ВОПРОСЫ ПО КУРСУ "МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ" 2019-2020 учебного года
(направление подготовки – ПМИ)

Примечание 1. Вопросы, выделенные красным цветом, в билетах экзамена не представлены. Этот материал может встретиться в качестве дополнительных вопросов.

Примечание 2. Вопросы, текст которых зачеркнут~~: зачеркнут~~, исключены из программы экзамена 2019-20 года.

Примечание 3. Обратите внимание **на последние два раздела** (**ВИ** и **ОУ**)! Вопросы по этим разделам **присутствуют во многих билетах**.

В конце приведен список основных понятий и фактов теории, которые для сдачи экзамена на «удовлетворительно» необходимо знать. Для сдачи экзамена на «хорошо» и выше необходимо не просто знать факты, но и уметь их обосновывать, т.е. выводить формулы, доказывать утверждения и теоремы.

0. ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ

0.1. Общая постановка однокритериальной задачи оптимизации. Понятия локально-оптимального и глобально-оптимального решений, строгий и острый локальный минимумы.

0.2. Обобщение понятий оптимальности на многокритериальные задачи оптимизации. Решения оптимальные по Парето и Слейтеру (эффективные и полуэффективные решения). Методы линейной свертки и свертки Гермейера, их основные свойства (по материалам лабораторной работы).

1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Задачи с фиксированным временем начала и окончания процесса.

Понятие состояния управляемого динамического процесса. Постановка задачи. Требования, накладываемые на понятие «состояние» в динамическом программировании. Определения функции Беллмана при решении «от конца» и «от начала». Метод рекуррентных уравнений Беллмана при записи «от конца» (вывод~~, включая лемму о расщеплении инфинума,~~ общая структура уравнений, порядок применения). Принцип Беллмана как необходимое и как достаточное условия, формулируемые как «от начала», так и «от конца». Связь принципа Беллмана с уравнениями Беллмана. Запись рекуррентных уравнений Беллмана от начала процесса. Пример использования соотношений Беллмана (аналитическое решение задачи об оптимальном распределении с функцией дохода в виде корня квадратного).

1.2. Задачи с нефиксированной длительностью процесса.

Постановка задачи, отличия от постановки с фиксированным временем окончания. Обобщение уравнений Беллмана на задачи с нефиксированной длительностью процесса. Применение к задачам поиска оптимальных путей на графах. Задачи поиска оптимальных путей на графах с неотрицательными весами ребер: алгоритм метода Дейкстры, доказательство оптимальности построенных им путей (по материалам лабораторной работы), связь метода Дейкстры с принципом Беллмана в форме достаточного условия. Задачи на графах с векторными весами ребер. Отыскание оптимальных по Парето и Слейтеру решений методом сверток, согласование вида свертки с видом критерия (использовать материалы лабораторной работы).

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.1. Выпуклые множества, выпуклые функции (выпуклость и строгая выпуклость). Проекция точки на множество, две леммы о свойствах проекции. Отделимость точки и множества, строгая и сильная отделимость, геометрический смысл понятия отделимости, две теоремы об отделимости. Свойства выпуклых функций (с самостоятельно проведенными доказательствами, кроме свойства непрерывности во внутренних точках), включая два критерия выпуклости. Задача выпуклого математического программирования и ее свойства (с обоснованием). Возможность отсечений подмножеств, не содержащих глобального минимума, по измерениям градиента в гладких выпуклых задачах (следствие критерия выпуклости дифференцируемых функций).

2.2. Градиент и производная по направлению, ее вычисление в случае дифференцируемости функции, свойства градиента, множество направлений строгого локального убывания. Условие оптимальности первого порядка при отсутствии ограничений: теорема Ферма.

Задачи с ограничениями общего вида, функция Лагранжа для общей задачи математического программирования. Определение понятия регулярности допустимого множества в точке и в целом.

Задачи с ограничениями-равенствами, теорема Лагранжа (метод множителей Лагранжа). Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке для ограничений-равенств. Геометрическая интерпретация условий оптимальности из теоремы Лагранжа – геометрический смысл условий ее выполнения.

Запись условий минимума в задачах математического программирования с ограничениями смешанного типа. Теорема Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме для выпуклой задачи, записанная через принцип минимума. Теорема Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме для выпуклой регулярной задачи, записанная через седловую точку функции Лагранжа. Достаточное условие регулярности Слейтера.

