ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ "МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ"

для направления подготовки «Фундаментальная информатика и информационные технологии»
2019-2020 учебный год

Примечание.

Вопросы, выделенные красным, в билеты не входят. Этот материал может встретиться в качестве дополнительных вопросов.

Вопросы, выделенные ~~двойным зачеркиванием~~ в этом году исключены из программы курса.

Общая программа сдачи экзамена на оценку «хорошо» и выше предполагает владение материалом на уровне, позволяющем проводить выкладки, вывод соотношений и доказательства по теоретическому материалу курса, а также решать практические задачи.

Сдача экзамена на «удовлетворительно» предполагает владение и понимание терминологии (определения и формулировки теорем), знание расчетных формул и численных методов, умение применить теорию к решению практических задач.

В конце приведен список основных понятий и фактов, которые для сдачи экзамена на «удовлетворительно» необходимо знать.

0. ПОНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

0.1. Общая постановка однокритериальной задачи оптимизации. Понятия локально-оптимального и глобально-оптимального решений, строгий и острый локальный минимумы.

0.2. Обобщение понятий оптимальности на многокритериальные задачи оптимизации. Решения оптимальные по Парето и Слейтеру (эффективные и полуэффективные решения). Методы линейной свертки и свертки Гермейера, их основные свойства (по материалам лабораторной работы).

1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

1.1. Задачи с фиксированным временем начала и окончания процесса.

Понятие состояния управляемого динамического процесса. Постановка задачи. Требования, накладываемые на понятие «состояние» в динамическом программировании. Определения функции Беллмана при решении «от конца» и «от начала». Метод рекуррентных уравнений Беллмана при записи «от конца» (вывод~~, включая лемму о расщеплении инфинума,~~ общая структура уравнений, порядок применения). Принцип Беллмана как необходимое и как достаточное условия, формулируемые как «от начала», так и «от конца». Связь принципа Беллмана с уравнениями Беллмана. Запись рекуррентных уравнений Беллмана от начала процесса. Пример использования соотношений Беллмана (аналитическое решение задачи об оптимальном распределении с функцией дохода в виде корня квадратного).

1.2. Задачи с нефиксированной длительностью процесса.

Постановка задачи, отличия от постановки с фиксированным временем окончания. Обобщение уравнений Беллмана на задачи с нефиксированной длительностью процесса. Применение к задачам поиска оптимальных путей на графах. Задачи поиска оптимальных путей на графах с неотрицательными весами ребер: алгоритм метода Дейкстры, доказательство оптимальности построенных им путей (по материалам лабораторной работы), связь метода Дейкстры с принципом Беллмана в форме достаточного условия.

Задачи на графах с векторными весами ребер. Отыскание оптимальных по Парето и Слейтеру решений методом сверток, согласование вида свертки с видом критерия (использовать материалы лабораторной работы).

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.

2.1. Выпуклые множества, выпуклые функции (выпуклость и строгая выпуклость). Проекция точки на множество, две леммы о свойствах проекции. Отделимость точки и множества, строгая и сильная отделимость, геометрический смысл понятия отделимости, две теоремы об отделимости. Свойства выпуклых функций (с самостоятельно проведенными доказательствами, кроме свойства непрерывности во внутренних точках), включая два критерия выпуклости. Задача выпуклого математического программирования и ее свойства (с обоснованием). Возможность отсечений подмножеств, не содержащих глобального минимума, по измерениям градиента в гладких выпуклых задачах (следствие критерия выпуклости дифференцируемых функций).

2.2. Градиент и производная по направлению, ее вычисление в случае дифференцируемости функции, свойства градиента, множество направлений строгого локального убывания. Условие оптимальности первого порядка при отсутствии ограничений: теорема Ферма.

Задачи с ограничениями общего вида, функция Лагранжа для общей задачи математического программирования. Определение понятия регулярности допустимого множества в точке и в целом.

Задачи с ограничениями-равенствами, теорема Лагранжа (метод множителей Лагранжа). Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке для ограничений-равенств. Геометрическая интерпретация условий оптимальности из теоремы Лагранжа – геометрический смысл условий ее выполнения.

