

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Методы оптимизации в примерах и задачах

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета вычислительной математики и кибернетики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010400 «Информационные технологии», 010500 «Прикладная математика и информатика» и по специальности 010501 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2010

УДК 531.38;531.39
ББК 32.81
М-54

М-54 МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ
/ Авторы: Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 101 с.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент **А.В. Баркалов**

В издание включены теоретический материал и наборы задач по шести основным разделам курса "Методы оптимизации": динамическому программированию, элементам выпуклого анализа, теории условий оптимальности, численным методам математического программирования, вариационному исчислению и оптимальному управлению.

В начале каждого раздела приведены необходимые теоретические сведения и разобраны типовые примеры.

Ответственный за выпуск: председатель методической комиссии факультета ВМК ННГУ, д.ф.-м.н., проф. **Л.П. Жильцова**

УДК 531.38;531.39
ББК 32.81

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2010

Оглавление

1. Динамическое программирование и метод рекуррентных уравнений Беллмана.....	4
1.1. Детерминированные управляемые процессы, теория и примеры.....	4
1.2. Управляемые марковские процессы с доходами, теория и примеры.....	14
1.3. Контрольные задания.....	17
2. Элементы выпуклого анализа.....	26
2.1. Базовые понятия и факты.....	26
2.2. Контрольные задания.....	30
3. Условия оптимальности в задачах математического программирования.....	32
3.1. Теория и примеры.....	32
3.2. Контрольные задания.....	42
4. Вычислительные методы математического программирования.....	46
4.1. Основные понятия.....	46
4.2. Поиск минимума унимодальной функции на отрезке.....	48
4.3. Поиск минимума выпуклой дифференцируемой функции.....	52
4.4. Поиск локального минимума в задачах без ограничений.....	53
4.5. Вычислительные методы решения задач с ограничениями.....	59
4.6. Методы липшицевой многоэкстремальной оптимизации.....	64
4.7. Контрольные задания.....	70
5. Вариационное исчисление.....	76
5.1. Основные понятия.....	76
5.2. Простейшая задача с фиксированными концами и ее обобщения.....	77
5.3. Задачи со скользящими концами.....	81
5.4. Вариационные задачи на условный экстремум.....	83
5.5. Контрольные задания.....	86
6. Оптимальное управление.....	90
6.1. Теория и примеры.....	90
6.2. Контрольные задания.....	96
Литература.....	100

1. Динамическое программирование и метод рекуррентных уравнений Беллмана

1.1. Детерминированные управляемые процессы, теория и примеры

При постановке задач динамического программирования используются понятия, характерные для теории динамических систем: «управляемая динамическая система» и «состояние» [1]. Напомним эти понятия.

Пусть имеется изменяющийся во времени объект, на который осуществляется внешнее воздействие $u(t)$, трактуемое как *управление*, а $x(t)$ – некоторое описание этого объекта в момент времени t . Если при известном управлении $u(\tau)$, ($\tau \in [t, \bar{t}]$), зная описание $x(t)$ в момент времени t , можно однозначно определить его значение $x(\bar{t})$ для любого $\bar{t} > t$, то такое описание называют *полным*. Полное описание называют *состоянием*, множество возможных состояний – *пространством состояний*. Сам объект, допускающий возможность полного описания, называют *динамической системой*.

Любая динамическая система предполагает наличие однозначного оператора F , позволяющего по $x(t)$ определить $x(\bar{t})$ для любого допустимого момента времени $\bar{t} > t$. Поскольку для управляемой системы оператор F зависит от управления, должны быть заданы множества U их возможных значений, зависящие от текущего момента времени и текущего состояния. Таким образом, динамическая система определяется следующим набором: $\langle X, T, F, U \rangle$, где X – пространство состояний, T – множество допустимых моментов времени.

Рассмотрим управляемую динамическую систему с дискретным временем, состояние которой в момент времени k описывается вектором $x_k \in R^n$, а закон изменения ее состояния определяется соотношением, задающим оператор динамической системы: $x_{k+1} = f_{k+1}(x_k, u_{k+1})$. Управления u_{k+1} выбираются из множеств управлений, допустимых в текущий момент времени k для состояния x_k , т.е. $u_{k+1} \in U_{k+1}(x_k) \subset R^m$, где множества $U_{k+1}(x_k)$ заданы.

Будем рассматривать только такие задачи, в которых дискретное время k изменяется в заранее известных пределах: $k = 0, 1, \dots, N-1$, где N задано. Известно, что x_0 принадлежит заданному множеству начальных состояний X_0 . Требуется также, чтобы конечное состояние x_N принадлежало заданному множеству X_N допустимых финальных состояний.

Каждому переходу из состояния x_k в следующее состояние поставим в соответствие функцию затрат (или доходов) на текущем шаге $d_{k+1}(x_k, u_{k+1})$,

зависящую, кроме x_k , также от момента времени и применяемого управления. Требуется найти такое начальное состояние $x_0^* \in X_0$ и такой допустимый набор управлений u_1^*, \dots, u_N^* , переводящий систему в одно из состояний $x_N^* \in X_N$, чтобы общие затраты, являющиеся аддитивной функцией затрат на отдельных шагах, были минимальны.

Заметим, что исходные формулировки прикладных задач оптимизации часто не соответствуют приведенной выше стандартной постановке, хотя после соответствующего преобразования могут быть к ней приведены [2, 3]. Для их успешного решения методами динамического программирования часто необходимо искусственно переформулировать задачу так, чтобы она оказалась записанной через некоторый управляемый динамический процесс. В этом случае наиболее важно правильно ввести понятие состояния. Критерием правильности выбора является соблюдение нескольких требований: новое состояние, а также функция затрат могут зависеть только от предыдущего состояния, текущего управления и момента времени; ограничения на текущее управление могут зависеть только от предыдущего состояния и момента времени. Нарушение хотя бы одного из правил говорит о неправильном выборе состояния или управления.

Для решения задач динамического программирования используется подход, разработанный в лаборатории Р. Беллмана в 50-х годах XX века [2, 4]. Согласно этому подходу, вместо исходной N -шаговой задачи нужно рассмотреть набор вспомогательных задач, подобных исходной, но включающих различное количество шагов (от 1 до N). В этих задачах требуется определить оптимальные затраты: на одном последнем шаге, двух последних шагах, трех, и т.д. при условии, что считается известным состояние, в котором оказался управляемый динамический процесс перед выполнением этих завершающих шагов. Подход Р. Беллмана основан на том, что можно установить рекуррентную связь между функциями оптимальных затрат в задачах с количеством шагов $(k + 1)$ и k .

Пусть Y_k – множество состояний, из которых (при использовании допустимых управлений) можно ровно за k шагов попасть в одно из состояний финального множества X_N . При этом можно считать, что $Y_0 = X_N$. Возьмем произвольное $x_{N-k} \in Y_k$ и обозначим через $S_k(x_{N-k})$ функцию, описывающую зависимость оптимальных затрат от состояния x_{N-k} за k последних шагов, переводящих систему из x_{N-k} в X_N . Такие функции называют *функциями Беллмана*.

Поскольку для состояний x_{N-1} из множества Y_1 переход в X_N происходит за один шаг, то функция оптимальных затрат $S_1(x_{N-1})$ может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1(x_{N-1}) &= \min \{ d_N(x_{N-1}, u_N) \} & (1.1) \\ u_N &\in U_N(x_{N-1}) \\ f_N(x_{N-1}, u_N) &\in X_N. \end{aligned}$$

Заметим, что второе ограничение необходимо для того, чтобы гарантировать достижение заданного финального множества X_N .

Значение u_N , при котором достигается минимум в этом соотношении, обозначим через $u_N^*(x_{N-1})$.

Можно доказать, что функция оптимальных затрат $S_{k+1}(x_{N-k-1})$ каждой следующей задачи рекуррентно выражается через предыдущую $S_k(x_{N-k})$, а именно, для $x_{N-k-1} \in Y_{k+1}$:

$$\begin{aligned} S_{k+1}(x_{N-k-1}) &= \min \{ d_{N-k}(x_{N-k-1}, u_{N-k}) + S_k(f_{N-k}(x_{N-k-1}, u_{N-k})) \}, & (1.2) \\ u_{N-k} &\in U_{N-k}(x_{N-k-1}), \\ f_{N-k}(x_{N-k-1}, u_{N-k}) &\in Y_k, \end{aligned}$$

где в ограничениях последнее условие обеспечивает попадание точки x_{N-k} в область определения функции S_k .

Пусть $u_{N-k}^*(x_{N-k-1})$ – значение управления, при котором достигается минимум затрат в (1.2). Выражения $u_k^*(x_{k-1})$ определяют для каждого момента времени оптимальные правила управления в виде функций от текущего состояния динамического процесса, т.е. задают закон оптимального управления в форме оптимального регулятора по состоянию.

Оптимальное начальное состояние x_0^* можно получить из решения следующей задачи:

$$x_0^* = \operatorname{argmin} \{ S_N(x_0) : x_0 \in X_0 \}. \quad (1.3)$$

Систему (1.1)-(1.3) называют *рекуррентными уравнениями Беллмана*.

Значения оптимального управления в явном виде можно последовательно определить следующим образом: $u_1^* = u_1^*(x_0)$, $x_1^* = f_1(x_0^*, u_1^*)$, ...
 $u_k^* = u_k^*(x_{k-1})$, $x_k^* = f_k(x_{k-1}^*, u_k^*)$, и так далее, включая u_N^* и x_N^* .

Заметим, что уравнения (1.1), (1.2) определяют следующее правило построения управления: вне зависимости от того, каким образом управляемый процесс на шаге k попал в состояние x_k , далее надо применять управление, оптимальное для этого состояния в завершающем $(N-k)$ -шаговом процессе с

учетом оптимального продолжения, и в состоянии x_k нужно применять правило $u_{k+1}^*(x_k)$, определяющее первый «такт» такого управления. Это одна из возможных формулировок *принципа Беллмана в форме достаточного условия*. Такой выбор управления для текущего шага учитывает его влияние на будущее, а также то, что последствия неправильного выбора, совершенного в данный момент, в будущем исправить нельзя.

Уравнения (1.1)-(1.3) записаны в форме, определяющей решение от конца процесса. Возможна запись аналогичных уравнений относительно начала процесса. При этом функции Беллмана (обозначим их для новой формы записи через $Z_k(x_k)$) должны определять оптимальные затраты при переходе из состояний начального множества X_0 в состояние x_k за k шагов.

Выше уже было отмечено, что при использовании метода Беллмана первым важным этапом решения является такая постановка исходной задачи, при которой она будет укладываться в схему динамического программирования. Часто это можно сделать несколькими разными способами. Важным является также то, что на основе рекуррентных соотношений Беллмана можно решать задачи, несколько отличающиеся от приведенной стандартной постановки. Например, функция общих затрат может не являться аддитивной, а иметь вид произведения затрат $d_k(x_{k-1}, u_k)$ по шагам (при положительности этих затрат) или максимума из этих затрат. Естественно, это приведет к соответствующим изменениям в записи (1.2) уравнений Беллмана.

Ниже применение метода динамического программирования продемонстрировано на примере трех задач. Первые две – стандартные, третья – нет. Первая задача решается таблично, вторая – аналитически.

Пример 1. Задача об оптимальном графике закупок

Предприятие планирует на период продолжительностью N дней выпуск фруктовых консервов. Стоимость покупаемой партии фруктов есть $P(x)$ (табл.

1.1) условных единиц и зависит от ее размера x , который всегда есть число, кратное Δ . Сырье в виде фруктов может поставляться на предприятие раз в день в течение всего периода работы. Если фрукты не используются в тот же день, когда они доставлены, их следуют хранить в холодильнике, емкость которого ограничена величиной E . Арендная плата за хранение зависит от количества хранимых фруктов x и составляет $Q(x)$ условных единиц в сутки. Требуется определить количество фруктов, которое следует закупать в каждый из дней, чтобы минимизировать суммарные затраты на покупку и хранение при условии, что суточная потребность составляет α условных единиц. Решить задачу, приняв, что $N = 3$, $\Delta = 100$, $E = 600$ и $\alpha = 300$. При решении считать, что запасы фруктов в начале и в конце рабочего периода отсутствуют.