Теорема о необходимых и достаточных условиях минимума в дифференциальной форме для класса выпуклых регулярных задач. Геометрическая интерпретация условий оптимальности, записанных в градиентной форме для выпуклого регулярного случая. Геометрическая интерпретация ситуации $\lambda_i < 0$ при разложении антиградиента целевой функции в выпуклой задаче при неверной гипотезе о наборе активных неравенств.

Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме для невыпуклых задач – условие оптимальности первого порядка. Конические аппроксимации вспомогательных множеств. Лемма о непересекаемости конических аппроксимаций, построенных для точки условного локального минимума. Формулировка теоремы Люстерника. Лемма о глобальном минимуме в линеаризованной задаче (для основного случая – при непустоте конической аппроксимации допустимого множества). Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке в форме линейной независимости специального набора градиентов. Геометрические примеры недостаточности условий первого порядка для существования локального минимума в невыпуклом случае.

Теорема о достаточных условиях первого порядка (без доказательства). Теорема о достаточных условиях второго порядка для строгого локального минимума в задачах с ограничениями (без доказательства).

2.3. Понятие метода поисковой оптимизации. Испытание и порядок испытания. Априорная и поисковая информация. Пассивные и последовательные алгоритмы. Принцип наилучшего гарантированного результата. Оптимальные и ε–оптимальные алгоритмы. Одношаговая последовательная оптимальность. Класс унимодальных функций, правило сокращения интервала по двум и по k измерениям. Построение оптимальных и ε–оптимальных пассивных N–шаговых алгоритмов, их гарантированная эффективность. Построение ε–оптимального последовательного N–шагового алгоритма (метод Фибоначчи). Неоптимальные алгоритмы: методы золотого сечения и два варианта метода дихотомии. Связь метода Фибоначчи с методом золотого сечения.

2.4. Метод поиска глобального минимума выпуклой дифференцируемой функции на выпуклом многограннике. Вид нижней оценки выпуклой функции по ее испытаниям первого порядка. Сведение к последовательности задач линейного программирования.

Задачи поиска локального экстремума в задачах без ограничений. Общая структура итерационных методов локального поиска. Понятие порядка метода. Линейная, сверхлинейная и квадратичная скорости сходимости (определения).

Два критерия выбора шагового множителя. Алгоритмы Армихо и одномерной минимизации. «Аккуратный» одномерный поиск. Простые методы многомерного локального поиска и их свойства: градиентные методы, включая метод наискорейшего градиентного поиска, и метод Ньютона. Вывод итерационного соотношения метода Ньютона, геометрическая интерпретация. Свойства метода наискорейшего градиентного поиска и метода Ньютона. Теоремы сходимости для этих методов. Методы прямого поиска на примере метода Хука-Дживса.

Более сложные и эффективные методы локальной оптимизации: алгоритм метода Ньютона с регулировкой шага (по одномерной минимизации и по Армихо), модифицированный метод Ньютона с модификацией матрицы Гессе до положительной определенности на основе модифицированного преобразования Холесского (упрощенная схема модификации без учета эффектов вычислительной неустойчивости); квазиньютоновское условие, квазиньютоновский метод Давидона-Флетчера-Пауэлла; понятие сопряженных направлений, понятие метода сопряженных направлений и его поведение на квадратичных строго выпуклых функциях, алгоритм метода сопряженных градиентов Флетчера–Ривса для квадратичных и неквадратичных функций (по материалам лабораторных работ).

2.5. Решение задач с ограничениями. Метод внешнего штрафа, функция степенного штрафа, влияние показателя степени на гладкость штрафа. Теорема сходимости. Геометрическое объяснение причин необходимости неограниченного возрастания коэффициента штрафа при гладком штрафе. Свойства метода штрафов: плохая обусловленность вспомогательных задач, характер приближения оценок к решению. Теорема об оценке погрешности решения в зависимости от коэффициента штрафа и показателя степени (без доказательства). Способ останова в методе штрафа.

2.6. Задачи многоэкстремальной оптимизации. Липшицевы функции и их свойства. Метод Пиявского, теорема о свойствах. Версия метода с использованием оценки константы Липшица. Одномерный вариант метода Пиявского — метод ломанных. Алгоритм информационно–статистического метода в сравнении с методом ломаных.

~~Методы редукции размерности~~.

Многомерные многоэкстремальные задачи. Нижняя оценка функции на гиперпараллелепипеде по измерению функции в его центре – поточечная оценка и оценка на гиперпараллелепипеде в целом. Метод деления на три: алгоритм, теорема о свойствах (доказательство — самостоятельно, по аналогии с методом Пиявского). ~~Обобщение метода деления на три на задачи с ограничениями-неравенствами для случая непустого допустимого множества~~.

