

Министерство образования Российской Федерации
Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского
Факультет вычислительной математики и кибернетики

**© РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ
МЕТОДАМИ, КАК ПРОЦЕСС МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ**

**Методические материалы к программной лаборатории ©“Особенности
численного моделирования решений обыкновенных дифференциальных
уравнений”**

Н.Новгород, 2001

АННОТАЦИЯ

Приведенный в этом документе материал посвящен проблемам математического моделирования решений дифференциальных уравнений численными методами. Рассмотрены главные идеи, лежащие в основе их построения. Дан анализ основных источников ошибок, численного интегрирования. Этот документ является теоретической основой для созданной программной лаборатории "Особенности численного моделирования решений дифференциальных уравнений©". При подготовке документа использованы методические разработки кафедры ТУ и ДМ факультета ВМК ННГУ: «Решение дифференциальных уравнений численными методами, как процесс математического моделирования». Описание лабораторной работы по курсу «Дифференциальные уравнения». / Составители: С.Ю.Городецкий, Т.А.Котова, Б.Л.Скорнякова, А.А.Хентов Н.Новгород:ННГУ,1992.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Численные методы решения задачи Коши.	4
2. Основные источники ошибок методов численного интегрирования.....	7
3. Исследования в программной лаборатории.....	12
Литература.....	13

Введение

Дифференциальные уравнения являются тем языком, которым особенно часто пользуются при математическом моделировании явлений и процессов самой разнообразной природы. Можно указать на ранее выполненную на факультете ВМК ННГУ программную разработку [1], которая помогает разобраться в том, как получить математическую модель в форме обыкновенных дифференциальных уравнений (для динамических систем различной физической природы), а также позволяет понять связь поведения моделируемых объектов с характером решений полученных уравнений.

Обычно в лекционных курсах и на практических занятиях по теме “Дифференциальные уравнения” серьезное внимание уделяется аналитическим методам их решения и исследования [2]. Но аналитические методы накладывают жесткие ограничения на вид уравнения. Для большинства дифференциальных уравнений не известны способы построения точного аналитического решения, и здесь на помощь приходят численные методы.

В настоящее время численные методы решения дифференциальных уравнений хорошо разработаны. В этом материале объясняются основные идеи их построения на примере наиболее простых методов. Их изучение составляет первую часть работы.

Применение любого численного метода, вообще говоря, всегда позволяет найти решение дифференциального уравнения лишь приближенно. Причем, величины погрешностей точно заранее не известны, и многие численные методы не дают способов их оценки. Поэтому очень важно знать источники этих ошибок, возникающих при численном интегрировании дифференциальных уравнений, уметь прогнозировать “качество” численного метода в конкретной ситуации. Источники ошибок и их исследование составляет вторую часть этой работы.

1. Численные методы решения задачи Коши.

Данный вопрос будет рассмотрен на примере дифференциального уравнения

$$dy/dx = f(x,y) \quad (1)$$

Все ниже сказанное в равной мере может быть отнесено и к системам дифференциальных уравнений (в этом случае $y \in R^n$, f — вектор-функция, а независимая переменная x часто интерпретируется как время и обозначается через t : $y' = f(t,y)$). Уравнение (1) порождает поле направлений, которое в каждой точке области существования правой части определяет направление касательной к решению $y=y(x)$, проходящему через эту точку. Значение функции f можно интерпретировать также как мгновенное значение скорости изменения переменной y при возрастании независимой переменной x .

Пусть требуется решить задачу Коши для начальной точки (x_0, y_0) . Зададим ряд последовательных значений независимой переменной x

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

где $x_{n+1} = x_n + h$ (величина h может быть переменной, а может изменяться в процессе счета). Оценку решения в точке x_n будем обозначать через y_n .

Рассматривая h как малую величину, и считая, что решение $y(x)$ является достаточно гладким, представим неизвестное значение $y(x_n + h)$ в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки x_n

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + 1/2h^2 y''(x_n) + \dots \quad (2)$$

Подставляя в (2) вместо $y(x_n)$, $y'(x_n)$ и т.д. их численные оценки и ограничиваясь конечным числом членов в ряде Тейлора, Вы будете получать различные численные оценки y_{n+1} значения (2). Это и есть процесс математического моделирования при численном счете.

Разные численные методы отличаются числом учтенных членов и способами численного оценивания производных. Все методы при этом можно разделить на две большие группы.