Запись условий минимума в задачах математического программирования с ограничениями смешанного типа. Теорема Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме для выпуклой задачи, записанная через принцип минимума. Теорема Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме для выпуклой регулярной задачи, записанная через седловую точку функции Лагранжа. Достаточное условие Слейтера регулярности допустимого множества. Теорема о необходимых и достаточных условиях минимума в дифференциальной форме для класса выпуклых регулярных задач. Геометрическая интерпретация условий оптимальности, записанных в градиентной форме для выпуклого регулярного случая. Геометрическая интерпретация ситуации $\lambda_i < 0$ при разложении антиградиента целевой функции в выпуклой задаче при неверной гипотезе о наборе активных неравенств.

Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме для невыпуклых задач и связанные с ее доказательством вспомогательные леммы (лемма о пустоте пересечения конических аппроксимаций; лемма о глобальной оптимальности нулевой точки в линеаризованной задаче для случая непустоты конической аппроксимации допустимого множества). Формулировка теоремы Люстерника. Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке в форме линейной независимости градиентов.

Геометрические примеры недостаточности условий оптимальности первого порядка для существования локального минимума в невыпуклом случае.

Теорема о достаточных условиях первого порядка для острого локального минимума (без доказательства). Теорема о достаточных условиях второго порядка для строгого локального минимума в задачах с ограничениями и о необходимых условиях второго порядка для локального минимума (без доказательства).

2.3. Понятие метода поисковой оптимизации. Порядок испытания. Априорная и поисковая информация. Пассивные и последовательные алгоритмы. Принцип наилучшего гарантированного результата, оптимальные и ε–оптимальные алгоритмы. Принцип последовательной одношаговой оптимальности. ~~Последовательно-оптимальные N-шаговые методы.~~ Класс унимодальных функций, правила сокращения интервала после двух и после *k* измерений. Построение оптимальных (ε–оптимальных) пассивных N–шаговых алгоритмов. Симметричные алгоритмы, связи пропорций деления на двух последовательных итерациях. Вывод ε–оптимального последовательного N–шагового алгоритма (метод Фибоначчи). Неоптимальные алгоритмы: методы золотого сечения, два варианта метода дихотомии. Связь метода Фибоначчи с методом золотого сечения.

~~Постановка задачи о построении одношагово-оптимального метода поиска минимума выпуклой функции на выпуклом множестве на основе принципа отсечений. Идея метода центров тяжести.~~

Нижняя оценка дифференцируемой выпуклой функции с использованием результатов *k* испытаний первого порядка, метод поиска минимума выпуклой дифференцируемой функции на выпуклом ограниченном многограннике, приведение к последовательности задач линейного программирования.

2.4. Задачи поиска локального экстремума без ограничений для функций общего вида. Общая структура итерационных методов локального поиска. Понятие порядка метода. Линейная, сверхлинейная и квадратичная скорости сходимости (определения). Критерии выбора значения шагового множителя. Правило одномерной минимизации, правило Армихо, ~~правило Вулфа~~; алгоритмическая реализация правил одномерной минимизации и правила Армихо, ~~правила Вулфа~~.

Простые методы локального поиска и их свойства: простые градиентные методы, включая метод наискорейшего градиентного поиска; метод Ньютона. Вывод итерационной формулы метода Ньютона. Теоремы сходимости для этих методов, оценки скорости сходимости, дополнительные свойства метода Ньютона и метода наискорейшего градиентного поиска. Понятие метода прямого поиска, метод Хука-Дживса – демонстрация работы алгоритма.

Эффективные локальные методы первого и второго порядков. Метод Ньютона-Рафсона и Ньютона с регулировкой шага по правилу Армихо, задача модификации матрицы Гессе на положительную определенность. Модифицированное разложение Холесского (упрощенный вариант без учета эффектов вычислительной неустойчивости). Сопряженные направления и их свойства, понятие метода сопряженных направлений для квадратичных функций с положительно определенными симметричными матрицами, основное свойство этих методов. Метод сопряженных градиентов Флетчера–Ривса для квадратичных и неквадратичных функций (алгоритм; формулировка теоремы об оценке скорости сходимости; ~~в квадратичном случае уметь вывести формулу для корректирующего множителя~~). Квазиньютоновские методы: квазиньютоновское условие, формула Давидона-Флетчера-Пауэлла, общее описание структуры квазиньютоновских методов. (Готовится по материалам лабораторной работы — см. литературу [4, 5, 7] из раздела «Математическое программирование», а также [1, п. 4.5] из раздела «Общая…»).

