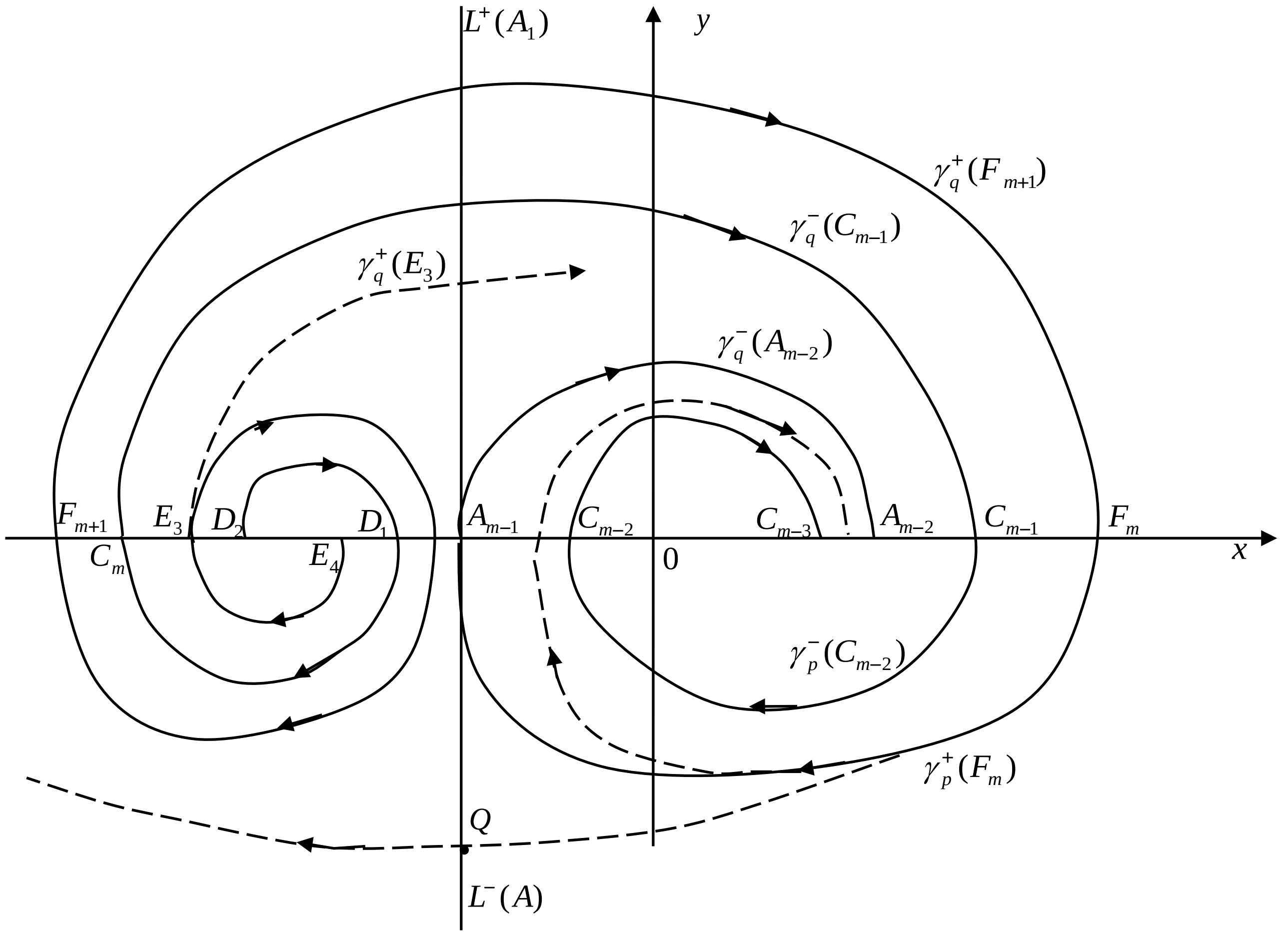

Рис.5.14. Пояснение к теореме 5.7.