К первой группе относятся, так называемые, одношаговые методы. В них на каждом шаге запоминается только одно последнее значение y_n , а предыдущие ($y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$) - забываются. Оценки производных в (2) при этом определяются путем вычисления производных $y'(x)=f(x,y)$ в точках x,y расположенных в окрестности последней вычисленной точки x_n, y_n .

Ко второй группе относятся многошаговые методы, в которых оценки производных в (2) строятся по значениям $f(x_n, y_n), f(x_{n-1}, y_{n-1}), f(x_{n-2}, y_{n-2}) \dots$. Таким образом, в этих методах используются результаты предыдущих шагов вычислительного процесса $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$. Заметим, что при этом в некоторых методах вместо разложения (2) используются разложения в окрестности x_{n-j} для $j \geq 0$.

$$y(x_n+h) = y(x_{n-j}) + (j+1)hy'(x_{n-j}) + 1/2 \cdot (j+1)^2 h^2 y''(x_{n-j}) + \dots \quad (3)$$

Поясним сказанное выше на примере построения простых методов численного интегрирования. Самый простой метод получается при замене в (2) значения $y(x_n)$ его оценкой y_n , значения $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ его оценкой $f(x_n, y_n)$. Если значение $\delta_n = y(x_n) - y_n$ имело более высокий порядок малости по сравнению с h , то

$$y(x_n + h) = y_n + hf(x_n, y_n) + o(h^2)$$

Положим

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot k_1; \quad k_1 = f(x_n, y_n) \quad (4).$$

Мы получили метод Эйлера или метод касательных (рис.1).

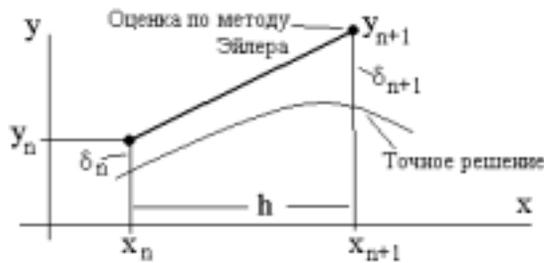


Рис.1

Очевидно, что его погрешность на каждом шаге начинается в общем случае с членов второго порядка по h . Разностная формула (4) является точной до членов порядка h . Поэтому метод Эйлера относится к методам первого порядка. Чтобы получить метод второго порядка, точный до членов с h^2 , необходимо использовать оценку второй производной в (2) нулевого порядка точности по h . Поскольку $y'(x_n + h) = y'(x_n) + y''(x_n)h + o(h)$, то

$$\begin{aligned} y''(x_n) &= (y'(x_n+h) - y'(x_n) + o(h))/h = (f(x_n+h, y_n + hf(x_n, y_n) + o(h)) - f(x_n, y_n) + o(h))/h = \\ &= (f(x_n+h, y_n + hf(x_n, y_n)) - f(x_n, y_n))/h + o(h)/h \end{aligned} \quad (5)$$

Из (2) после несложных преобразований получим:

$$y_{n+1} = y_n + h(k_1 + k_2)/2$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + h \cdot k_1). \quad (6)$$

При этом,

$$y(x_n + h) = y_{n+1} + o(h^2).$$

Разностные формулы (6) определяют метод Штермера, являющийся одним из методов второго порядка.

Заметим, что метод Эйлера (4) использует в качестве оценки среднего значения скорости изменения переменной y (при изменении x на промежутке от x_n до $x_n + h$) значение k_1 — мгновенное значение этой скорости в начале промежутка, в точке (x_n, y_n) , а метод Штермера — усредненное значение мгновенной скорости в двух точках - в точке (x_n, y_n) и точке $(x_n + h, y_n + h \cdot k_1)$, получаемой по методу Эйлера (рис.2).

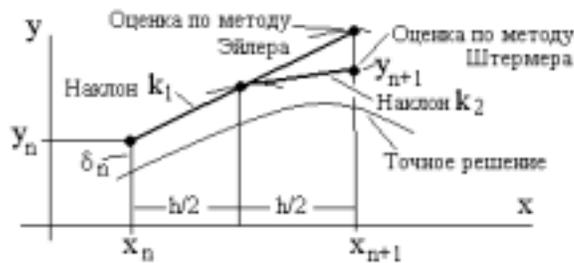


Рис.2

Аналогично поступая, можно построить одношаговые методы более высокого порядка точности. Наиболее распространенный среди них — метод Рунге–Кутты четвертого порядка. В этом методе вычислительный процесс математического моделирования решения описывается следующими формулами

$$y_{n+1} = y_n + (h/6) (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h/2, y_n + (h/2)k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + h/2, y_n + (h/2)k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3). \quad (7)$$

Для него $y(x_n + h) = y_{n+1} + o(h^4)$.