Для решения данной задачи представим ее в форме задачи динамического программирования. Обозначим через u_k количество фруктового сырья,

закупаемое предприятием в k -ый день. За состояние x_k разумно выбрать количество фруктов, оставшееся в k -ый день не востребуемым. Тогда закон изменения состояния системы имеет вид: $x_{k+1} = x_k + u_{k+1} - \alpha$, где $k = 0, \dots, N - 1$, а, поскольку по условию задачи начальные и конечные запасы сырья отсутствуют, то $x_0 = x_N = 0$. При этом функция, описывающая затраты в k -ый день, может быть записана как $d_{k+1}(x_k, u_{k+1}) = P(u_{k+1}) + Q(x_k)$.

Таблица 1.1

Стоимость закупаемых фруктов $P(x)$, арендная плата $Q(x)$

x	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$P(x)$	150	280	410	540	660	780	890	1000	1100
$Q(x)$	10	20	30	50	70	100	-	-	-

Составим уравнения Беллмана. Пусть предприятию осталось отработать последний третий день, тогда система находится в состоянии x_2 и минимальные затраты за последний день зависят от u_3 и составляют

$$S_1(x_2) = \min\{P(u_3) + Q(x_2) : u_3 = 300 - x_2 \geq 0\} = P(300 - x_2) + Q(x_2).$$

Областью определения функции $S_1(x_2)$ является отрезок $0 \leq x_2 \leq 300$. Поскольку x_2 , в силу кратности Δ , принимает лишь конечное число значений, удобно представить функцию $S_1(x_2)$ в табличной форме (см. табл. 1.2).

Теперь предположим, что предприятию осталось отработать два дня. Минимальные затраты в оставшемся двухшаговом процессе определяются значением функции $S_2(x_1)$, выражаемой через значения функции S_1 :

$$S_2(x_1) = \min\{P(u_2) + Q(x_1) + S_1(x_1 + u_2 - 300) : u_2 \in U_2(x_1)\},$$

где множество $U_2(x_1) = \{u_2 : \max\{300 - x_1; 0\} \leq u_2 \leq 600 - x_1\}$. Его вид получается следующим образом: т. к. область определения функции $S_1(x_2)$ есть $0 \leq x_2 \leq 300$ и $x_2 = x_1 + u_2 - 300$, то объединяя соотношения, получаем верхнюю границу множества изменений u_2 . Нижняя граница получается аналогично, для этого достаточно принять во внимание, что количество «лишних» фруктов не может быть меньше нуля. Результаты вычисления функции $S_2(x_1)$ представлены правой части табл. 1.2.

Приведем пример вычисления значения $S_2(100)$:

$$S_2(100) = \min \left\{ \begin{array}{l} 280 + 10 + S_1(0) = 700, \quad u_2 = 200 \\ 410 + 10 + S_1(100) = 710, \quad u_2 = 300 \\ 540 + 10 + S_1(200) = 720, \quad u_2 = 400 \\ 660 + 10 + S_1(300) = 700, \quad u_2 = 500 \end{array} \right\} = 700,$$

где минимум достигается при $u_2 = 200$ и при $u_2 = 500$.

Таблица 1.2

Значения функций $S_1(x_2)$ и $S_2(x_1)$

x_2	$S_1(x_2)$	$u_3^*(x_2)$	x_1	$S_2(x_1)$	$u_2^*(x_1)$
0	410	300	0	810	600
100	290	200	100	700	200, 500
200	170	100	200	580	100
300	30	0	300	440	0
			400	340	0
			500	240	0
			600	130	0
			700	0	0
			800	0	0
			900	0	0

На последнем шаге вычислений, т.е. когда предприятию осталось отработать три дня, функция Беллмана имеет вид

$$S_3(x_0) = \min \{ P(u_1) + Q(x_0) + S_2(x_0 + u_1 - 300) : u_1 \in U_1(x_0) \}.$$

При этом, поскольку $x_0 = 0$, то достаточно вычислить эту функцию лишь в этой точке, поэтому

$$S_3(0) = \min \{ P(u_1) + Q(0) + S_2(u_1 - 300) : 300 \leq u_1 \leq 900 \} = 1220,$$

и указанное значение достигается как при $u_1 = 300$, так и при $u_1 = 600$, являющихся возможными значениями оптимального управления $u_1^*(x_0 = 0)$.

Чтобы по вычисленным функциям $S_1(x_2)$, $S_2(x_1)$ и $S_3(x_0)$ построить оптимальный план закупки фруктового сырья, нужно взять одно из найденных на последнем шаге значений $u_1^* = u_1^*(x_0)$, например, $u_1^* = 300$ и найти оптимальное $x_1^* = x_0 + u_1^* - 300 = 0 + 300 - 300 = 0$. Далее, в таблице для функции $S_2(x_1^*)$, найти величину $u_2^*(x_1)$, соответствующую $x_1 = x_1^* = 0$ и затем вычислить $x_2^* = x_1^* + u_2^* - 300 = 0 + 600 - 300 = 300$. Наконец, по последней

таблице $S_1(x_2)$ для x_2^* вычислить значение $u_3^* = u_3^*(x_2^*)$. Повторяя аналогичные вычисления для $u_1^* = 600$, находим, что в задаче имеется два оптимальных плана закупок фруктов по дням: $(300, 600, 0)$ и $(600, 0, 300)$.

Пример 2. Задача об оптимальном графике лечения

Пусть на интервале времени $(0, T)$ больному должны сделать N инъекций лекарства. Стоимость одной инъекции равна $a > 0$. Примем, что в начальный момент $t = 0$ инъекция уже сделана, и в момент $t = T$ обязательно производится завершающая. В качестве свободных переменных выберем длины интервалов между N инъекциями: u_1, u_2, \dots, u_N , тогда интервал перед завершающей будет равен $T - (u_1 + \dots + u_N)$. Пусть издержки больного из-за наличия промежутка u_k составляют $\varphi(u_k)$ в условном стоимостном выражении. Функция $\varphi(u)$ будет считаться достаточно гладкой и строго выпуклой ($\varphi''(u) > 0$). Требуется за счет выбора длин интервалов u_k ($k = 1, \dots, N$) добиться минимума общих издержек в виде суммы:

$$\sum_{k=1}^N (a + \varphi(u_k)) + (a + \varphi(T - \sum_{i=1}^N u_i)).$$

Эта задача в исходной постановке отличается по форме записи от задач динамического программирования. В частности, она не включает понятия состояния, и, кроме того, последний элемент в функции затрат зависит от совокупности значений u_1, u_2, \dots, u_N .

Чтобы представить задачу в форме задачи динамического программирования, будем рассматривать промежутки между инъекциями u_1, u_2, \dots, u_N как управления, а в качестве дополнительного описания (обозначим его x_k) примем время, оставшееся до завершающей инъекции после проведения k -ой. Убедимся, что такое описание будет являться состоянием. Действительно, начальное значение $x_0 = T$, а каждое очередное значение x_k выразится через его текущее значение и очередное управление: $x_k = x_{k-1} - u_k$, где ограничения на выбор этого управления будут зависеть только от x_{k-1} , а именно: $u_k \in U_k(x_{k-1}) = (0, x_{k-1})$. Очевидно, что функция затрат на k -ом шаге имеет вид $d_k(x_{k-1}, u_k) = a + \varphi(u_k)$ для $k = 1, \dots, N-1$, а на N -ом $d_N(x_{N-1}, u_N) = a + \varphi(u_N) + a + \varphi(x_{N-1} - u_N)$. Таким образом, допустимая структура зависимости от параметров функции затрат на шаге также соблюдена. Следовательно, выбранное описание x_k можно принять в качестве состояния.

Составим уравнения Беллмана. Пусть все инъекции, кроме N -й, проведены и управляемый процесс находится в состоянии x_{N-1} , тогда минимальные (за счет выбора u_N) затраты в оставшемся одношаговом процессе составят:

$$S_1(x_{N-1}) = \min \{ (2a + \varphi(u_N) + \varphi(x_{N-1} - u_N)) : 0 < u_N < x_{N-1} \}.$$

Значение u_N , определяющее минимум на открытом промежутке, ищем из условия обращения в ноль первой производной: $\varphi'(u_N) - \varphi'(x_{N-1} - u_N) = 0$, поскольку вторая производная $\varphi''(u_N) + \varphi''(x_{N-1} - u_N) > 0$. Отсюда следует, что в точке минимума $\varphi'(u_N) = \varphi'(x_{N-1} - u_N)$, или $u_N = x_{N-1}/2$, что не выходит за пределы допустимых значений u_N .

Итак, $u_N^*(x_{N-1}) = x_{N-1}/2$, а $S_1(x_{N-1}) = 2a + 2\varphi(x_{N-1}/2)$. Пусть теперь проведены все инъекции, кроме двух последних: $(N-1)$ -й и N -й (не считая завершающей в момент времени T), а длина оставшегося промежутка времени составляет x_{N-2} . Тогда

$$\begin{aligned} S_2(x_{N-2}) &= \min_{0 < u_{N-1} < x_{N-2}} \{ a + \varphi(u_{N-1}) + S_1(x_{N-2} - u_{N-1}) \} = \\ &= \min_{0 < u_{N-1} < x_{N-2}} \{ 3a + \varphi(u_{N-1}) + 2\varphi((x_{N-2} - u_{N-1})/2) \}. \end{aligned}$$

Минимум находим из условия $\varphi'(u_{N-1}) - \varphi'((x_{N-2} - u_{N-1})/2) = 0$, или $\varphi'(u_{N-1}) = \varphi'((x_{N-2} - u_{N-1})/2)$, т.е. $u_{N-1} = x_{N-2}/3$.

$$\text{Итак, } u_{N-1}^*(x_{N-2}) = x_{N-2}/3, \quad S_2(x_{N-2}) = 3a + 3\varphi(x_{N-2}/3).$$

Легко заметить имеющуюся закономерность. Для ее обоснования применим метод математической индукции. Предположим, что

$$u_{N-k+1}^*(x_{N-k}) = x_{N-k}/(k+1), \quad S_k(x_{N-k}) = (k+1)(a + \varphi(x_{N-k}/(k+1))).$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{k+1}(x_{N-k-1}) &= \min_{0 < u_{N-k} < x_{N-k-1}} \{ a + \varphi(u_{N-k}) + S_k(x_{N-k-1} - u_{N-k}) \} = \\ &= \min_{0 < u_{N-k} < x_{N-k-1}} \{ (k+2)a + \varphi(u_{N-k}) + (k+1)\varphi((x_{N-k-1} - u_{N-k})/(k+1)) \}. \end{aligned}$$

Из условия равенства нулю первой производной находим, что

$$\begin{aligned} \varphi'(u_{N-k}) &= \varphi'((x_{N-k-1} - u_{N-k})/(k+1)), \text{ т.е. } u_{N-k}^*(x_{N-k-1}) = x_{N-k-1}/(k+2), \\ S_{k+1}(x_{N-k-1}) &= (k+2)(a + \varphi(x_{N-k-1}/(k+2))). \end{aligned}$$

Следовательно, доказано, что эти соотношения верны для всех k .

Поскольку начальное состояние $x_0 = T$ известно, последовательно применяя полученные оптимальные правила $u_k^*(x_{k-1})$ выбора промежутков между инъекциями, получим последовательность оптимальных значений для управлений и состояний:

$$u_1^* = u_1^*(x_0) = \frac{T}{N+2}, \quad x_1^* = T - u_1^* = \frac{T \cdot N}{N+1},$$

$$u_2^* = u_2^*(x_1^*) = \frac{T \cdot N}{(N+1)N} = \frac{T}{(N+1)}, \quad x_2^* = \frac{T \cdot (N-1)}{N+1}, \dots$$

$$u_N^* = u_N^*(x_{N-1}^*) = \frac{T^2}{(N+1)^2} = \frac{T}{(N+1)}.$$

Окончательно имеем: оптимальные затраты равны

$$S_N(T) = (N+1)(\alpha + \varphi(T/(N+1))),$$

и достигаются при проведении инъекций через равные промежутки времени $u_1^* = u_2^* = \dots = u_N^* = T/(N+1)$.