3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

3.1. Постановка задачи. Понятие оптимального управления, области управляемости и неуправляемости. Функция Беллмана в задаче оптимального управления. Получение условий оптимальности в форме уравнения Беллмана для задачи оптимального управления. Теорема о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, связь принципа максимума с уравнением Беллмана.

3.2. Линейные задачи на оптимальное быстродействие. Постановка, преобразование формы записи принципа максимума для этих задач, исходя из теоремы о принципе максимума для общей задачи. Структура оптимального управления. Условие общности положения. Теорема о необходимых и достаточных условиях оптимальности управления (достаточность — без доказательства).

3.3. Другие формы постановки задач оптимального управления, изменения формы принципа максимума: задача с фиксированным временем достижения; ~~неавтономные задачи;~~ задачи оптимального управления со скользящими концами, условие трансверсальности.

4. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Простейшие задачи вариационного исчисления (с закрепленными, свободными и скользящими концами) — постановки задач. Формализация понятия близости кривых. Понятие сильного и слабого локального экстремумов.

Метод вариации Лагранжа. Пробные функции, вариация кривой. Первая и вторая вариации функционала. Лемма о необходимых условиях локального экстремума (слабого и сильного) в общей форме. Экстремум и экстремаль функционала (определение экстремали). Основная лемма вариационного исчисления.

4.2. Вычисление первой вариации функционала для задач с закрепленными концами, задач со свободными концами, а также для задач со скользящими концами. Вывод уравнения Эйлера и граничных условий как необходимых условий первого порядка для экстремума и как необходимых и достаточных условий для экстремалей в трех простейших задачах вариационного исчисления. Естественные граничные условия и условия трансверсальности в задачах со свободными и скользящими концами. Их геометрический смысл. Первые интегралы уравнения Эйлера.

4.3. Экстремали с изломами. Теорема Дюбуа-Раймона (без доказательства). ~~Условия «склейки» Вейерштрасса–Эрдмана при изломе экстремалей (без доказательства).~~

4.4. Вычисление второй вариации в предположении закрепленных концов. Необходимое условие второго порядка для минимума (максимума) функционала — условие Лежандра.

4.5. Вариационные задачи с ограничениями.

Изопериметрическая задача, постановка. ~~Применение подхода Лагранжа.~~ Теорема об условиях экстремума первого порядка в изопериметрических задачах (без доказательства). ~~(с доказательством, разбирается самостоятельно!)~~. ~~Задачи вариационного исчисления с дифференциальными связями, теорема о сведении к вариационной задаче на безусловный экстремум (без доказательства, разбирается самостоятельно).~~

ЛИТЕРАТУРА (краткий список)

Общая по всем разделам

1. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации. Учебное пособие. — 2018. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Задачи многокритериальной оптимизации, методы сверток

1. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2007. (Глава 1, 1.1-1.3).
2. Городецкий С.Ю. Методы оптимизации на графах с векторными весами ребер. Методические указания к выполнению лабораторной работы. — 2004. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Динамическое программирование:

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования.
2. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М:"Высшая школа",1979.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
4. Городецкий С.Ю. Методы оптимизации на графах с векторными весами ребер. Методические указания к выполнению лабораторной работы. — 2004. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
5. Методы оптимизации в примерах и задачах. /Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. Раздел 1. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2010. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
6. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации. Учебное пособие. Глава 2. – Н.Новгород, 2018. URL: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Математическое программирование, включая численные методы:

1. Карманов В.Г. Математическое программирование.- Учеб. пособие - М.: Физматлит, 2008.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач.- Учебное пособие М.:Наука.1982.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002.
4. Вычислительные методы поиска локальных экстремумов функций. Описание лабораторной работы. /Сост. Городецкий С.Ю. - 2000. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
5. Городецкий С.Ю. Лабораторный практикум по методам локальной оптимизации в программной системе LocOpt / Электронный ресурс. – Н.Новгород, 2007.
URL: http://www.unn.ru/e-library/aids.html?pscience=6&posdate=2007.
6. Городецкий С.Ю. Методы поиска глобального экстремума. Методические указания для студентов. Н.Новгород, 1990.
7. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2007. (Главы: 3, 4, 5, 7)
8. Методы оптимизации в примерах и задачах. /Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. Разделы 2, 3, 4. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2010. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
9. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.
10 Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2003.
11. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008 г.
12. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы). М.: Наука, 1978.
13. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации. Учебное пособие. Главы 3 и 4. – Н.Новгород, 2018. URL: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Оптимальное управление:

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления – М.:Наука, 1969.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М: Физматгиз, 1961.
3. Методы оптимизации в примерах и задачах. /Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. Раздел 6. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2010. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
4. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации. Учебное пособие. Глава 6. – Н.Новгород, 2018. URL: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Вариационное исчисление:
1.Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.,Л.:ГТТИ 1933, т.1 - по вариационному исчислению наиболее простое и ясное изложение. В электронном виде можно найти на сайте http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm.
2.Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз. 1961.
3.Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. Гостехиздат. 1950.
4.Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.:Наука, 1969.
5. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. Изд.стереотипное. --- М.: Изд.группа URSS, 2014.
6. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. – М.:Наука, 1973.
7. EqWorld. Мир математических уравнений / Разработчик – А. Д. Полянин. – М.: ИПМ РАН, 2004-2014. Электронный ресурс, содержащий электронные версии книг по вариационному исчислению в свободном доступе: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm.
8. Методы оптимизации в примерах и задачах. /Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. Раздел 5. – Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2010. Электронная форма: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy
9. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации. Учебное пособие. Глава 5. – Н.Новгород, 2018. URL: http://www.itmm.unn.ru/tuds/obuchenie/materialy

Общая программа сдачи экзамена на оценку «хорошо» и выше предполагает полное владение материалом, включая умение проводить выкладки и доказательства.

===================== ================ ====================

Минимальные требования для ПМИ сдачи экзамена на «удовлетворительно»:

а– умение решать типовые практические задачи из разных разделов курса;
б– знание определений и способность к их содержательной интерпретации;
в– знание основных постановок задач для всех разделов курса;
г– знание и понимание (в основном) формулировок основных свойств, лемм и теорем;
д– описание алгоритмов и расчетных формул основных численных методов и их содержательная трактовка;
е–способность ответить на теоретические и практические вопросы по имеющимся лабораторным задолженностям (при наличии задолженностей)

Перечень определений, понятий, алгоритмов, лемм и теорем по п.п. (б-в-г-д):

0. ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ

Определение локального и глобального минимума (условного) в скалярных задачах.
Определение решений оптимальных по Парето и Слейтеру (эффективных и полуэффективных решений).

1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи динамического программирования с фиксированной длительностью процесса.
Определение функции Беллмана $S_k(x)$ при решении от конца
Определение функции Беллмана $Z_k(x)$ при решении от начала.
Общий вид рекуррентных уравнений Беллмана при записи от начала и от конца.
Формулировка принципа Беллмана как необходимого условия.
Формулировка принципа Беллмана как достаточного условия.
Постановка задачи динамического программирования с нефиксированной длительностью процесса.
Вид обобщенных рекуррентных уравнений Беллмана для задач с нефиксированной длительностью процесса.
Алгоритм метода Дейкстры, условия применимости.
Задачи о поиске оптимальных путей на графе с векторными весами ребер. Применение метода сверток.
Линейная свертка, свертка Гермейера. Решение задач через методы сверток.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Выпуклое множество.
Проекция точки на множество.
Формулировки двух лемм о свойствах проекции.
Определение отделимости точки и множества, строгая и сильная отделимость.
Две теоремы об отделимости (с доказательствами).
Выпуклая, строго выпуклая функция (вогнутая и строго вогнутая).
Свойства выпуклых функций (критерии выпуклости – с доказательством).
Задача выпуклого математического программирования и ее свойства.
Правило отсечений по измерению градиента выпуклой функции частей допустимого множества, не содержащих глобального минимума.
Производная по направлению, ее вычисление для дифференцируемой функции.
Множество направлений строгого локального убывания дифференцируемой функции.

Теорема Ферма.
Функция Лагранжа для общей задачи мат. программирования.
Активные ограничения. Условие дополняющей нежесткости и их содержательный смысл.
Определение регулярности допустимого множества в точке и регулярности допустимого множества в целом.

Теорема Лагранжа – условия оптимальности в дифференциальной форме для задач с равенствами.
Условия Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме (через принцип минимума).
Условия Каруша-Куна-Таккера в терминах седловой точки.
Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме записи с использованием принципа минимума.
Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера, записанных через седловую точку функции Лагранжа, для выпуклой регулярной задачи.

Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме (выпуклый и невыпуклый случаи).
Геометрическая интерпретация условий оптимальности в дифференциальной форме.
Достаточное условие регулярности Слейтера.
Достаточные условия регулярности в форме линейной независимости градиентов (с доказательством).
Теорема о необходимых условиях второго порядка для локального минимума.
Теорема о достаточных условиях второго порядка для строгого локального минимума.