Построенные одношаговые методы используют заданное значение h . При этом метод e -го порядка на каждом шаге совершает ошибку, главный член которой имеет вид $\Delta = P \cdot h^{e+1}$, где P - неизвестная постоянная. Правильный выбор шага требует оценки величины P . Оценивая величину главного члена погрешности, можно конструировать методы с автоматической регулировкой шага.

Поясним идею регулировки шага на примере Эйлера. Для этого обратим внимание, что

$$y(x_n + h) = y_{n+1}^{\text{эйлера}} + o(h)$$

$$y(x_n + h) = y_{n+1}^{\text{штермера}} + o(h^2).$$

Прибавляя и вычитая в (6) член $h \cdot k_1$, получим

$$y_{n+1}^{\text{штермера}} = y_{n+1}^{\text{эйлера}} + h(k_1 - k_2)/2.$$

Следовательно, погрешность на шаге метода Эйлера

$$\delta_n^{\text{эйлера}} = o(h) = h(k_1 - k_2)/2 + o(h^2)$$

и её главный член

$$\Delta = (h^2/2)(k_1 - k_2)/h.$$

Таким образом, дополнительное измерение поля направлений можно использовать не для уточнения оценки решения, а для определения главного члена погрешности на шаге.

Метод Эйлера с регулировкой шага будет иметь следующий вид. Пусть ε – заданная точность. Вычисляется

$$\begin{aligned} \overline{y}_{n+1} &= y_n + hk_1, & \overline{x}_{n+1} &= x_n + h \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(\overline{x}_{n+1}, \overline{y}_{n+1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Определяется $\Delta = h(k_1 - k_2)/2$.

Если $1/5 \cdot \varepsilon \leq \Delta \leq 5 \cdot \varepsilon$, то полагают $x_{n+1} = \overline{x}_{n+1}$, $y_{n+1} = \overline{y}_{n+1}$: если погрешность мала так, что $\Delta < 1/5 \cdot \varepsilon$, то $x_{n+1} = \overline{x}_{n+1}$, $y_{n+1} = \overline{y}_{n+1}$, $h := 2h$, т.е. происходит удвоение шага, если погрешность велика так, что $\Delta > 5 \cdot \varepsilon$, то $h := h/2$ и происходит повторное вычисление по формулам (8).

Заметим, что обычно идея регулировки шага по главному члену погрешности применяется к методу Рунге-Кутты четвертого порядка (модификация Мерсона).

Все рассмотренные к данному моменту методы являются одношаговыми методами, т.к. для вычисления y_{n+1} из предыдущих значений $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$ используют только одно y_n .

Поясним теперь идею построения многошаговых методов на примере метода второго порядка. Для этого оценим $y''(x_n)$, используя значения y_n и y_{n-1}

$$\begin{aligned} y'(x_n) &= f(x_n, y(x_{n-1})) = f(x_n, y_{n-1}) + o(h^2). \\ y''(x_{n-1}) &= f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) = f(x_{n-1}, y_{n-1}) + o(h^2). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$y'(x_{n-1}) = y'(x_n) - hy''(x_n) + o(h).$$

Отсюда

$$y''(x_n) = (y'(x_n) - y'(x_{n-1}))/h + o(h)/h = (f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}))/h + o(h)/h$$

Подставляя полученные выражения в (4), получим многошаговый вариант метода Штермера

$$y_{n+1} = y_n + (h/2) (3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})). \quad (9)$$

При этом

$$y(x_{n+1}) = y_{n+1} + o(h^2).$$

2. Основные источники ошибок методов численного интегрирования.

При численном интегрировании дифференциальных уравнений (и систем дифференциальных уравнений) происходит замена дифференциального уравнения на соответствующее разностное уравнение. При этом на каждом шаге совершается некоторая

ошибка - ошибка шага выбранного метода. Ошибки, совершенные на разных шагах накапливаются и порождают общую ошибку интегрирования δ_n .

Таким образом, Вы видите, что за появление δ_n "ответственны" два процесса. Первый — процесс возникновения ошибки на шаге. Второй - процесс преобразования уже возникшей ошибки на последующих шагах (накопление ошибок). Первый процесс — более простой, второй — более сложный.

В этом разделе будут проанализированы основные источники ошибок на примере метода Эйлера.