Пример 3. Оптимальное соединение точек

На числовой оси y имеется набор из $(N+1)$ точек, размещенных в порядке возрастания координат $y_1 < y_2 < \dots < y_{N+1}$. Длины отрезков $[y_1 y_2], \dots, [y_N y_{N+1}]$ заданы и выражаются положительными числами p_1, p_2, \dots, p_N . Пометим часть отрезков $[y_k, y_{k+1}]$ так, чтобы каждая точка y_1, y_2, \dots, y_{N+1} принадлежала хотя бы одному из помеченных отрезков. Обозначим пометки через u_1, u_2, \dots, u_N , считая, что при $u_k = 1$ отрезок $[y_k, y_{k+1}]$ помечен, а при $u_k = 0$ – нет. Требуется расставить пометки так, чтобы сумма длин помеченных отрезков, равная $\sum_{k=1}^N p_k u_k$, была минимальна. Из условий задачи вытекают следующие ограничения на u_k : соседние значения u_k, u_{k+1} не могут одновременно обращаться в ноль; кроме того, первый и последний отрезки помечаются обязательно.

Перейдем к построению решения, используя метод Р. Беллмана. Поскольку порядок нумерации отрезков (прямой или обратный) в данной задаче значения не имеет, запишем уравнения Беллмана не от конца, а от начала процесса. Вместо одной задачи из N отрезков рассмотрим задачи из одного, двух, трех и т.д. первых отрезков. Пусть Z_1, Z_2, \dots – наименьшие возможные суммы длин помеченных отрезков в таких задачах, а $u_{k-1}^*(k)$ – оптимальная пометка $(k-1)$ -го отрезка в задаче, включающей k первых отрезков.

В отличие от общего случая, в этой задаче функции Беллмана не имеют аргумента, поскольку их значения зависят только от индекса, показывающего число отрезков (число шагов) в задаче. Само же количество пройденных отрезков может быть принято в этой задаче за состояние, и, таким образом, состояние совпадает с номером шага, дублируя его. Очевидно, что

$$Z_1 = p_1, \quad u_1^*(1) = 1;$$

$$Z_2 = p_1 + p_2, \quad u_2^*(2) = 1, \quad u_1^*(2) = 1;$$

$Z_3 = \min\{p_3 + Z_1, p_3 + Z_2\}$, $u_2^*(3) = 0$, если минимум достигается на первом элементе, и $u_2^*(3) = 1$, если на втором, т.е. первый и последний должны быть помечены.

Аналогично, для значений $2 < k + 1 \leq N$

$$Z_{k+1} = p_{k+1} + \min\{Z_{k-1}, Z_k\},$$

$$u_k^*(k+1) = \begin{cases} 0, & \text{если } Z_{k-1} \leq Z_k \\ 1, & \text{если } Z_{k-1} \geq Z_k. \end{cases}$$

Всегда $u_{k+1}^*(k+1) = 1$, т.к. последний отрезок всегда должен быть помечен.

Покажем, как можно получить окончательное решение при конкретных данных. Пусть $N = 6$ и $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 1, p_4 = 1, p_5 = 2, p_6 = 2$ (рис. 1.1).

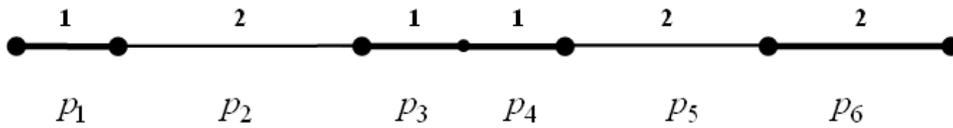


Рис. 1.1. Пример размещения точек и их оптимальное соединение

Применяя приведенные расчетные формулы, получим следующий результат.

$$Z_1 = 1, \quad u_1^*(1) = 1;$$

$$Z_2 = 3, \quad u_2^*(2) = 1;$$

$$Z_3 = 1 + \min\{1, 3\} = 2, \quad u_2^*(3) = 0, \quad u_3^*(3) = 1;$$

$$Z_4 = 1 + \min\{3, 2\} = 3, \quad u_3^*(4) = 1, \quad u_4^*(4) = 1;$$

$$Z_5 = 2 + \min\{2, 3\} = 4, \quad u_4^*(5) = 0, \quad u_5^*(5) = 1;$$

$$Z_6 = 2 + \min\{3, 4\} = 5, \quad u_5^*(6) = 0, \quad u_6^*(6) = 1.$$

Последние найденные значения $u_{5,6}^*(6)$ показывают, что в задаче с $N = 6$ отрезками отрезок p_6 помечается, т.е. $u_6^* = 1$, а p_5 нет, т.е. $u_5^* = 0$. В силу того, что p_5 не помечен, необходимо рассмотреть укороченную задачу для оставшихся 4-х отрезков (p_1, \dots, p_4) . Из полученных условных решений видно, что в возникшей четырехшаговой задаче $u_4^* = u_4^*(4) = 1$ и $u_3^* = u_3^*(4) = 1$.

Поскольку p_3 оказался помеченным, то далее следует рассмотреть трехинтервальную задачу p_1, p_2, p_3 . Видим, что $u_2^* = u_2^*(3) = 0$. Но тогда остается одноинтервальная задача, и в ней $u_1^* = 1$. Следовательно, минимальная

сумма длин помеченных интервалов равна $Z_6 = 5$, а пометки следует поставить так: $u_1^* = 1$, $u_2^* = 0$, $u_3^* = 1$, $u_4^* = 1$, $u_5^* = 0$, $u_6^* = 1$. На рисунке эти интервалы помечены жирными линиями.

Дополнительные примеры с решениями можно найти в указанной литературе [2-5].

1.2. Управляемые марковские процессы с доходами, теория и примеры

Метод динамического программирования может быть применен и для выбора оптимальной стратегии при управлении вероятностными марковскими процессами [6]. Будем рассматривать случай, когда значения, принимаемые марковским процессом, могут быть пронумерованы. Такой процесс будем называть *дискретным*. Вместо значений, которые принимает процесс, в дальнейшем будем использовать их номера.

Случайный процесс с дискретными значениями x_n называют *марковским*, если он обладает свойством: для любого $n \geq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) и любых возможных значений $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ должно выполняться следующее требование для условных вероятностей:

$$p(x_n = i_n / x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_{n-1} = i_{n-1}) = p(x_n = i_n / x_{n-1} = i_{n-1}).$$

Значения i_k , которые принимает марковский процесс, можно назвать его внутренними состояниями. Они ни в коем случае не являются его «состояниями» в терминологии динамических систем. Однако далее для краткости изложения вместо термина «внутреннее состояние» в некоторых случаях будем говорить просто о состоянии, опуская слово «внутреннее»

Если вероятность $p(x_n = i_n / x_{n-1} = i_{n-1})$ перехода из состояния i_{n-1} в состояние i_n не зависит от момента времени n , *марковский процесс* называется *стационарным*. В последнем случае случайный процесс перехода из одного состояния в другое на каждом шаге описывается одной и той же стохастической матрицей $P = (p_{ij})$, элементы которой p_{ij} являются условными вероятностями того, что следующим состоянием будет состояние j , если текущим состоянием является состояние i . Эти вероятности удовлетворяют двум условиям: $p_{ij} \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{j=m} p_{ij} = 1$, (если число возможных состояний равно m). Марковский процесс с конечным числом внутренних состояний называют *конечной марковской цепью*.

Рассмотрим марковскую цепь с m внутренними состояниями, вероятности нахождения в которых в момент времени n заданы вектором-строкой $p(n) = (p_1(n), \dots, p_m(n))$. Вектор $p(n)$ описывает текущее вероятностное

распределение марковской цепи по ее внутренним состояниям. В силу однозначности определения $p(n+1)$ по $p(n)$ вектор вероятностного распределения будет являться состоянием марковской цепи как динамической системы [1]. Оператор изменения этих вероятностей задается стохастической матрицей P : $p(n+1) = p(n)P$.

Сделаем теперь цепь управляемой за счет того, что матрица вероятностей переходов P будет зависеть от некоторой стратегии-управления k ($P^{(k)}$). Предположим, что при каждом внутреннем состоянии цепи мы имеем возможность выбирать одну из K стратегий, задаваемых стохастическими матрицами $P^{(k)}$, $k = 1, \dots, K$. Каждой матрице $P^{(k)}$ сопоставим матрицу доходов $D^{(k)}$ так, что при выборе стратегии k математическое ожидание дохода $q_i^{(k)}$, связанного с попаданием во внутреннее состояние i за один шаг, будет равно

$$q_i^{(k)} = p_{i1}^{(k)} d_{i1}^{(k)} + p_{i2}^{(k)} d_{i2}^{(k)} + \dots + p_{im}^{(k)} d_{im}^{(k)}.$$

Обозначим через $V_n(i)$ максимально возможное математическое ожидание дохода за n шагов, если начальное внутреннее состояние системы было i . Тогда в соответствии с принципом оптимальности мы получим рекуррентное соотношение [7], являющееся аналогом уравнения Р.Беллмана

$$V_n(i) = \max \left\{ q_i^{(k)} + \sum_{j=1}^m p_{ij}^{(k)} V_{n-1}(j) : k \in \{1, \dots, K\} \right\}. \quad (1.4)$$

Функция $V_n(i)$ играет роль функции Беллмана.

Пример 4. Задача об игрушечных дел мастере [7]

Игрушечных дел мастер в течение недели изготавливает игрушки, а в воскресенье выходит на рынок, чтобы их продать. Вероятности успешной или неуспешной продажи, а также величины доходов в зависимости от результата предыдущего раунда заданы матрицами

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, D^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}, D^{(3)} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Первая стратегия соответствует отсутствию рекламы, вторая стратегия соответствует рекламе по радио, третья стратегия соответствует рекламе по телевидению. Требуется определить оптимальную стратегию в смысле максимума математического ожидания дохода на несколько шагов вперед. Пусть $V_0(1) = V_0(2) = 0$. Тогда рекуррентное соотношение (1.4) позволяет нам найти оптимальную стратегию поведения $(k_1(1), k_2(1))$ в расчете на один шаг:

$$V_1(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.5 \cdot 9 + 0.5 \cdot 3 = 6 \\ 0.6 \cdot 8 + 0.4 \cdot 2 = 5.6 \\ 0.7 \cdot 6 + 0.3 \cdot 1 = 4.5 \end{array} \right\}, \quad V_1(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.4 \cdot 3 + 0.6 \cdot (-7) = -3 \\ 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot (-8) = -3.5 \\ 0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot (-10) = -4 \end{array} \right\}.$$

Итак, оптимальная стратегия поведения $(k_1(1), k_2(1)) = (1; 1)$ в расчете на один шаг, при этом $V_1(1) = 6$, $V_1(2) = -3$. Теперь подсчитаем оптимальную стратегию поведения $(k_1(2), k_2(2))$ в расчете на два шага:

$$V_2(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 6 + 0.5 \cdot 6 + 0.5 \cdot (-3) = 7.5 \\ 5.6 + 0.6 \cdot 6 + 0.4 \cdot (-3) = 8 \\ 4.5 + 0.7 \cdot 6 + 0.3 \cdot (-3) = 7.8 \end{array} \right\},$$

$$V_2(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} -3 + 0.4 \cdot 6 + 0.6 \cdot (-3) = -2.4 \\ -3.5 + 0.5 \cdot 6 + 0.5 \cdot (-3) = -2 \\ -4 + 0.6 \cdot 6 + 0.4 \cdot (-3) = -1.6 \end{array} \right\}.$$