2.5. Решение задач с ограничениями. Метод внешних штрафных функций, функция степенного штрафа, влияние показателя степени на гладкость штрафа. Теорема сходимости. Геометрическое объяснение причин необходимости неограниченного возрастания коэффициента штрафа при гладком штрафе. Свойства метода штрафов: плохая обусловленность вспомогательных задач, характер приближения оценок к решению. Теорема об оценке погрешности решения в зависимости от коэффициента штрафа и показателя степени (без доказательства). Способ останова в методе штрафа.

Метод модифицированных функций Лагранжа. Требования к классу задач с равенствами, модифицированная функция Лагранжа, формулировка леммы об условиях рождения локальной седловой точки, построение метода для этого класса задач, вывод и содержательная интерпретация правила коррекции множителей Лагранжа. Описание метода, способ остановки. Теорема сходимости с оценками скорости сходимости (без доказательства).

Обобщение метода модифицированных функций Лагранжа на гладкие задачи с равенствами и неравенствами. Сведение задач смешанного типа к задачам с равенствами. Определение оптимального значения вспомогательной переменной. Преобразование функции Лагранжа. Вывод итерационных формул метода. Условия применимости, теорема сходимости и оценки скорости сходимости (без доказательства).

2.6. Задачи многоэкстремальной оптимизации. Липшицевы функции и их свойства: верхние и нижние оценки функции по проведенным измерениям, оценки глобального минимума по значению функции и по координатам. Метод Пиявского поиска глобального минимума на компакте в R^N, теорема об определении решения с заданной точностью. Оценивание константы Липшица по результатам выполненных измерений функции, метод с оценкой константы. Одномерный вариант метода Пиявского – метод ломаных, запись через характеристику интервала, алгоритм метода. Метод ломаных и информационно-статистический алгоритм глобального поиска – сопоставление правил.

Многомерные многоэкстремальные задачи. Проблемы построения многомерных алгоритмов глобального поиска. ~~Подход 1 – многошаговая схема редукции, построение методов по многошаговой схеме. Подход 2 – использование фрактальных разверток на основе кривых Пеано. Вид редуцированной задачи на отрезке, свойство Гёльдера. Пример приближенного построения в R^2 – развертка Гильберта–Пеано. Частичная потеря информации о близости образов точек в многомерном пространстве. Применение вращаемых разверток.~~

Подход 3 – компонентные методы, пример реализации по схеме деления на три. Нижняя оценка функции на гипепаринтервале по измерению функции в его центре – поточечная оценка и оценка на гипепаринтервале в целом. Компонентный метод деления на три Евтушенко Ю.Г. для задач без функциональных ограничений: алгоритм, теорема об определении решения с заданной точностью (самостоятельно доказать по аналогии с методом Пиявского). ~~Обобщение метода на задачи с ограничениями-неравенствами. Принцип построения метода с ограничениями.~~

~~Компонентный метод DIRECT, не использующий оценок константы Липшица. Сравнение гиперинтервалов на плоскости «значение_функции–диаметр». Понятие потенциальной оптимальности гиперинтервалов. Правило выбора гиперинтервалов для очередной итерации деления.~~

~~Эвристические мультистартовые методы многоэкстремальной оптимизации, с использованием метода Монте-Карло.~~

ЛИТЕРАТУРА

Общая по всем разделам

1. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации. Учебное пособие. — 2018. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Задачи многокритериальной оптимизации, методы сверток

1. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2007. (Глава 1, 1.1-1.3).
2. Городецкий С.Ю. Методы оптимизации на графах с векторными весами ребер. Методические указания к выполнению лабораторной работы. — 2004. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Динамическое программирование:

1.Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования.
2.Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М:"Высшая школа",1979.
3.Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
4.Городецкий С.Ю. Методы оптимизации на графах с векторными весами ребер. Методические указания к выполнению лабораторной работы. — 2004. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
5. Методы оптимизации в примерах и задачах. /Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. Раздел 1. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2010. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
6. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации. Учебное пособие. Глава 2. – Н.Новгород, 2018. URL: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Математическое программирование, включая численные методы:

1. Карманов В.Г. Математическое программирование. Учеб. пособие - М.: Физматлит, 2008.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Учебное пособие М.:Наука.1982.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002.
4. Вычислительные методы поиска локальных экстремумов функций. Описание лабораторной работы. /Сост. Городецкий С.Ю. - 2000. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
5. Городецкий С.Ю. Лабораторный практикум по методам локальной оптимизации в программной системе LocOpt / Электронный ресурс. – Н.Новгород, 2007.
   URL: http://www.unn.ru/e-library/aids.html?pscience=6&posdate=2007.
6. Городецкий С.Ю. Методы поиска глобального экстремума. Методические указания для студентов. Н.Новгород, 1990.
7. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2007. (Главы: 3, 4, 5, 7)
8. Методы оптимизации в примерах и задачах. /Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. Разделы 2, 3, 4. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2010. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
9. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.
10. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2003.
11. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008 г.
12. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы). М.: Наука, 1978.
13. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации. Учебное пособие. Главы 3 и 4. – Н.Новгород, 2018. URL: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Общая программа сдачи экзамена на оценку «хорошо» и выше предполагает владение материалом на уровне, позволяющем проводить выкладки, вывод необходимых соотношений и доказательства, решать практические задачи.

=== ========

Минимальные требования для сдачи экзамена на «удовлетворительно»:

а– умение решать типовые практические задачи;
б– знание определений и способность к их содержательной интерпретации;
в– знание основных постановок задач;
г– знание и понимание формулировок основных свойств, лемм и теорем;
д– описание алгоритмов и расчетных формул основных численных методов и их содержательная трактовка;

е–способность ответить на дополнительные вопросы по имеющимся лабораторным задолженностям (при наличии задолженностей).

Перечень определений, понятий, алгоритмов, лемм и теорем по п.п. (б-в-г-д) приведен ниже:

0. ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ

Определение локального и глобального минимума в скалярных задачах.

Определение решений оптимальных по Парето и Слейтеру (эффективных и полуэффективных решений). Геометрическая интерпретация этих определений.

1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи динамического программирования с фиксированной длительностью процесса.

Определение функции Беллмана $S_k(x)$ при решении от конца

Определение функции Беллмана $Z_k(x)$ при решении от начала.

Общий вид рекуррентных уравнений Беллмана при записи от начала и от конца.

Принцип Беллмана как необходимое условие.

Принцип Беллмана как достаточное условие.

Постановка задачи динамического программирования с нефиксированной длительностью процесса.

Запись обобщенных уравнений Беллмана для задач с нефиксированной длительностью процесса.

Алгоритм метода Дейкстры, условия применимости.

Задачи о поиске оптимальных путей на графе с векторными весами ребер.

Вид линейной свертки и свертки Гермейера. Метод сверток.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

Выпуклое множество.

Проекция точки на множество.

Формулировки двух лемм о свойствах проекции.

Определение отделимости точки и множества, строгая и сильная отделимость.

Две теоремы об отделимости.

Выпуклая, строго выпуклая функция (вогнутая и строго вогнутая).

Свойства выпуклых функций.

Задача выпуклого математического программирования и ее свойства.

Правило отсечений по измерению градиента выпуклой функции областей, не содержащих глобального минимума.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Производная по направлению, ее вычисление для дифференцируемой функции.

Множество направлений строгого локального убывания дифференцируемой функции в точке.

Теорема Ферма.

Функция Лагранжа для общей задачи мат. программирования.

Активные ограничения. Условие дополняющей нежесткости и его содержательный смысл.

Определение регулярности допустимого множества в точке и регулярности допустимого множества в целом.

Теорема Лагранжа – условия оптимальности в дифференциальной форме для задач с равенствами.

Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме записи с использованием принципа минимума.

Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера, записанных через седловую точку функции Лагранжа, для выпуклой регулярной задачи.

Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме (выпуклый и невыпуклый случаи).