Понятие метода поисковой оптимизации.
Определение пассивного алгоритма, последовательного алгоритма.
Принцип наилучшего гарантированного результата.
Оптимальные и ε–оптимальные алгоритмы.
Определение унимодальной функции.
Правило сокращения интервала. Гарантированная неопределенность после N измерений для пассивного метода.
Оптимальные и ε–оптимальные пассивные N–шаговые алгоритмы для унимод. функц. (с объяснением).
Алгоритм метода Фибоначчи. Формула для его гарантированной эффективности.
Метод золотого сечения. Формула для его гарантированной эффективности.
Методы дихотомии -1 и -2. Формулы для их гарантированной эффективности.
Вид нижней оценки выпуклой функции по измерениям ее значения и градиента.
Метод сведения задачи поиска глобального минимума выпуклой дифференцируемой функции к последовательности задач линейного программирования.

Общая структура итерационных методов локального поиска в R^N.
Понятие порядка метода поисковой оптимизации.
Понятия: линейная, сверхлинейная и квадратичная скорость сходимости.
Два критерия выбора шагового множителя.
Алгоритмы Армихо и одномерной минимизации.
Алгоритм метода наискорейшего градиентного поиска. Демонстрация применения.
Его свойства, соотношение Канторовича – оценка скорости сходимости.
Метод Ньютона (с выводом основного итерационного соотношения).
Теорема о сходимости и порядке скорости сходимости для метода Ньютона.
Метод прямого поиска: метод Хука-Дживса – демонстрация применения.
Сопряженные направления.
Квазиньютоновское условие.
Алгоритмы методов Ньютона–Рафсона, Флетчера–Ривса, квазиньютоновского метода Давидона-Флетчера-Пауэлла (в чем заключаются эти методы).
Метод внешних штрафных функций – описание применения.
Вид степенной функции штрафа.
Функция невязки в методе штрафов.
Влияние показателя степени в степенном штрафе на гладкость функции штрафа.
Теорема сходимости метода внешнего штрафа.
Критерий останова в методе внешнего штрафа.
Определение липшицевой функции.
Свойства липшицевых функций.
Вид верхней и нижней оценок липшицевой функции по результатам k измерений.
Оценки глобального минимума липшицевой функции: по значению функции и координатам (по результатам k измерений).
Метод Пиявского – описание алгоритма.
Теорема сходимости для метода Пиявского.
Одномерный вариант метода Пиявского — метод ломанных. Демонстрация применения.
Вид поточечной и общей нижней оценки липшицевой функции по центральному измерению в гиперпараллелепипеде
Метод деления на три – описание алгоритма. Демонстрация применения для случая одной переменной.

3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Постановка задачи оптимального управления.
Функция Беллмана в задаче оптимального управления.
Области управляемости и неуправляемости.

Вид уравненининия Беллмана для задачи оптимального управления.
Функция Гамильтона, система для сопряженных переменных.
Теорема о принципе максимума Л.С. Понтрягина.
Постановка линейной задачи на оптимальное быстродействие.
Условие общности положения.
Структура оптимального управления в линейной задаче на оптимальное быстродействие.
Теорема о необходимых и достаточных условиях оптимальности управления в линейных задачах на оптимальное быстродействие.

4. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задача вариационного исчисления с закрепленными концами — постановка.
Задача вариационного исчисления со свободными концами — постановка.
Задача вариационного исчисления со скользящими концами — постановка.
Нормы нулевого и первого порядков.
Определение сильного и слабого локального экстремумов.
Метод вариации Лагранжа.
Понятие первой и второй вариации.
Классы пробных функций для каждой из простейших задач вариационного исчисления.
Определение экстремали функционала.
Основная лемма вариационного исчисления.
Вид первой вариации функционала для задач с закрепленными концами (уметь выводить).
Вид первой вариации функционала для задач со свободными концами.
Вид первой вариации функционала для задач со скользящими концами.
Уравнение Эйлера и его первые интегралы.
Необходимые и достаточные условия экстремали в трех простейших задачах вариационного исчисления.
Необходимые условия экстремума в трех простейших задачах вариационного исчисления.
Естественные граничные условия.
Условия трансверсальности.
Необходимое условие второго порядка для минимума функционала — условие Лежандра.
Постановка изопериметрической задачи.
Теорема об условиях экстремума в изопериметрической задаче.