Итак, в расчете на два шага оптимальная стратегия поведения $(k_1(2), k_2(2)) = (2; 3)$, при этом $V_2(1) = 8$, $V_2(2) = -1.6$. Теперь подсчитаем оптимальную стратегию поведения $(k_1(3), k_2(3))$ в расчете на три шага:

$$V_3(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 6 + 0.5 \cdot 8 + 0.5 \cdot (-1.6) = 9.2 \\ 5.6 + 0.6 \cdot 8 + 0.4 \cdot (-1.6) = 9.76 \\ 4.5 + 0.7 \cdot 8 + 0.3 \cdot (-1.6) = 9.62 \end{array} \right\},$$

$$V_3(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} -3 + 0.4 \cdot 8 + 0.6 \cdot (-1.6) = -0.76 \\ -3.5 + 0.5 \cdot 8 + 0.5 \cdot (-1.6) = -0.3 \\ -4 + 0.6 \cdot 8 + 0.4 \cdot (-1.6) = 0.16 \end{array} \right\}.$$

Итак, в расчете на три шага оптимальная стратегия поведения $(k_1(3), k_2(3)) = (2; 3)$, при этом $V_3(1) = 9.76$, $V_3(2) = 0.16$. Можно сделать предположение, что стратегия $(2; 3)$ останется оптимальной и на большее число шагов. Рассмотрим марковский процесс, соответствующий этой стратегии:

$$p(n+1) = p(n) \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Известно, что если все элементы матрицы вероятностей переходов строго положительны, то вне зависимости от начального распределения $p(0)$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = p^*$. В этом случае марковскую цепь называют

эргодической [1, 6] Переходя к пределу в записанном соотношении, получим систему двух зависимых уравнений относительно вектора p^* . Дополняя ее условием нормировки $p_1^* + p_2^* = 1$, находим соответствующий нашей задаче вектор предельных вероятностей $p^* = (0.6; 0.4)$. Таким образом, предполагая процесс достаточно длительным, мы можем подсчитать средний доход M за один шаг при соблюдении стратегии (2; 3):

$$M = 0.6 \cdot (0.6 \cdot 8 + 0.4 \cdot 2) + 0.4 \cdot (0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot (-10)) = 1.76.$$

Можно убедиться, сделав полный перебор всех возможных стратегий и рассмотрев соответствующие им эргодические марковские процессы, что стратегия (2; 3) является оптимальной в смысле максимума среднего дохода за один шаг среди всех 9 стационарных стратегий в расчете на бесконечно-шаговый процесс.

1.3. Контрольные задания

1. Задача о путешественнике

На местности имеется сеть дорог, связывающих несколько населенных пунктов. Путешественник находится в пункте a_0 , из которого, двигаясь по одной из трех дорог, можно попасть в пункты a_1, a_2, a_3 . Из каждого пункта опять выходят ровно три дороги, ведущие в a_4, a_5, a_6 . Из них – в a_7, a_8, a_9 и так далее, вплоть до конечных пунктов $b_1 = a_{3 \cdot N - 2}, b_2 = a_{3 \cdot N - 1}, b_3 = a_{3 \cdot N}$. Длины всех дорог заданы. Найти наиболее короткий путь из a_0 в один из конечных пунктов. Решить задачу при $N = 5$. Оцените количество операций сложения и сравнения при ее решении по методу Беллмана, а также при полном переборе всех путей.

2. Задача о распределении инвестиций

Нужно распределить между N предприятиями сумму a , выделенную для их инвестирования. Известно, что вложение средств в размере y в k -ое предприятие обеспечивает прибыль в размере $d_k(y)$. Целью распределения является получение максимального суммарного дохода. Решить задачу при $N = 4, a = 300$ при условии, что суммы инвестиций всегда кратны 50, а функции $d_k(y)$ для $y = 50 \cdot j$ ($j = 0, 1, \dots, 6$) принимают значения, заданные в табл. 1.3.

3. Задача о распределении механизмов

Имеется t видов земляных работ и $N > t$ однотипных механизмов, способных выполнять эти работы. Если назначить на i -й вид работы k механизмов, то их суммарная производительность определяется значением

G_{ik} . Считая, что матрица G , составленная из таких значений, известна, найти оптимальное по суммарной производительности размещение механизмов по всем видам работ. Решить задачу, приняв $N = 4, m = 3$,

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 & 14 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \\ 6 & 10 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

Таблица 1.3

Значения функции $d_k(y)$ для задачи 2

y	0	50	100	150	200	250	300
$d_1(y)$	0	50	120	140	150	200	250
$d_2(y)$	0	60	130	140	130	160	200
$d_3(y)$	0	30	60	100	130	200	250
$d_4(y)$	0	40	100	110	120	160	220

4. Задача о распределении ресурса

Пусть требуется распределить ограниченный ресурс a на доли x_1, \dots, x_N ($x_1 \geq 0, \dots, x_N \geq 0, x_1 + \dots + x_N \leq a$) между N предприятиями, каждое из которых приносит доход $f_i(x_i) = c_i x_i^2$ ($c_i > 0$). Найти оптимальное распределение ресурсов.

5. Решить предыдущую задачу при $f_i(x_i) = c_i \sqrt{x_i}$.

6. Задача о загрузке судна

Судно, имеющее грузоподъемность a , загружается предметами N типов. Один предмет i -го типа имеет стоимость y_i и вес z_i . Требуется найти вариант загрузки судна, при котором стоимость взятых на борт предметов максимальна. Решить задачу для $N = 3, a = 200, y_1 = 25, y_2 = 40, y_3 = 80, z_1 = 40, z_2 = 50, z_3 = 70$.

7. Решить предыдущую задачу при дополнительном условии, что хотя бы один предмет каждого типа должен быть погружен на борт судна.

8. Задача о налоге

В N -ской области решили ввести дополнительный налог на рост доходов частных фирм. Если за N месяцев доходы фирмы образуют возрастающий ряд $0 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{N+1}$ то, согласно установленным правилам, фирма должна уплатить дополнительный налог в размере

$$S = (p_2/p_1)^r + (p_3/p_2)^r + \dots + (p_{N+1}/p_N)^r - N,$$

где $r > 0$. При заданном значении начальных и конечных доходов $p_1 = a < b = p_{N+1}$ фирма должна спланировать график возрастания своих доходов так, чтобы дополнительный налог был минимален. Получить решение задачи аналитически.

9. Задача о надежности

Технологическая цепочка изготовления изделия включает N операций, выполняемых на автоматизированных участках конвейерной обработки. Устройство, выполняющее операции на i -ом участке, имеет вероятность работы без отказа p_i и стоимость c_i . Для повышения надежности на участке можно установить m_i дублеров, повысив надежность участка до значения $P_i(m_i) = 1 - (1 - p_i)^{1+m_i}$. Средства, выделенные на установку устройств-дублеров, ограничены значением C . Решить задачу о выборе оптимального количества дублеров, приводящем к максимизации надежности всей технологической цепочки.

При решении принять $N = 3$, $C = 17$, $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.3$, $c_1 = 6$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$. Для упрощения расчетов принять приближенные значения функций $P_i(m)$ из табл. 1.4.

Таблица 1.4

Значения функции $P_i(m)$

m	0	1	2	3	4
$P_1(m)$	0.5	0.8	0.9	0.9	1
$P_2(m)$	0.3	0.5	0.7	0.8	0.8
$P_3(m)$	0.4	0.6	0.9	0.9	1

10. Задача о замене оборудования

Частное предприятие планирует в течение N лет заниматься выпуском изделий, используя некоторое оборудование. В начале можно либо купить новое оборудование возраста $x_0 = 0$ лет и стоимостью p , либо подержанное оборудование возраста $x_0 > 0$ лет по его ликвидной стоимости $\varphi(x_0)$. Показатели эксплуатации оборудования включают: $f(t)$ – стоимость произведенных за год изделий на оборудовании возраста t лет; $r(t)$ – затраты на эксплуатацию в течение года оборудования возраста t лет.

В процессе эксплуатации оборудование можно менять, продавая старое по ликвидной стоимости $\varphi(t)$ и покупая новое стоимостью p . В конце N -го года оборудование продается по ликвидной стоимости. Определить

оптимальный возраст оборудования x_0 при начальной покупке и оптимальный график его замены. Выполнить расчеты при $N = 8$, $x_0 \in \{0, 1, 2\}$,

$$f(t) = 30 - t/2, r(t) = 13 + t/2, p = 17, \varphi(t) = \begin{cases} 6 & \text{при } 0 \leq t \leq 6 \\ 2 & \text{при } 7 \leq t \leq 10 \end{cases}.$$

11. Предприятие, выпускает товары, изготавливая их отдельными партиями. Чем больше размер этих партий, тем относительно дешевле обходится выпуск. Поэтому в отдельные месяцы выгодно выпускать больше изделий, чем это нужно для удовлетворения спроса, а излишки хранить на складе для их реализации в последующие месяцы. За хранение в течение месяца каждой тысячи штук изделий нужно платить $\alpha = 1$ усл.ед. Емкость склада ограничена величиной $C = 4000$ штук.

Составить оптимальный план производства на $N = 4$ месяцев, при котором общая сумма затрат на производство и хранение была минимальной, а спрос на изделия – всегда удовлетворен. Объемы спроса по месяцам составляют m_i ($i = 1, \dots, N$) изделий (при решении принять: 2000, 3000, 3000 и 2000). Начальные запасы готовых изделий составляют $C_0 = 2000$. Размер производимых партий не может превышать $p = 4000$ изделий. Затраты, связанные с выпуском партий изделий объемом v_i ($i = 1, \dots, N$) штук (принять: 1000, 2000, 3000 и 4000), определяются величинами z_i ($i = 1, \dots, N$) (соответственно 13, 15, 17 и 19 усл.ед.).

12. Товар в количестве $C = 100$ ед. может реализовываться на трех рынках по ценам p_1 , p_2 и p_3 за единицу продукции. Определить оптимальное распределение товара между рынками при следующих зависимостях цены от объема предлагаемой продукции x_i на данном рынке:

$$p_1(x_1) = \begin{cases} 40 - 20x_1 & \text{при } 0 \leq x_1 \leq 20 \\ 0 & \text{при } x_1 > 20 \end{cases}, p_2(x_2) = \begin{cases} 50 - 0.5x_2 & \text{при } x_2 > 30 \\ 30 & \text{при } 0 \leq x_2 \leq 30 \end{cases}$$

и $p_3(x_3) = 30 - 0.3x_3$.

13. Используя уравнения Беллмана, составить расчетную схему решения задачи максимизации суммарной прибыли от работы k цехов, выпускающих изделия разных видов. Прибыль от выпуска x изделий j -го вида (он производится j -м цехом) определяется значением $P_j(x)$ (табл. 1.5). Изготовление одного изделия j -го вида требует определенного количества сырья m типов, а именно C_{j1}, \dots, C_{jm} . Запасы этого сырья, общие для всех цехов, составляют z_1, \dots, z_m . Решить задачу при следующих данных: $K = 3$, $m = 2$, расходы сырья для изделия первого типа: $C_{11} = 2$, $C_{12} = 4$; второго: $C_{21} = 4$,

$C_{22} = 2$; третьего: $C_{31} = 1$, $C_{32} = 3$; а запасы составляют $z_1 = 10$, $z_2 = 12$.

Таблица 1.5

Значения прибыли $P_j(x)$

$P_j(x)$		x					
		1	2	3	4	5	6
j	1	8	15	21	26	30	32
	2	7	14	20	26	31	34
	3	10	18	24	26	28	30

14. Задача о ритмичности производства

Пусть имеется некоторое производство, которое ежедневно обеспечивается поставками сырья в количествах p_1, p_2, \dots, p_N . Излишки сырья хранятся на складе емкостью E . Начальное количество сырья на складе задано и составляет E_0 . Обозначим x_1, x_2, \dots, x_N — объемы сырья, ежедневно забираемые на производство. Общее количество перерабатываемого за N дней сырья известно и равно A . По известному графику поставок сырья p_1, p_2, \dots, p_N составить график его потребления x_1, x_2, \dots, x_N , минимизирующий неритмичность производства, понимаемую как $\sum_{i=1}^N (x_i - A/N)^2$. Сырье следует считать штучным. Решить задачу при $N = 5$, $E_0 = 2$, $E = 10$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_4 = 6$, $p_5 = 7$.