Обучаемому с помощью программной лаборатории предоставляется возможность проверить те выводы, которые будут сделаны в результате анализа для метода Эйлера, а также с помощью эксперимента выяснить насколько они сохраняются для других методов численного интегрирования.

Проанализируем процесс численного моделирования в методе Эйлера. Будем пока предполагать, что все вычисления выполняются точно. Попытаемся выразить δ_{n+1} через δ_n .

$$\delta_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}.$$

Из (2) и (4) $\delta_{n+1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + h^2/2 \cdot y''(x_n + \xi) - y_n - hf(x_n, y_n)$, где $\xi \in [0, h]$.

Учитывая, что $y(x_n) = y_n + \delta_n$, и используя теорему о среднем, получим

$$\delta_{n+1} = (1+h (\partial f/\partial y)(x_n, y_n)) \delta_n + h^2/2 y''(x_n + \xi) \quad (10)$$

Обозначим $(h^2/2) y''(x_n + \xi) = e_n$.

Первый член определяет преобразование на шаге уже имевшейся ошибки δ_n , а второй член e_n – дополнительную ошибку данного шага (ошибка аппроксимации).

Учитывая, что $y''(x_n + \xi) = y''(x_n) + o(h)$ для $\xi \in [0, h]$ и используя (5), получим

$$e_n = (2/h^2)((\partial f/\partial x)(x_n, y_n) + (\partial f/\partial y)(x_n, y_n) + o(h^2)) \delta_n \quad (11)$$

Какие выводы можно сделать из (10) и (11)? Во-первых, если шаг h слишком велик, то основной "вклад" в ошибку в (10) внесет ошибка аппроксимации e_n . Но даже, если h достаточно мало, ошибка аппроксимации (11) все равно может стать очень большой, если вычислительный процесс (x_n, y_n) приближается к области, в которой функция f или одна из её производных $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ принимают неограниченные значения. Следует обратить внимание на то, что с уменьшением h область, в которой ошибка аппроксимации e_n будет велика, будет уменьшаться, хотя полностью никогда не исчезнет.

Что же представляют собой области больших e_n с точки зрения дифференциального уравнения? Возможно, Вы уже заметили, что существует непосредственная связь между областями больших ошибок e_n и областями нарушения достаточных условий существования и единственности решения в теореме Коши. Действительно, как следует из теоремы Коши-Пикара [2] неограниченность $f(x, y)$ нарушает достаточное условие существования решения вида $y=y(x)$, а неограниченность $\partial f/\partial y$ - нарушает достаточные условия его единственности. Таким образом, в окрестностях особых решений дифференциальных уравнений, а также в окрестностях изоклин вертикальных наклонов можно ожидать ошибок аппроксимации при численном интегрировании. Возможна также геометрическая интерпретация особенностей таких областей. Действительно, в области больших значений f в методе Эйлера (4) происходит шаг по x на величину h , а y изменяется вдоль прямой большого наклона, равного f (рис.1). В областях с неограниченными значениями частных производных $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ происходит "бесконечно" быстрая "переориентация" поля направления. При этом ломанная Эйлера как бы не успевает отслеживать изгиб интегральной кривой.

Рассмотрим теперь первое слагаемое в (10). Оно определяет преобразование ранее возникшей ошибки на текущем шаге. Если $|1+h(\partial f/\partial y)(x_n, y_n)| < 1$, то ранее возникшая ошибка

подавляется, в противном случае происходит усиление ошибки. Заметим, что как бы ни было мало h , если процесс (x_n, y_n) приближается к области неограниченных значений $\partial f/\partial y$, то ошибка начинает неограниченно усиливаться.

Процесс усиления, неограниченного нарастания (в процессе численного интегрирования) однажды возникшей ошибки называют вычислительной неустойчивостью. Рассмотрим этот процесс отдельно, а именно, как процесс преобразования однажды возникшей ошибки. Пусть на шаге n ошибка равняется δ_n . Тогда новое значение y_{n+1} будет подсчитано с ошибкой δ_{n+1} .