Геометрическая интерпретация условий оптимальности в дифференциальной форме.

Достаточное условие регулярности Слейтера.

Достаточные условия регулярности в форме линейной независимости градиентов (с доказательством).

Достаточные условия второго порядка для строгого локального минимума.

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Понятие метода поисковой оптимизации.

Определение пассивного алгоритма, последовательного алгоритма.

Принцип наилучшего гарантированного результата.

Определение оптимального и ε–оптимального алгоритма.

Определение унимодальной функции.

Правило сокращения интервала для унимодальных функций. Гарантированная неопределенность после *k* измерений.

Оптимальные и ε–оптимальные пассивные N–шаговые алгоритмы для унимодальных функций.

Симметричные алгоритмы, связи пропорций деления на двух последовательных итерациях.

Алгоритм метода Фибоначчи. Оптимальные пропорции деления. Формула для его гарантированной эффективности.
Метод золотого сечения. Формула для его гарантированной эффективности.
Методы дихотомии. Алгоритмы. Формула для их гарантированной эффективности.
Взаимосвязь метода Фибоначчи и метода золотого сечения.
Вид нижней оценки дифференцируемой выпуклой функции по ее испытаниям первого порядка.
Метод поиска глобального минимума выпуклой дифференцируемой функции на ограниченном выпуклом многограннике сведением к последовательности задач линейного программирования.
Общая структура итерационных траекторных методов локального поиска в R^N.
Понятие порядка метода поисковой оптимизации.
Линейная, сверхлинейная и квадратичная скорость сходимости.
Три критерии выбора шагового множителя и их геометрическая интерпретация.
Алгоритмы Армихо, одномерной минимизации.
Алгоритм метода наискорейшего градиентного поиска. Демонстрация применения.
Свойства наискорейшего градиентного поиска, соотношение Канторовича – оценка скорости сходимости.
Метод Ньютона (с выводом основного соотношения).
Геометрическая интерпретация метода Ньютона в R^1.
Теорема о сходимости и порядке скорости сходимости для метода Ньютона.
Метод прямого поиска: метод Хука-Дживса. Демонстрация применения.
Метод Ньютона-Рафсона и Ньютона с регулировкой шага по Армихо.
Определение A-сопряженной системы векторов.
Методы сопряженных направлений – определение.
Метод Флетчера–Ривса – описание алгоритма.
Квазиньютоновское условие.
Квазиньютоновский метод – общее описание алгоритма.
Метод внешних штрафных функций – описание применения.
Вид степенной функции штрафа.
Влияние показателя степени в степенном штрафе на гладкость функции штрафа.
Теорема сходимости метода внешнего штрафа.
Критерий останова в методе внешнего штрафа.
Модифицированная функция Лагранжа для задач с равенствами.
Требования на класс задач с равенствами для применения метода модифицированных функций Лагранжа.
Алгоритм метода модифицированных функций Лагранжа для задач с равенствами.
Теорема о сходимости этого метода.
Правило останова в этом методе.
Модифицированная функция Лагранжа для задач смешанного типа.
Требования на класс задач с равенствами и неравенствами для применения метода модифицированных функций Лагранжа.
Принцип сведения задач смешанного типа к задачам с равенствами.
Алгоритм метода модифицированных функций Лагранжа для задач с равенствами и неравенствами.
Теорема о сходимости этого метода. Характер сходимости.
Определение липшицевой функции.
Вид верхней и нижней оценок функции по результатам k измерений.
Оценки глобального минимума по значению функции и координатам (по результатам k измерений липшицевой функции).
Метод Пиявского – описание алгоритма. Демонстрация применения в R^1.
Теорема сходимости метода Пиявского.
Одномерный вариант метода Пиявского — метод ломанных. Формула для характеристики интервала, условие остановки, алгоритм.
~~Информационно-статистический алгоритм глобального поиска – сопоставление с методом ломаных.~~
Поточечная нижняя оценка и нижняя оценка в целом липшицевой функции на гиперинтервале по измерению в его центре.
Метод деления на три – описание алгоритма. Демонстрация применения для случая одной переменной.
~~Учет липшицевых ограничений в методе деления на три – принцип учета~~.