15. Задача о фермере 1

Для фермера, разводящего крупный рогатый скот, определить оптимальный график продаж при следующих условиях. Каждый год некоторое количество голов скота y_i отправляется на продажу. Стоимость проданного скота определяется функцией $\varphi(y_i) = k \cdot y_i$ ($k > 0$). Оставшаяся часть стада увеличивается за год в α раз ($\alpha > 1$). Начальное поголовье равно A . Решить задачу определения оптимального графика продаж при $N = 4$. Затраты на приобретение начального стада и его содержание не учитывать.

16. Задача о фермере 2.

Решить задачу 12 с учетом следующих факторов. Изменение поголовья стада за год происходит за счет приплода с коэффициентом $\alpha > 1$ и падежа с коэффициентом $0 < \beta < 1$. Стоимость содержания единицы скота в год составляет C . Выяснить зависимость оптимальной стратегии продаж от соотношения коэффициентов α, β, C . Принять, что падеж происходит только в «старой» части, а приплод наблюдается только в оставшейся. Можно считать, что затраты на содержание приплода составляют половину общей годовой стоимости содержания.

17. Задача о распределении с неизвестным начальным состоянием

Предприятие работает в течение N лет. Затраты по начальной закупке сырья равны $\alpha \cdot y_0^2$, где y_0 — количество покупаемого сырья. В начале i -го года часть x_i имеющегося сырья пускается в производство. Это приносит доход $f_i(x_i)$. Определить оптимальное начальное количество и использование сырья по годам, максимизирующее суммарный доход с учетом затрат на покупку сырья. Принять $N = 2$, $\alpha = 1$, $f_1(x_1) = x_1$, $f_2(x_2) = 0.5x_2^2$.

18. Задача о динамическом выделении с возвратами

Предприятие функционирует N лет. Начальный капитал равен a . Каждый год некоторая часть u_i имеющейся суммы пускается в оборот с условием возврата в кассу в конце года суммы в размере $\varphi_i(u_i)$. Кроме того, из дохода выплачивается сумма $f_i(u_i)$ в качестве вознаграждения работникам. Найти оптимальные значения u_1, u_2, \dots, u_N , максимизирующие сумму выплаченных вознаграждений. Выполнить расчет при $N = 3$, $f_1(u) = 0.1 \cdot u^2$, $\varphi_1(u) = 0.7 \cdot u$, $f_2(u) = 0.2 \cdot u$, $\varphi_2(u) = 0.3 \cdot u$, $f_3(u) = u$, $\varphi_3(u) = 0$.

19. Задача о динамическом распределении с возвратами

Составить оптимальный план ежегодного распределения средств между двумя предприятиями в течение N лет, если начальная сумма средств равна A , доходы от вложения средств x_1 и x_2 в предприятия составляют $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$. Вложенные средства возвращаются в общую кассу для перераспределения в размере 60% от x_1 для первого и 20% от x_2 для второго предприятия. Каждый год все имеющиеся в общей кассе средства полностью перераспределяются с точностью до остатка, меньшего Δ ; x_1 и x_2 выбираются кратными Δ . Решить задачу при $N = 3$, $A = 400$, $\Delta = 50$ и значениях функций $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ из табл. 1.6.

Таблица 1.6

Значения функций $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$

x	50	100	150	200	250	300	350	400
$f_1(x_1)$	6	10	15	26	28	38	45	49
$f_2(x_2)$	8	12	20	28	35	40	46	48

20. Задача о многоступенчатой ракете

Ракета-носитель с N ступенями имеет общую массу M , включающую массу t выводимого на орбиту космического аппарата и топливо. Вес оболочек ступеней считается равным нулю. Обозначим вес топлива в ступенях

ракеты через u_1, u_2, \dots, u_N . Будем считать, что прирост скорости ракеты при сгорании k -ой ступени пропорционален отношению $u_k / (m + u_N + \dots + u_k)$. Требуется определить оптимальное распределение топлива по ступеням ракеты. Выполнить расчеты при $N = 3, M = 64, m = 1$.

21. Задача о ракете с импульсным управлением

Ракета с массой m движется по прямой вне поля силы тяжести. Реактивный двигатель работает в импульсном режиме. Сообщаемая величина импульса $u \in [-V, V]$, а затраты топлива пренебрежимо малы по сравнению с массой корабля. Считать, что порция топлива сгорает мгновенно. Найти значения u_1, u_2, \dots, u_N , при которых ракета из состояния покоя перейдет в другое состояние покоя, максимально удаленное от начального. Принять, что приращение скорости, полученное в k -й момент времени, начинает оказывать влияние на приращение координаты только в следующий $(k + 1)$ -й момент времени. Решить задачу при $N = 3$ и $N = 5$; $m = 1, V = 10$. Интервал между импульсами принять равным единице.

Указание: сообщение системе импульса u изменяет ее количество движения (произведение массы на скорость) на величину u .

22. Задача оптимального управления с дискретным временем

Методами динамического программирования решить следующую задачу. Найти $\min \sum_{k=0}^9 (x_k^2 + u_k^2)$, если $x_{k+1} = 0.5x_k + u_k, (k = 0, \dots, 9), x_0 = 2$.

23. Задача с неаддитивным критерием

Представить задачу математического программирования $\max \prod_{i=1}^N x_i$ $\sum_{i=1}^N a_i x_i \leq c, x_1, \dots, x_N \geq 0$, где $c > 0, a_1, \dots, a_N > 0$, в форме задачи динамического программирования. Записать уравнения Беллмана. Найти оптимальное решение при $N = 3, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ и $c = 10$.

24. Задача с разностным уравнение второго порядка

Используя динамическое программирование, записать расчетную схему решения задачи для произвольного N : $\min \sum_{i=1}^N (x_i^2 + u_i^2)$, если $x_0 = a, x_1 = 2a$; $x_{i+2} + x_{i+1} + x_i = u_{i+1}$ и $x_{N+1} = 0$. Найти оптимальное решение для $N = 3; 4$.

25. Задача о производстве

Господин M , желая построить коттедж, одолжил у своего друга на N недель мини-установку по производству дешевого кирпича с функцией производительности $f(x)$ штук в неделю, где x - количество использованного сырья. Следует считать, что производная функции $f(x)$ положительна и убывает при увеличении x .

Перед началом производства имелась сумма денег A . Стоимость единицы сырья в ценах стартовой недели равна C . Коэффициент инфляции за неделю равен $\alpha > 1$. Сырье покупается еженедельно в количествах x_1, x_2, \dots, x_N . По окончании N -й недели на оставшиеся неистраченные деньги покупается готовый более дорогой кирпич по цене B за штуку (в ценах стартовой недели). Необходимо составить рекуррентные уравнения Беллмана для определения оптимальных размеров закупки сырья, приводящих к максимизации общего количества полученного кирпича.

26. Задача о накоплении

Составить рекуррентные уравнения Беллмана для предыдущей задачи при следующем изменении ее условий. Вначале в фонд развития вносится сумма денег A . Средства на покупку сырья берутся из фонда развития. Кирпич производится не для личного использования, а для продажи по цене B за штуку (в ценах стартовой недели). При этом 50% получаемой от продажи суммы добавляется к оставшимся в фонде средствам, а остальные 50% используются на оплату рабочим, налоги и потребление. Необходимо составить рекуррентные уравнения Беллмана, позволяющие решить задачу об оптимальном выделении средств на закупку сырья для максимизации суммы денег в фонде развития к концу N -й недели.

27. Задача о графике эксплуатации

Электростанция имеет L агрегатов. Предположим, что производительность одного агрегата за неделю равна C , а единица произведенной электроэнергии продается по цене b . График оплачиваемого производства электроэнергии по неделям задан: p_1, p_2, \dots, p_N , и нарушаться не должен. Избыточно произведенная электроэнергия не оплачивается. Затраты на поддержание в рабочем состоянии ℓ агрегатов в течение недели равны $r(\ell)$, затраты на консервацию $\Delta\ell$ агрегатов составляют $\varphi(\Delta\ell)$. Затраты на пуск равны $P(\Delta\ell)$. Составить рекуррентные уравнения Беллмана для определения оптимального графика эксплуатации агрегатов.

28. Задача о дискотеке Студент пришел на дискотеку, там ему понравились две девушки: Алиса и Бэтти, с которыми он и решил танцевать. Однако характер у девушек оказался разным. Алиса предпочитает танцевать со знакомыми мальчиками (с вероятностью 0.7 принимает приглашение к танцу) и не любит танцевать с незнакомыми мальчиками (с вероятностью 0.4 принимает приглашение к танцу). Бэтти, наоборот, предпочитает танцевать с незнакомыми мальчиками (с вероятностью 0.8 принимает приглашение к танцу) и не любит танцевать со знакомыми мальчиками (с вероятностью 0.3 принимает приглашение к танцу). Общей чертой у Алисы и Бэтти является их короткая память: если студент не станцевал с ней хотя бы один раз, то она его уже не помнит, то есть он для нее незнакомец. Определить оптимальную стратегию поведения студента в расчете на несколько танцев вперед, если на каждый

очередной танец он успевает сделать приглашение к танцу только одной из девушек.

29. Задача об экзаменационной сессии

Студент уже сдал один экзамен на 4, но ему предстоит сдать еще три экзамена. При подготовке к экзаменам он из-за недостатка времени может выбрать одну из следующих двух стратегий: либо выучить часть материала довольно хорошо, либо пройти быстро по всему материалу. Определить оптимальную в смысле набранных баллов стратегию поведения студента на оставшиеся три экзамена, если матрицы вероятностей получения оценок 5, 4, 3, 2 в зависимости от предыдущей оценки для двух стратегий имеют вид:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

30. Задача о погоне

Догоняющий находится в i -той клетке из 5 клеток, образующих круг. За один такт он с вероятностью $p = 1/2$ перемещается по часовой стрелке в соседнюю клетку, с вероятностью $q = 1/3$ перемещается против часовой стрелки в соседнюю клетку, с вероятностью $r = 1/6$ остается на месте. Убегающий находится в j -той клетке и на каждом такте может выбрать одну из трех стратегий поведения: (а) переместиться по часовой стрелке в соседнюю клетку; (б) остаться на месте; (с) переместиться против часовой стрелки в соседнюю клетку. Расстояние между догоняющим и убегающим определяется по формуле $d = |i - j|$. Определить стратегию убегающего на три такта вперед, максимизирующую сумму расстояний между догоняющим и убегающим.

31. Стохастическая задача о фермере

Состояние продуктивности земли, используемой фермером, может быть (а) хорошим, (б) удовлетворительным, (с) плохим. Вероятности перехода продуктивности земли из одного состояния в другое без проведения агротехнических мероприятий за один сезон заданы матрицей $P^{(1)}$. Однако фермер может провести комплекс агротехнических мероприятий, и тогда вероятности перехода продуктивности земли из одного состояния в другое за один сезон будут заданы матрицей $P^{(2)}$. Матрицы доходов для двух стратегий поведения: $D^{(1)}, D^{(2)}$. Найти оптимальную стратегию фермера на 4 сезона.

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad D^{(1)} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^{(2)} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Элементы выпуклого анализа

2.1. Базовые понятия и факты

Выпуклый анализ в настоящее время является обширным разделом математики, начало которому было положено в работах немецкого математика и физика Германа Минковского (1864-1909). Ниже приведены отдельные понятия и факты из выпуклого анализа, используемые в следующих разделах данного пособия. Дополнительный материал можно найти, например в [8-10].

Далее всюду будем предполагать, что рассматриваются элементы и множества из пространства R^n конечной размерности. Пусть x и y - два элемента из R^n , тогда множество

$$[x, y] = \{z^\alpha \in R^n : z^\alpha = \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

называется *отрезком* $[x, y]$ в R^n . Элемент отрезка может быть записан в иной форме $z^\alpha = y + \alpha \cdot (x - y)$.

Непустое множество $D \subseteq R^n$ называется *выпуклым множеством*, если для любых элементов x и y из D соединяющий их отрезок $[x, y] \subset D$, т.е. $\forall x, y \in D$ и $\forall \alpha \in [0, 1]$ $z^\alpha = \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y \in D$. Пустое множество считается выпуклым по определению.