$$y_{n+1} + \delta_{n+1} = y_n + \delta_n + hf(x_n, y_n + \delta_n) + o(h).$$

Считая δ_n , h малыми и отбрасывая нелинейные по δ_n, h члены в разложении Тейлора, в линейном приближении получим

$$\delta_{n+1} = \delta_n [1 + h (\partial f/\partial y)(x_n, y_n)].$$

Вычислительная неустойчивость будет наблюдаться при таких h , при которых выражение $|1 + (\partial f/\partial y)(x_n, y_n)h|$ принимает значения, больше единицы. Для систем уравнений аналогичное условие заключается в том, что определитель матрицы $(E + (Df/Dy)(x_n, y_n)h)$ (где E — единичная матрица, а (Df/Dy) — матрица Якоби по переменным y) должен стать больше единицы. Например, для системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 0,1x \\ \dot{y} &= -x - 0,1y \end{aligned} \quad (12)$$

(штрих означает дифференцирование по t), матрица Якоби будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -0,1 & 1 \\ -1 & -0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - h \cdot 0,1 & h \\ -h & 1 - h \cdot 0,1 \end{pmatrix}$$

Её определитель

$$\Delta = 1,01 \cdot h^2 - 0,2 \cdot h + 1 > 0.$$

Условие $|\Delta| > 1$ будет выполнено при $h > 0,2/1,01 \approx 0,2$.

Следовательно, начиная с этого значения, при численном интегрировании по методу Эйлера для данной системы возникнет вычислительная неустойчивость (полезно это проверить в вычислительном эксперименте).

До сих пор мы предполагали, что все вычисления (4) производятся точно. В действительности, это, конечно, не так, и вычислительные ошибки могут существенно влиять на общую точность решения.

Проанализировать в полном объеме этот процесс сложно, поэтому рассмотрим только влияние ошибок конечно-разрядной арифметики при выполнении операции сложения в (4). Предположим, что дифференциальное уравнение $dy/dx = f(x, y)$ имеет частное решение $y = a$, где величина $a \neq 0$ и имеет, например, порядок 1. В этом случае $y = a$ есть изоклина горизонтального наклона. Предположим также что решение задачи Коши для $x_0, y(x_0) = y_0 \neq a$ стремится с ростом x к значению $y = a$ (рис.3). Тогда в процессе численного интегрирования $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Предположим также, для определенности, что интегрирование производится с шагом $h \approx 10^{-4}$, а разрядность вещественной переменной на компьютере составляет семь разрядов (в десятичной системе). Начиная с некоторого шага $f(x_n, y_n)$, как очевидно, станет меньше 10^{-3} . При этом произведение $h \cdot f(x_n, y_n)$ в (4) станет меньше 10^{-7} . При сложении этого числа

с $y_n \approx a \approx 1$ произойдет выравнивание порядков слагаемых и старший значащий разряд произведения $h \cdot f(x_n, y_n)$ выйдет за пределы разрядной сетки и будет утерян. Следовательно, к y_n будет прибавлен чистый нуль! При всех последующих шагах будет сохраняться постоянное (!) значение $y_n \neq a$.

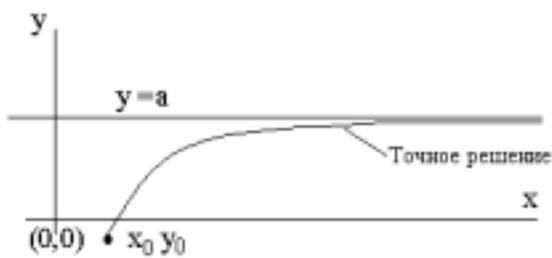


Рис.3

Заметим, что с уменьшением h эта ошибка станет только больше. Например, при $h=10^{-7}$ изменения y_n прекратятся начиная уже со значений $f(x_n, y_n) \approx 1$ (рис.4).



Рис.4

Заметим, что подобные вычислительные эффекты будут наблюдаться также при интегрировании систем уравнений, имеющих устойчивые состояния равновесия, расположенные в точках, отличных от нулевой.

В подобных ситуациях зависимость ошибки от шага интегрирования имеет вид, качественно близкий к показанному на рис.5.



Рис.5

Особенно интересные эффекты, связанные с численным интегрированием, могут наблюдаться в существенно-нелинейных системах, свойства которых значительно изменяются при переходе фазовых траекторий из одних областей фазового пространства в другие. Поясним это, сравнив два примера. В качестве первого рассмотрим линейную

систему (12). Её состояние равновесия находится в точке ноль, а квадрат расстояния до него $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Вычисляя в силу системы (12) производную от времени, получим

$$d\rho^2/dt = -2 \cdot 0,1 \rho^2 < 0 \quad (13)$$

Если же в силу разностной формулы Эйлера вычислить скорость изменения ρ^2 на шаге вычислительного процесса, то

$$\rho_{n+1}^2 - \rho_n^2 / h = (-2 \cdot 0,1 + (0,1^2 + 1) h) \rho_n^2 \quad (14)$$

Чтобы величина (14), также как и (13) была отрицательна (только в этом случае при численном счете будет наблюдаться устойчивость состояния равновесия) необходимо, чтобы шаг h был достаточно мал $0,2 h / 1,01 > h$

(Заметьте, что мы получили несколько другим способом ранее выведенное условие устойчивости процесса численного интегрирования для (12)). Выбирая такой шаг, Вы будете получать качественно правильные результаты при счете.