Покажем, что точка F_{m+2} не может располагаться правее точки A_{m-1}. Действительно, проведя луч $L^{+}(A_{m-1})$, который пересечет дугу C_mC_{m-1} полутраектории $\gamma_p^{-}(C_{m-1})$ в некоторой точке P, мы получим область, ограниченную отрезком $[A_{m-1}P]$ луча $L^{+}(A_{m-1})$, сепаратрисой $S_1((m-1)E)$, дугой PB сепаратрисы S_2 и принадлежащей множеству неуправляемости. Поэтому полутраектория $\gamma_q^{+}(E_3)$, пересекая луч $L^{+}(A_{m-1})$, попадает в область неуправляемости и не может входить в состав границы Γ. Полутраектория $\gamma_q^{+}(E_3)$ не может также быть ω-сепаратрисой точки A_{m-1}, поскольку это означало бы что точка A_{m-1} не является начальной граничной точкой ω-непродолжаемая в G^{+}полутраектории $\gamma_q^{-}(A_{m-2})$. Значит, конечная граничная точка F_{m+2} полутраектории $\gamma_q^{+}(E_3)$ располагается на интервале (D_1A_{m-1}) оси $0x$. Вместе с точкой F_{m+2} в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_q^{-}(F_{m+2})$, ибо тогда точка F_{m+2} становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^{-}полутраектория $\gamma_p^{+}(F_{m+2})$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_p^{+}(F_{m+2})$ должна иметь конечную граничную точку F_{m+1}, которая будет правосторонней граничной точкой оси $0x$. Полутраектория $\gamma_p^{+}(F_{m+2})$ не может пересечь дугу D_1C_m полутраектории $\gamma_q^{-}(C_m)$, ибо тогда точка пересечения должна стать разделяющей точкой для $\gamma_p^{+}(F_{m+2})$. Значит, точка F_{m+1} будет расположена левее точки C_m. Вместе с точкой F_{m+1} в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^{+} полутраектория γ_p-(F_{m+1}) , ибо тогда точка F_{m+1} становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^{+}полутраектория $\gamma_q^{+}(F_{m+1})$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^{+}полутраектория $\gamma_q^{+}(F_{m+1})$ должна иметь конечную граничную точку F_m, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. Полутраектория $\gamma_q^{+}(F_{m+1})$ не может пересечь дугу C_mC_{m-1} полутраектории $\gamma_p^{-}(C_{m-1})$, ибо тогда точка пересечения должна стать разделяющей точкой для $\gamma_q^{+}(F_{m+1})$. Значит, точка F_m будет расположена правее точки C_{m-1}. Вместе с точкой F_m в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^{-}

полутраектория $\gamma_q^-(F_m)$, ибо тогда точка F_m становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^-полутраектория $\gamma_p^+(F_m)$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_p^+(F_m)$ должна иметь конечную граничную точку F_{m-1}, которая будет правосторонней граничной точкой оси $0x$. В силу свойства 4.4 точка F_{m-1} не может располагаться на интервале $(C_{n-1}F_m)$. Полутраектория $\gamma_p^+(F_m)$ не может пересечь дугу $C_{m-1}C_{m-2}$ полутраектории $\gamma_q^-(C_{m-2})$, ибо тогда точка пересечения должна стать разделяющей точкой для $\gamma_p^+(F_m)$. Предположим, что точка F_{m-1} располагается левее точки A_{m-1}. Проведем луч $L^-(A_{m-1})$, который пересечет дугу F_mF_{m-1} полутраектории $\gamma_p^+(F_m)$ в некоторой точке Q. Нетрудно видеть, что область, расположенная вне замкнутой кривой, образованной сепаратрисой $S_1((n-1)E)$, отрезком $[A_{m-1}Q]$ луча $L^-(A_{m-1})$, дугой $E_{n+1}E_n\dots E_1F_mQ$ $(n+3)$-кратного α-продолжения полутраектории $\gamma_p^+(D_n)$ и сепаратрисой $S_2(mE+nI)$, принадлежит множеству неуправляемости. Это противоречит факту, что α-непродолжаемая в G^-полутраектория $\gamma_p^+(F_m)$ входит в состав границы Γ. Итак, точка F_{m-1} должна располагаться на полуинтервале $[A_{m-1}C_{m-2})$ оси $0x$. Если при этом точка F_{m-1} совпадет с точкой A_{m-1}, то мы получим связную компоненту типа $K_q((m+1)E+(n+1)I, mE+nI)$.

Предположим, что точка F_{m-1} лежит на интервале $(A_{m-1}C_{m-2})$ оси $0x$. В этом случае вместе с точкой F_{m-1} в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(F_{m-1})$, ибо тогда точка F_{m-1} становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^+полутраектория $\gamma_q^+(F_{m-1})$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(F_{m-1})$ должна иметь конечную граничную точку F_{m-2}, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. В силу свойства 4.4 точка F_{m-2} не может лежать на интервале $(F_{m-1}C_{m-2})$. Полутраектория $\gamma_q^+(F_{m-1})$ не может пересечь дугу $C_{m-2}C_{m-3}$ полутраектории $\gamma_p^-(C_{m-3})$, ибо тогда точка пересечения должна стать разделяющей точкой для $\gamma_q^+(F_{m-1})$. Полутраектория $\gamma_q^+(F_{m-1})$ не может также пересечь дугу $A_{m-1}A_{m-2}$ полутраектории $\gamma_q^+(A_{m-2})$. Значит, точка F_{m-2} будет расположена на интервале $(C_{m-3}A_{m-2})$ оси $0x$. Введя новый индекс $t+1=m-1$ (в данном случае t будет четным числом) мы убеждаемся в том, что выполняются условия леммы 5.1, то есть в состав границы Γ связной компоненты входит еще одна порождающая седловая точка.