Операция пересечения, примененная к совокупности (конечной или бесконечной) выпуклых множеств не нарушает выпуклости, а операция объединения может ее нарушить.

Можно ввести операции сложения множеств и умножения их на действительные числа. По определению

$$D_1 + D_2 = \{z : z = x + y, x \in D_1, y \in D_2\};$$

$$\alpha \cdot D = \{z : z = \alpha \cdot x, x \in D\}, \alpha \in R^1;$$

$$D_1 - D_2 = D_1 + (-1) \cdot D_2.$$

Операции сложения, вычитания, домножения на числа не нарушают выпуклости.

Множество K называется *конусом* (с вершиной в точке 0), если $\forall \alpha > 0$ $\alpha \cdot K = K$. Конус не обязательно является выпуклым множеством.

Множество внутренних точек из D будем обозначать $\text{int } D$, а *замыкание* - \overline{D} . Эти операции не нарушают выпуклости, причем для выпуклого множества D $\text{int } \overline{D} = \overline{\text{int } D}$ и $\text{int } \overline{D} = \text{int } D$.

Если x^1, x^2, \dots, x^k - элементы из R^n , то их выпуклой линейной комбинацией называют множество

$$\Lambda(x^1, \dots, x^k) = \left\{ z = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot x^i : \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}.$$

Выпуклая линейная комбинация совпадает с *выпуклой линейной оболочкой* элементов x^1, x^2, \dots, x^k , под которой понимается наименьшее выпуклое множество, содержащее все эти точки.

Пусть на множестве $D \subseteq R^n$ задана функция Q . Множество $epiQ(D) \subseteq R^{n+1}$ называют ее *надграфиком* (*эпиграфом*), если

$$epiQ(D) = \{(x; u) : x \in D, u \in [Q(x), \infty)\}.$$

Функцию Q , определенную на выпуклом множестве D , называют *выпуклой* на D , если $epiQ(D)$ - выпуклое множество. Выпуклость функции можно определить иначе (эти определения эквивалентны).

Функция Q , определенная на выпуклом множестве $D \subseteq R^n$, называется *выпуклой* (*выпуклой вниз*) на D , если $\forall x, y \in D, \forall \alpha \in [0, 1]$

$$Q(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y) \leq \alpha \cdot Q(x) + (1 - \alpha) \cdot Q(y).$$

Если при тех же условиях вместо неравенства вида « \leq » выполняется неравенство вида « \geq », то функция называется *вогнутой* (*выпуклой вверх*). Если $\forall x, y \in D, x \neq y$ и $\forall \alpha \in (0, 1)$

$$Q(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y) < (>) \alpha \cdot Q(x) + (1 - \alpha) \cdot Q(y),$$

функция называется *строго выпуклой* (*строго вогнутой*).

Согласно последних определений выпуклость функции Q на D геометрически означает, что для всякого отрезка $[x, y]$, включенного в D , график этого отрезка ($0 \leq \alpha \leq 1$) проходит нестрого ниже соответствующей хорды, опирающейся на значения $Q(x)$ и $Q(y)$ (рис. 2.1).

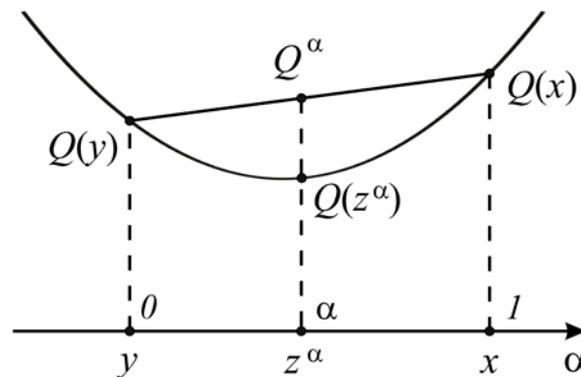


Рис. 2.1. Поведение сечения выпуклой функции, где $Q^\alpha = \alpha \cdot Q(x) + (1 - \alpha) \cdot Q(y)$

Если функция Q является *аффинной*, т.е. $Q(x) = a \cdot x + b$, то она одновременно и выпукла и вогнута.

Можно доказать, что функция Q , выпуклая на выпуклом D , непрерывна в любой точке $x \in \text{int } D$ (на границе D функция может быть разрывной), более того $\forall x \in \text{int } D$ и любого направления v ($\|v\|=1$) существует

производная по направлению $\partial Q(x)/\partial v$ (дифференцируемости в точке x при этом может не быть).

Критерий выпуклости дифференцируемой функции $Q(x)$. На открытом выпуклом множестве D функция $Q(x)$ выпукла тогда и только тогда, когда $\forall x, y \in D: Q(x) \geq Q(y) + (\nabla Q(y), x - y)$.

Неравенство означает, что график (поверхность) функции всюду проходит нестрого выше ее линейного приближения (касательной гиперплоскости), построенного по измерениям функции Q и ее градиента ∇Q в произвольной точке y из D .

Заметим, что применив данный критерий, можно отсечь часть множества D , не содержащую точки x^* глобального минимума Q на D , используя результат измерения $\nabla Q(y): x^* \notin D \cap \{x: (\nabla Q(y), x - y) \geq 0\}$.

В случае, когда выпуклая функция Q недифференцируема в точке y , вместо вектора градиента можно использовать *вектор субградиента* $v(y)$, определяемый следующим условием: $\forall x \in D Q(x) \geq Q(y) + (v(y), x - y)$.

Вектор субградиента также можно использовать для отсекаания подобласти в D , не содержащей глобального минимума. Множество всех субградиентов, построенных для выпуклой функции Q в точке Q называется *субдифференциалом* $\partial Q(y) = \{v: \forall x \in D Q(x) \geq Q(y) + (v, x - y)\}$.

Критерий выпуклости для дважды непрерывно дифференцируемой функции. Пусть Q определена на открытом выпуклом множестве D . Q выпукла на D тогда и только тогда, когда *матрица Гессе* (обозначим ее $\nabla^2 Q(x)$) неотрицательно определена на D , т.е. $\forall x \in D$ и произвольного d $d^T \nabla^2 Q(x) d \geq 0$. Заметим, что в силу непрерывности вторых частных производных матрица Гессе будет симметрической.

Если гессиан функции Q всюду в D *положительно определен*, функция будет строго выпукла на D , но обратное неверно. Например, x^4 строго выпукла в R^1 , а ее вторая производная в нуле равна нулю.

Напомним, что характер *знакоопределенности* симметрической матрицы $A = A^T$ определяется по знаку квадратичной формы $d^T A d$ для $d \neq 0$. Если знак может быть различен для разных d , то матрицу A называют *знаконеопределенной*.

Известно, что собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ симметрической матрицы всегда действительны, а представление соответствующей ей квадратичной формы в каноническом виде приводит к выражению $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i^2$. Таким образом, знаки набора собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ полностью определяют характер знакоопределенности матрицы, например при $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) матрица A будет неотрицательно определена.

Критерий Сильвестра позволяет взаимнооднозначно связать положительную определенность матрицы A с положительностью ее главных миноров $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, а отрицательную определенность – с чередованием их знаков, начиная с отрицательного: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$

Если значения некоторых из миноров обратились в ноль, критерий неприменим. Например, из того, что $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0$ не следует неотрицательная неопределенность матрицы. Это наглядно иллюстрирует следующий контрпример. Пусть задана симметрическая матрица A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Очевидно, что ее миноры: } \Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0. \\ \text{В то же время, корни ее характеристического полинома} \\ (-1-\lambda) \cdot ((1-\lambda)^2 - 1) \text{ имеют разные знаки: } \lambda_1 = -1 < 0, \\ \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2 > 0. \end{array}$$

Отметим дополнительные свойства выпуклых функций. Если f выпукла в R^n , C – некоторая константа, то множество точек $\{x \in R^n : f(x) \leq C\}$ выпукло, если f аффинна, то $\{x \in R^n : f(x) = C\}$ выпукло.

Пусть Q – выпуклая функция на выпуклом множестве D . Тогда задача $\min\{Q(x) : x \in D\}$ называется *задачей выпуклого математического программирования*. Она замечательна тем, что любой ее локальный минимум является глобальным, а множество глобальных минимумов является выпуклым. Если же Q строго выпукла на D , ее глобальный минимум будет единственным, кроме того, он будет являться *строгим минимумом*.

Пример 1. Исследование области выпуклости и вогнутости функции

Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^3/6 + y^3/6 - x^2/2 + y^2 + xy + 2x$.

Составим матрицу Гессе и вычислим главные миноры

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & y+2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = x-1 \\ \Delta_2 = (y+2)(x-1) - 1 \end{array}$$

Функция f выпукла в любой выпуклой области, где матрица Гессе неотрицательно определена. Область положительной определенности определяется условиями $\Delta_1 = x-1 > 0, \Delta_2 = (y+2)(x-1) - 1 > 0$, обеспечивающими строгую выпуклость. Выпуклость будет на замыкании этого множества. Функция f вогнута в любой выпуклой области, где матрица Гессе неположительно определена. Область ее отрицательной определенности определяется условиями $\Delta_1 = x-1 < 0, \Delta_2 = (y+2) \cdot (x-1) - 1 > 0$, обеспечивающими строгую вогнутость. Вогнутость будет на замыкании этого множества.

Таким образом, функция выпукла на любом выпуклом подмножестве множества $\{(x; y) : y \geq -1 + 1/(x-1), x > 1\}$ и вогнута на любом выпуклом подмножестве множества $\{(x; y) : y \leq -1 + 1/(x-1), x < 1\}$ (рис. 2.2).

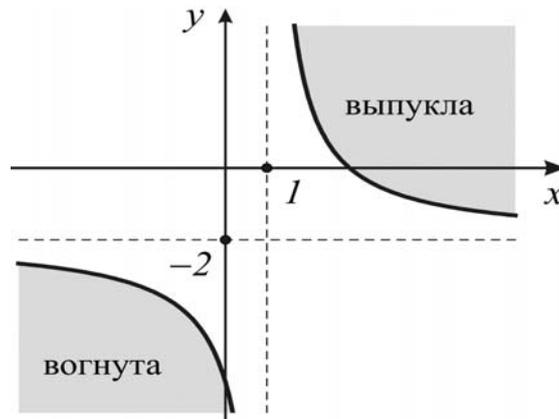


Рис. 2.2. Области выпуклости и вогнутости функции

2.2. Контрольные задания

1. Влияют ли линейные члены квадратичной функции на ее выпуклость?

2. Пусть G_i - выпуклые множества, $i = 1, \dots, s$. Доказать выпуклость множеств: (а) пересечения $\bigcap_{i=1}^s G_i$; (б) суммы $\sum_{i=1}^s G_i$; (в) произведения $\alpha \cdot G_1$ для $\alpha \geq 0$ и $\alpha < 0$; (г) разности $G_1 - G_2$; (д) выпуклой линейной оболочки $\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

3. Доказать, что при выпуклости множества G будут выпуклы: (а) его замыкание \overline{G} ; (б) множество его внутренних точек $\text{int } G$.

4. Показать, что множество D выпукло в том и только в том случае, когда при любых $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1 D + \lambda_2 D = (\lambda_1 + \lambda_2) D$ [12].

5. Пусть $A: R^n \rightarrow R^m$ - линейное отображение, $X \subset R^n$ и $Y \subset R^m$ - выпуклые множества. Показать, что $A(X)$ и $A^{-1}(Y)$, т.е. образ X и прообраз Y выпуклы. $A(X) = \{y \in R^m: y = Ax, x \in X\}$, $A^{-1}(Y) = \{x \in R^n: Ax \in Y\}$.

6. Доказать выпуклость множества $\{x \in R^n: f(x) \leq C\}$ для выпуклой в R^n функции f .

7. Показать, что множество направлений строгого локального убывания дифференцируемой функции в точке является выпуклым конусом.

8. Построить вид областей выпуклости и вогнутости функций:

(а) $Q(x, y) = -(x-1)^3 + (y+1)^3$; (б) $Q(x, y) = -(x-1)^3 + (y+1)^3 + 6xy$.