Проведем аналогичное рассмотрение существенно-нелинейной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - (x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= -x - (x^2 + y^2)y, \end{aligned} \quad (15)$$

которая отличается от (12) тем, что коэффициент $0,1$ заменен на ρ^2 .

Нетрудно показать, что для неё

$$d\rho^2/dt = -2\rho^4 < 0.$$

Обратите внимание, что при малых ρ $2\rho^4 \ll 2 \cdot 0,1 \rho^2$. Это означает, что скорость приближения фазовой траектории к состоянию равновесия в системе (15) убывает существенно быстрее, чем в (12). Это должно приводить к тому, что шаг h , достаточно малый для устойчивости вычислительного процесса при больших ρ , может стать недостаточно малым при приближении к состоянию равновесия.

Действительно, для (15)

$$(\rho_{n+1}^2 - \rho_n^2) / h = (-2\rho_n^2 + h(\rho_n^4 + 1)) \rho_n^2.$$

Пренебрегая величиной ρ_n^4 по сравнению с единицей, получим приближенное условие убывания расстояния до состояния равновесия при численном интегрировании:

$$\rho_n^2 > h/2.$$

Таким образом, при сколь угодно малом h найдется такая окрестность состояния равновесия системы (15), в которой точка (x_n, y_n) будет удаляться от него в процессе интегрирования. Следовательно, при численном интегрировании методом Эйлера у системы (15) будет обнаруживаться предельный цикл, которого в действительности нет. Его радиус будет примерно равен $\sqrt{h/2}$ (рис.6).



Рис.6

Важно отметить, что природа описанного эффекта скрыта не в численном методе, а в негрубости самого уравнения (15).

3. Исследования в программной лаборатории.

Для проведения экспериментального исследования моделирования решения дифференциальных уравнений с помощью вычислительных процессов разработана программная лаборатория “Особенности численного моделирования решений дифференциальных уравнений”, функционирующая в режиме MS DOS.

Для начала работы достаточно запустить на выполнение модуль *lab_Diff.exe*. При этом в папке вместе с этим модулем должен находиться набор файлов, входящих в комплект программы.

При выполнении вычислительных экспериментов необходимо понять характер проявления различных источников ошибок численного интегрирования для метода Эйлера и уметь объяснить причины возникновения ошибок в конкретных примерах. Рекомендуется также выполнить экспериментальное исследование метода Штермера, Рунге-Кутты, а также метода Эйлера с регулировкой шага.

Организация интерфейса в программе достаточно естественна и не требует пояснений. Программа снабжена системой справочной информации по методам интегрирования и источникам ошибок.

Все вычислительные эксперименты проводятся в программе на фиксированном наборе специально подобранных примеров:

1. $dy/dx = (1 - y^2)^{1/2} dx;$

2. $dy/dx = (y + (y^2 - 4x^2)^{1/2})/x;$

3. $dy/dx = (4 - y^2)^{1/2}/y;$

4. $dy/dx = 0,5(y^2 - 1) ;$

5. $dy/dx = xy(1 + 2y)/(1 - y^2);$

6. $dy/dx = -x + (x^2 + 2y)^{1/2} ;$

7. $dy/dx = x(4 - y^2);$

8. $dy/dx = 1 - y^4 ;$

9. $x' = 1 - y^2; y' = xy(1 + 2y);$

10. $x' = y - 0,1x ; y' = -x - 0,1y$

11. $x' = y - x(x^2 + y^2); y' = -x - y(x^2 + y^2)$

12. $x' = -x + 2y ; y' = -2x + y$

13. $dy/dx = -xy(1 - x^2)$

Литература

1. Компьютерная программа “Элементы математического моделирования” // Рег. ном. ОФАП ВШ России 1992г. 025.7000.290. ЦИФ Гос ФАП 5092000058. Городецкий С.Ю., Котва Т.А., Скорнякова Б.Л., Хентов А.А., Шпилькерман Б.М.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1950.