Итак, остался единственно возможный вариант, при котором конечная граничная точка F_{m+1} полутраектории $\gamma_p^+(F_m)$ совпадает с точкой A_{m-1}, то есть образуется связная компонента типа $K_q((m+1)E+(n+1)I, mE+nI)$.

2) Рассмотрим второй вариант, когда точка D_1 располагается на полуинтервале $[A_{m-1}C_{m-2})$. Если точка D_1 совпадает с точкой A_{m-1}, то образуется связная компонента множества неуправляемости типа $K_q((m-1)E, mE+1I)$, то есть $n=1$. В этом случае дуга D_2D_1 ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^-(D_1)$ не может входить в состав границы Г, так как расположена внутри множества неуправляемости. Пусть точка D_1 расположена на интервале $(A_{m-1}C_{m-2})$ и в состав границы Γ входят дуги D_iD_{i-1} $(i=2,4,...,n)$ ω-непродолжаемых в G^+ полутраекторий $\gamma_p^-(D_{i-1})$ и дуги D_iD_{i-1} $(i=3,5,...,n-1)$ ω-непродолжаемых в G^- полутраекторий $\gamma_q^-(D_{i-1})$, соответствующие внутреннему n-кратному ω-продолжению сепаратрисы S_2, а также дуга D_nE_{n+1} α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(D_n)$, где точка E_{n+1} располагается на интервале $(D_{n-2}D_n)$. В частности, при $n=2$ точка E_3 будет расположена на интервале $(A_{m-1}D_2)$. В общем случае (при $n=2,4,...$) так же, как в теореме 5.6, показывается, что (n-1)-кратным α-продолжением полутраектории $\gamma_p^+(D_n)$ является α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(E_4)$. В силу условия эффективности торможения полутраектория $\gamma_p^+(E_4)$ должна иметь конечную (правостороннюю) граничную точку F_{m+1}. Так как полутраектория $\gamma_p^+(E_4)$ не может пересечь дугу C_mD_1 полутраектории $\gamma_q^-(C_m)$, то точка F_{m+1} должна быть расположена правее точки C_m. Однако, она не может располагаться на интервале (C_mA_{m-1}). Действительно, проведя луч $L^-(A_{m-1})$, который пересечет дугу C_mD_1 полутраектории $\gamma_q^-(C_m)$ в некоторой точке P, мы получим область, ограниченную сепаратрисой $S_1((m-1)E)$, отрезком $[A_{m-1}P]$ луча $L^-(A_{m-1})$, дугой PB сепаратрисы $S_2(mE+nI)$ и принадлежащей множеству неуправляемости, включая интервал (C_mA_{m-1}). Если точка F_{m+1} совпадает с точкой A_{m-1}, то мы получаем связную компоненту типа $K_q((m-1)E+(n-1)I, mE+nI)$ (рис.5.15).

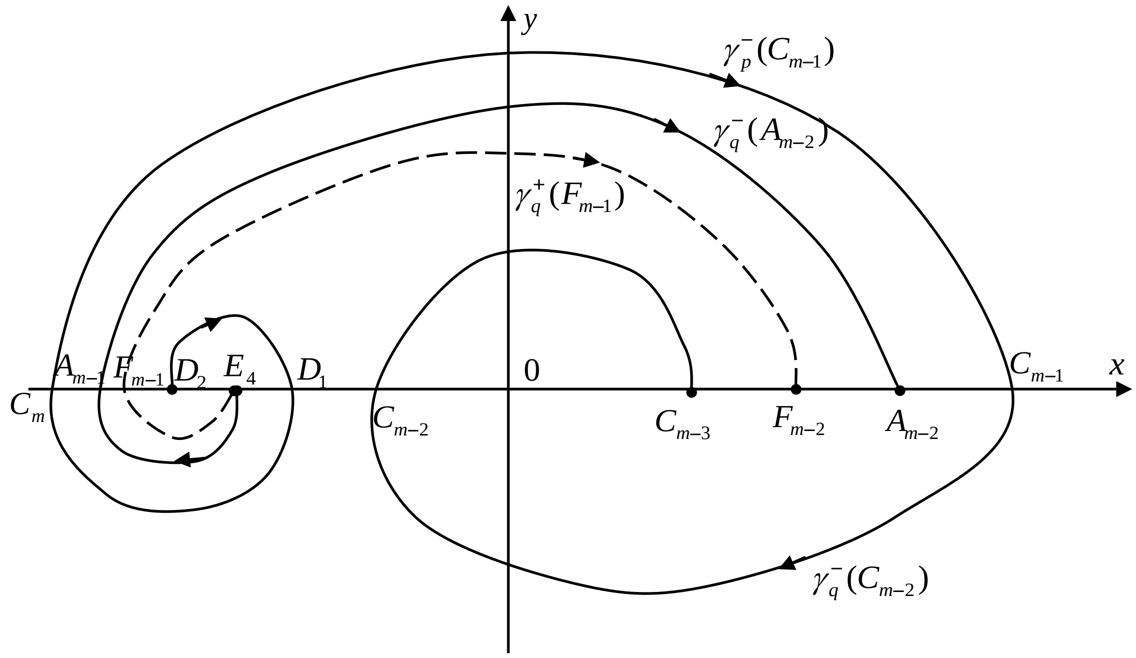

Рис.5.15. Пояснение к теореме 5.7.