9. Построить вид областей выпуклости и вогнутости функций в зависимости от параметра p :

(a) $Q(x, y) = px^2 + xy + py^2$; (b) $Q(x, y) = px^2 + 4xy + y^2$; (c) $Q(x, y) = x^3 + py^3$.

10. Пусть Q - выпуклая функция на выпуклом множестве D . Показать, что при $\forall x, y \in D, \alpha \notin [0, 1]$, для которых $\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y \in D$, выполняется неравенство $Q(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha \cdot Q(x) + (1 - \alpha) \cdot Q(y)$.

11. Пусть φ - выпуклая функция на выпуклом множестве D . Проверить следующие утверждения: (a) функция $Q(x) = e^{\varphi(x)}$ выпукла на D ; (b) функция $Q(x) = 1/\varphi(x)$ вогнута на $D_0 = \{x \in D : \varphi(x) < 0\}$; (c) если $\varphi(x) > 0$, то $\varphi^2(x)$ выпукла на D .

12. Доказать, что $Q(x) = \varphi(x + h) - \varphi(x)$ — неубывающая функция при $h > 0$, если $\varphi(x)$ — выпуклая функция.

13. Доказать с помощью критерия выпуклости для непрерывно дифференцируемых функций справедливость неравенств:

(a) $e^x \geq 1 + x$; (b) $(1/n)^\alpha - (1/(n+1))^\alpha \leq \alpha/n^{\alpha+1}$ при $\alpha \geq 1$.

14. Доказать, что при выпуклости функций f_1, \dots, f_m на выпуклом D их сумма с неотрицательными коэффициентами также выпукла на D .

15. Пусть Q выпукла в R^n , v - нормированный вектор, а $\varphi(\alpha) = (Q(x + \alpha \cdot v) - Q(x))/\alpha$. Показать, что в области $\alpha > 0$ функция $\varphi(\alpha)$ монотонно невозрастает при убывании α .

16. Доказать, что при существовании глобального минимума выпуклой функции Q на выпуклом множестве D любой ее локальный минимум будет глобальным, а их множество — выпуклым.

17. Доказать, что строго выпуклая функция на выпуклом D не может иметь более одного глобального минимума.

18. Выпуклая функция Q определена на $D = [0, 10]^2 \subset R^2$. Известны значения ее градиента в трех точках: $x^1 = (5; 5), \nabla Q(x^1) = (10; 10)$; $x^2 = (2; 2), \nabla Q(x^2) = (5; -5)$; $x^3 = (2; 5), \nabla Q(x^3) = (-5; 10)$. Построить оценку положения глобального минимума.

19. Определить субдифференциал $\partial Q(x, y)$ выпуклой функции:

(a) $Q(x, y) = 10 \cdot |y - |x|| + |y - 1|$ в точке $(2; 2)$;

(b) $Q(x, y) = |x| + |y|$ в точке $(1; 1)$.

3. Условия оптимальности в задачах математического программирования

3.1. Теория и примеры

Рассмотрим задачу о нахождении допустимых значений x , при которых функция $Q(x)$ достигает минимума в области

$$D = \{x \in R^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, N, h_j(x) = 0, j = 1, \dots, M\}. \quad (3.1)$$

Запишем эту задачу в виде

$$\min \{Q(x) : x \in D\}, \quad (3.2)$$

предполагая, что минимум существует.

Будем рассматривать решения x^* двух типов: *глобально-оптимальные*, когда $\forall x \in D : Q(x^*) \leq Q(x)$, и *локально-оптимальные*, когда существует такая окрестность $U(x^*)$ точки x^* , для которой $\forall x \in D \cap U(x^*)$ значение $Q(x^*) \leq Q(x)$.

Всюду ниже функции Q , $g = (g_1, \dots, g_N)$, $h = (h_1, \dots, h_M)$ будем считать достаточно гладкими.

Для задач, не обладающих выпуклостью, необходимые условия наличия в x^* локального минимума дает следующая *теорема Каруша-Куна-Таккера*.

Для того, чтобы точка x^* была локальным минимумом рассматриваемой задачи, необходимо выполнение группы условий:

- (a) $x^* \in D$ – допустимость;
- (b) $\exists(\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*, \mu_1^*, \dots, \mu_M^*) \neq 0$ – нетривиальность;
- (c) $\lambda_0^* \geq 0, \lambda_i^* \geq 0, (i = 1, \dots, N)$ – неотрицательность;
- (d) $-\lambda_0^* \cdot \nabla Q(x^*) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^M \mu_j^* \nabla h_j(x^*)$ –

разложимость;

- (e) $\lambda_i^* \cdot g_i(x^*) = 0, (i = 1, \dots, N)$ – условие *дополняющей нежесткости*.

Ограничения-неравенства, обращающиеся в ноль в точке x^* , называют *активными в этой точке*. Для множества номеров активных в точке x^* неравенств удобно ввести специальное обозначение – $I(x^*)$.

Укажем на содержательный смысл условий дополняющей нежесткости. Из (e) следует, что для неактивных в точке x^* неравенств $\lambda_i^* = 0$. Следовательно, неактивные ограничения не входят в условие разложимости (d)

и не влияют на выполнение условий оптимальности. Фактически, в (d) суммирование выполняется только по номерам $i \in I(x^*)$.

Заметим, что для задач без ограничений-равенств аналогичную теорему обычно называют *теоремой Куна-Таккера* (при этом все, что связано с равенствами, из условий теоремы следует исключить), а для задач без ограничений-неравенств – *теоремой Лагранжа*. В последнем случае первая из сумм в правой части условия разложимости отсутствует, а условия (с) и (d) – неотрицательности и дополняющей нежесткости – вообще не нужны, а требование нетривиальности запишется в виде: $(\lambda_0^*, \mu_1^*, \dots, \mu_M^*) \neq 0$.

Если ввести *функцию Лагранжа*, записав ее с использованием векторных обозначений:

$$L(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 Q(x) + (\lambda, g(x)) + (\mu, h(x)), \quad (3.3)$$

то условие разложимости (d) можно представить как условие стационарности функции Лагранжа: $\nabla L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$.

Если функции g_1, \dots, g_N выпуклы (вниз), ограничения – равенства либо отсутствуют, либо аффинны, функция $Q(x)$ выпукла (вниз), то такая *задача называется выпуклой*. В выпуклой задаче математического программирования все локальные минимумы являются глобальными.

Если задача математического программирования выпукла и при этом допустимая область D регулярна в точке x^* (*регулярность области* в точке – это свойство, гарантирующее, что условия оптимальности всегда выполняются в этой точке при $\lambda_0^* \neq 0$), то условия теоремы Каруша-Куна-Таккера (а)-(е) будут не только необходимыми, но и достаточными условиями, определяющими точку глобального минимума x^* .

Можно указать простые достаточные условия регулярности для двух классов задач.

Условие регулярности Слейтера. Оно применимо только при следующих условиях: $g_1(x), \dots, g_N(x)$ выпуклы (вниз), $h_1(x), \dots, h_M(x)$ либо отсутствуют, либо аффинны. Если при этих условиях в множестве D из (3.2) существует допустимая точка \bar{x} , все неравенства в которой выполняются строго, т.е. $g_i(\bar{x}) < 0$ ($i = 1, \dots, N$), то область D регулярна во всех своих точках.

Из условия Слейтера можно получить следующее удобное следствие. Если область D задана аффинными ограничениями и $D \neq \emptyset$, то D регулярна во всех своих точках.

Для невыпуклого гладкого случая можно использовать достаточное *условие регулярности в форме независимости градиентов*: если в точке x^* активны (т.е. обращаются в равенства) ограничения $g_{i1}(x^*) = 0, \dots, g_{ir}(x^*) = 0$ и система векторов $\nabla g_{i1}(x^*), \dots, \nabla g_{ir}(x^*), \nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_M(x^*)$ линейно независима, то область D регулярна в точке x^* .

Выполнение условий регулярности, обеспечивающее $\lambda_0^* \neq 0$, позволяет принять $\lambda_0^* = 1$ (за счет замен множителей Лагранжа), а также не рассматривать альтернативный вариант записи основного градиентного соотношения (d) при $\lambda_0^* = 0$. Для невыпуклых задач даже при регулярности допустимого множества в точке x^* условия (a)-(e) остаются лишь необходимыми условиями локального минимума, тогда как для выпуклых задач при наличии регулярности условия (a)-(e) становятся критерием глобального минимума.

Рассмотрим геометрический смысл этих условий при числе переменных $n = 2$ в случае отсутствия ограничений-равенств ($M = 0$).

Предположим, что в точке x^* активны только два ограничения с номерами 1 и 2 (рис. 3.1 а). Вектора градиентов $\nabla g_1(x^*)$, $\nabla g_2(x^*)$ для этих ограничений являются внешними нормальными к соответствующим фрагментам границы допустимого множества. В общем случае, если фрагменты границ пересекаются без касания, система этих векторов линейно независима, следовательно, допустимое множество будет регулярно в точке x^* и в системе условий Куна-Таккера можно принять $\lambda_0^* = 1$. Из (c)-(e) следует, что если x^* – локальный минимум, то

$$-\nabla Q(x^*) = \lambda_1^* \cdot \nabla g_1(x^*) + \lambda_2^* \cdot \nabla g_2(x^*) \quad (3.4)$$

при $\lambda_1^* \geq 0$, $\lambda_2^* \geq 0$. Геометрически это означает, что вектор антиградиента целевой функции в точке x^* содержится в замкнутом конусе $A(x^*)$, натянутом на внешние нормали к границам активных неравенств (рис. 3.1 (a)):

$$A(x^*) = \left\{ v : v = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(x^*); \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \right\}.$$

В случае дифференцируемости функции $\partial Q(x^*)/\partial v = (\nabla Q(x^*), v)$. Поэтому направления ее строгого локального убывания образуют открытый конус $B(x^*)$, показанный на рис. 3.1 (b) где

$$B(x^*) = \left\{ v : (\nabla Q(x^*), v) > 0 \right\}.$$

Для локальной оптимальности x^* требуется локальная (в окрестности точки x^*) непересекаемость допустимого множества D с конусом $B(x^*)$ направлений строгого локального убывания (после перемещения его вершины в точку x^*). Чтобы это требование было выполнено, необходимо и достаточно, чтобы внутренняя нормаль к границе конуса $B(x^*)$ (такой нормалью является вектор антиградиента функции) не покидала конуса $A(x^*)$, а это означает возможность разложения (3.4) с неотрицательными коэффициентами.

На рис. 3.2 показан пример ситуации, когда в окрестности точки x^* возникло пересечение D с $B(x^*)$. При этом в разложении (3.4) окажется

$\lambda_1^* > 0, \lambda_2^* < 0$. Появление отрицательного значения у множителя Лагранжа свидетельствует о возможности строгого уменьшения значения $Q(x^*)$ за счет ухода с фрагмента границы $g_2(x) = 0$ множества D (при этом точка, естественно, не должна покидать допустимое множество).