Предположим, что точка F_{m-1} располагается на интервале $(A_{m-1}D_2)$. Вместе с точкой F_{m-1} в состав границы Γ должна входить не ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория γ_p-(F_{m-1}), ибо тогда точка F_{m-1} становится второй порождающей точкой в составе границы Γ связной компоненты K, а α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(F_{m-1})$. В силу условия эффективности торможения α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(F_{m-1})$ должна иметь конечную граничную точку F_{m-2}, которая будет левосторонней граничной точкой оси $0x$. В силу свойства 4.4 точка F_{m-2} не может лежать на интервале ($F_{m-1}C_{m-2}$). Полутраектория $\gamma_q^+(F_{m-1})$ не может пересечь дугу $C_{m-2}C_{m-3}$ полутраектории $\gamma_p^-(C_{m-3})$, ибо тогда точка пересечения должна стать разделяющей точкой для $\gamma_q^+(F_{m-1})$. Полутраектория $\gamma_q^+(F_{m-1})$ не может также пересечь дугу $A_{m-1}A_{m-2}$ полутраектории $\gamma_q^-(A_{m-2})$, значит, точка F_{m-2} будет расположена на интервале $(C_{m-3}A_{m-2})$ оси $0X$. Введя новый индекс $t+1=m-1$, (*в данном случае t будет четным натуральным числом !*), мы убедимся в том, что выполняются условия леммы 5.1, то есть в состав границы Γ связной компоненты входит еще одна порождающая седловая точка. Итак, точка F_{m-1} не может располагаться и на интервале $(A_{m-1}D_2)$, то есть она обязательно совпадает с точкой A_{m-1}.

Аналогично проводится доказательство и для случаев m – четное, n – нечетное; m – нечетное, n – четное; m – нечетное, n – нечетное.

Теорема 5.8. Пусть точка B положительной полуоси $0x$ является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты множества неуправляемости и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Γ связной компоненты входит $S_2(1E+nR)$, n - натуральное число, то связная компонента K имеет тип $K_q((2E+(n+2)R, 1E+nR))$.

Доказательство теоремы почти не отличается от доказательства теоремы 5.6.

Теорема 5.9. Пусть точка B положительной полуоси $0x$ является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты множества неуправляемости и ее ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Γ связной компоненты входит $S_2(mE+nR)$, m - натуральное число, $m \geq 2$, n - натуральное число, то связная компонента K имеет либо тип $K_q((m-1)E+nR), mE+nR)$, либо тип $K_q((m+1)E+(n+2)R), mE+nR)$.

Доказательство теоремы почти не отличается от доказательства теоремы 5.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А.Андронов [и др.]. - М.: Наука, 1986. – 568с.
2. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1965. – 703с.
3. Болтянский, В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1969. -408с.
4. Савельев, В.П. Классификация связных компонент множества неуправляемости одномерного движения / В.П.Савельев // Межвузовский сборник «Динамика систем». - Горький, 1975. - вып. 5. - С.118-144.
5. Савельев, В.П. О наличии седловых точек в составе границы области управляемости нелинейного объекта второго порядка / В.П.Савельев, З.Г.Павлючонок // Межвузовский сборник «Дифференциальные и интегральные уравнения». - Горький, 1978.- вып.2. - С.116-123.
6. Савельев, В.П. Качественные методы исследования областей управляемости нелинейных систем второго порядка. Методические указания. - Горький.: Издание ГГУ, 1980. – 30с.
7. Н.Н.Бутенина, Н.Н. Качественные методы исследования областей управляемости на плоскости / Н.Н.Бутенина, З.Г.Павлючонок, В.П.Савельев // Дифференциальные уравнения. – 1995. - Т.31, №4. - С.555-568.
8. Бутенина, Н.Н. Управляемость динамических систем. Учебное пособие. / Н.Н.Бутенина, З.Г.Павлючонок, В.П.Савельев. - Н.Новгород. : изд. ННГУ, 1997. - 75с.

Владимир Петрович **Савельев**

УПРАВЛЯЕМЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л . Уч.-изд. л.
Заказ № . Тираж 150 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01