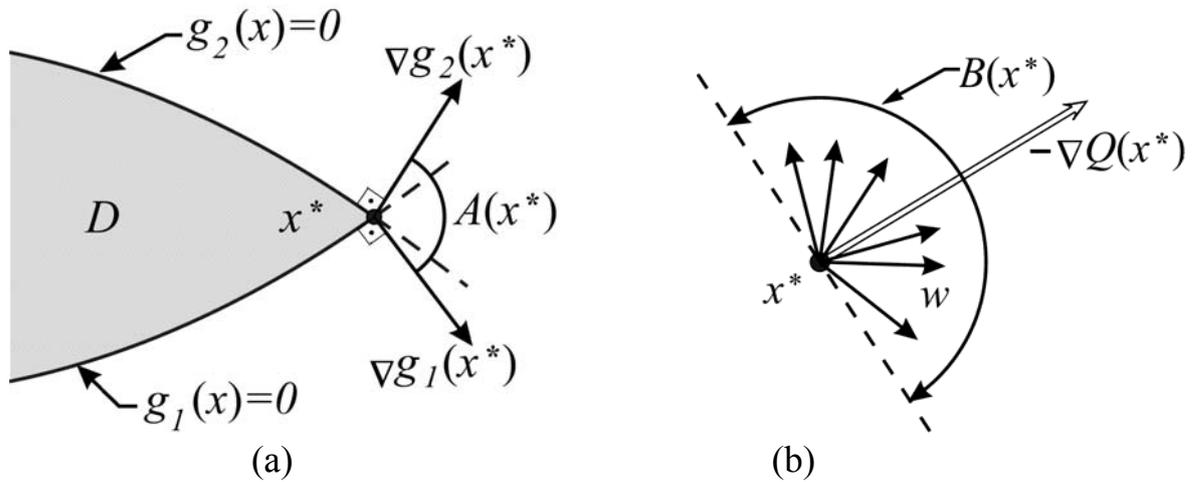


Рис. 3.1. Показано: (а) – конус $A(x^*)$, порождаемый градиентами активных ограничений при неотрицательных значениях множителей Лагранжа; (б) – конус $B(x^*)$ направленный строгого локального убывания функции Q в точке x^*

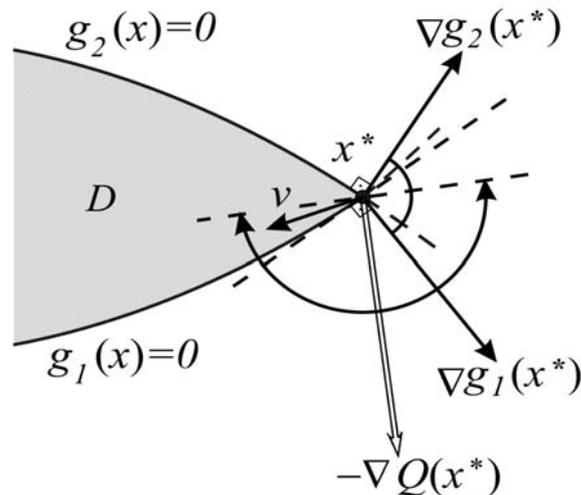


Рис. 3.2. Порождение допустимого направления v со строгим убыванием функции при нарушении неотрицательности множителя Лагранжа ($\lambda_2 < 0$)

При аналитическом поиске решений системы условий Каруша-Куна-Таккера (а)-(е) нелинейность уравнений дополняющей нежесткости является фактором, усложняющим решение. Эти уравнения можно исключить, если проводить суммирование по i в (d) только по номерам активных в точке x^* неравенств, т.е. по $i \in I(x^*)$. Однако множество номеров $I(x^*)$ активных в точке x^* ограничений-неравенств нам неизвестно, поэтому понадобятся гипотезы о его составе: $I(x^*) = J$, где J – предполагаемое множество номеров

активных неравенств. Система условий (a)-(d) с суммированием в (d) только по $i \in J$ будет включать замкнутую систему уравнений относительно x^* , μ^* и λ_i^* , ($i \in J$).

Коррекция предполагаемого набора J должна выполняться с учетом результатов решения системы условий Куна-Таккера, составленной при предыдущей гипотезе относительно $I(x^*)$. Возможно три основных случая при нарушении условий. В первом случае система может оказаться несовместной, тогда нужно изменить множество J . Во втором случае полученное значение x^* может нарушить некоторые из ограничений, которые считались неактивными в точке решения: $g_i(x^*) > 0$. В этом случае нарушенные ограничения или часть из них следует ввести в число предполагаемых активных, т.е. в множество J . Для этого полагаем $J := J \cup \{i\}$. В третьем случае некоторые из множители λ_j^* могут оказаться отрицательными, как в случае, показанном на рис. 3.2. При смещении с границ таких ограничений в множество D функция $Q(x)$ будет строго локально убывать (см. рис. 3.2) (для выполнения этого свойства в рассматриваемой точке должно соблюдаться достаточное условие регулярности в форме линейной независимости градиентов), следовательно, при поиске решения задачи неравенства с $\lambda_i^* < 0$ следует вывести из числа предполагаемых активных, т.е. исключить их из J . Для этого полагаем $J := J \setminus \{j\}$.

Если же все условия-неравенства $\lambda^* \geq 0$, $g(x^*) \geq 0$ окажутся выполненными, то в выпуклой регулярной задаче найденная точка x^* будет ее глобальным минимумом.

Пример 1. Выпуклая задача

Разберем задачу с двумя переменными, в которой нужно найти $\min(x_1^2 + 19x_2x_1 + 100x_2^2)$ при следующих ограничениях: $x_1 \leq -1$, $x_2 \geq 1$, $x_1 \geq -4 - x_1$; $x_2 \geq -11 - 2x_1$.

Приведем задачу к стандартному виду, выбрав

$$Q(x) = x_1^2 + 19x_1x_2 + 100x_2^2, \quad g_1(x) = x_1 + 1, \quad g_2(x) = 1 - x_2, \\ g_3(x) = -4 - x_1 - x_2, \quad g_4(x) = -11 - 2x_1 - x_2,$$

и проанализируем ее свойства.

Все функции ограничений-неравенств $g_i \leq 0$ ($i = 1, \dots, 4$) аффинны, а, значит, выпуклы, поэтому допустимая область D в задаче выпукла. Более того, если взять, например, точку $(x_1, x_2) = (-2, +2)$, то эта точка будет допустимой и все неравенства в ней будут выполняться строго. Используя достаточное условие регулярности Слейтера, можно утверждать, что область D будет

регулярна во всех своих точках, следовательно, в условиях Куна-Таккера $\lambda_0^* \neq 0$ и его можно принять равным единице.

Для проверки выпуклости функции Q запишем для нее матрицу вторых производных:

$$\nabla_{xx}^2 Q(x) = \begin{pmatrix} 2 & 19 \\ 19 & 200 \end{pmatrix}.$$

Ее главные миноры $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 400 - 19^2 > 0$.

По критерию Сильвестра матрица положительно определена. Поскольку для выпуклости дважды непрерывно дифференцируемых функций $Q(x)$ необходимо и достаточно неотрицательной определенности этой матрицы, то $Q(x)$ выпукла в R^2 . Таким образом, условия Куна-Таккера будут необходимыми и достаточными условиями, определяющими решение задачи.

Выпишем градиенты функций задачи.

$$\nabla Q = \begin{pmatrix} 2x_1 + 19x_2 \\ 19x_1 + 200x_2 \end{pmatrix}; \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \nabla g_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \nabla g_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы воспользоваться условиями Куна-Таккера, необходимо принять гипотезу о наборе активных в точке решения ограничений-неравенств. Предположим вначале, что $I(x^*) = J = \emptyset$, т.е. в точке решения нет активных неравенств. Условия экстремума примут вид $\nabla Q(x_1, x_2) = 0$, что даст точку $(0; 0)$, которая является безусловным минимумом функции $Q(x)$. В ней нарушаются ограничения с номерами 1 и 2, поэтому данная точка не будет являться решением в задаче с ограничениями.

Заметим, что в силу недопустимости полученной точки множество точек, охваченных линией равного уровня $Q(x) \leq C$ при C , близких к значению функции в найденной точке $(0; 0)$, не будет пересекаться с D . Если начать увеличивать значение C , указанное выше множество будет расширяться. Оптимальной в задаче с ограничениями окажется первая возникшая общая точка этого множества с D . Такое геометрическое представление может оказаться полезным, однако при дальнейшем решении использоваться не будет.

Включим нарушенные ограничения 1 и 2 в число предполагаемых активных, приняв гипотезу $I(x^*) = J = \{1, 2\}$. Система условий Куна-Таккера будет иметь вид:

$$\begin{cases} -2x_1 - 19x_2 = \lambda_1 \\ -19x_1 - 200x_2 = -\lambda_2 \end{cases} \begin{cases} x_1 + 1 = 0 \\ 1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Из нее $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $\lambda_1 = -17 < 0$, $\lambda_2 = 181 > 0$.

На рис. 3.3 приведено взаимное расположение ∇Q , ∇g_1 и ∇g_2 в найденной точке (обозначим ее как точку A). Штриховкой и дугой отмечено

открытое полупространство направлений строгого локального убывания функции Q в точке $(-1; 1)$. Очевидно, что можно, не покидая ограничения $g_2(x) = 0$, уйти с границы $g_1(x) = 0$ (соответствующей $\lambda_1 < 0$), уменьшив значение $Q(x)$. Поэтому исключим 1-е ограничение из числа активных, т.е. выполним коррекцию $J := J \setminus \{1\}$. Это приведет к $J = \{2\}$.

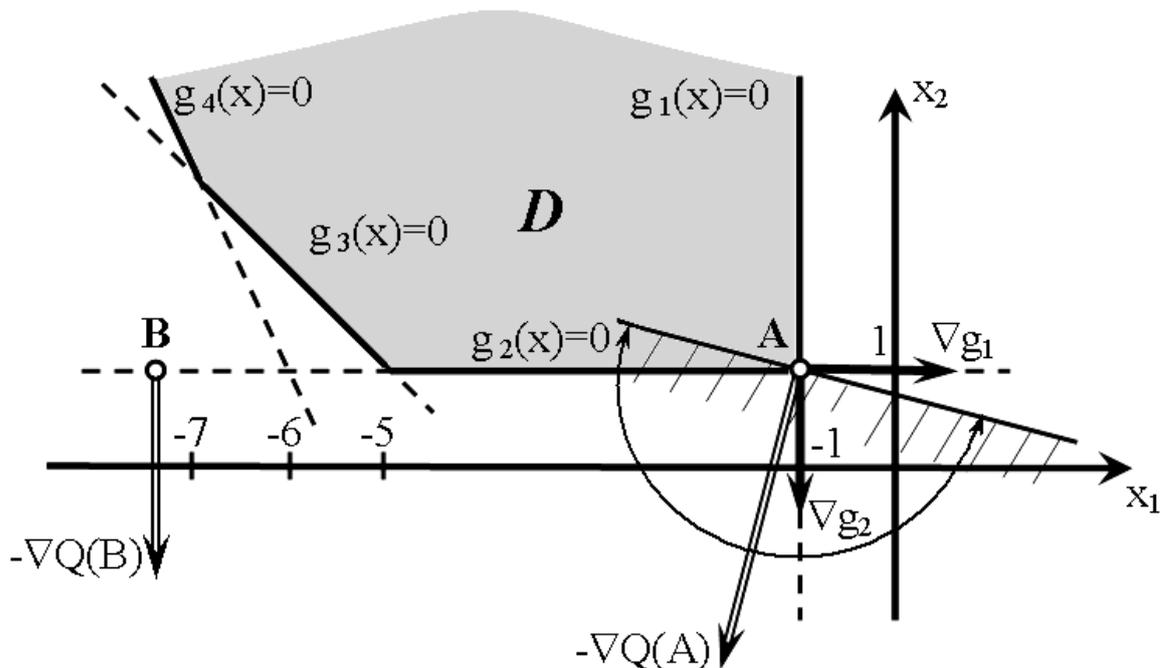


Рис. 3.3. Иллюстрация к решению выпуклой задачи из примера 1

Примем гипотезу $I(x^*) = J = \{2\}$. Получим новую систему условий Куна-Таккера

$$\begin{cases} -2x_1 - 19x_2 = 0 \\ -19x_1 - 200x_2 = -\lambda_2 \\ 1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая, находим $x_1 = -19/2$; $x_2 = 1$; $\lambda_2 = 19^2/2 + 200 > 0$. На рис. 3.3 эта точка обозначена как B .

Эта точка допустимой не является, т.к. в ней нарушаются ограничения с номерами 3 и 4, а именно, $g_3(x) = 13/2$ и $g_4(x) = 7$. Одновременно оба включить в число предполагаемых активных нельзя, поскольку система из трех равенств окажется несовместной.

В рассматриваемом простом примере можно достаточно точно построить линии равного уровня функции $Q(x) = C$. Они, очевидно, будут эллипсами с центрами в точке безусловного минимума $(0; 0)$ и повернутыми по отношению к координатным направлениям x_1, x_2 осями. Такое построение позволило бы точно предсказать, какое из нарушенных неравенств действительно активно в точке решения. Однако мы не будем прибегать к подобному анализу. Более

того, при дальнейших вычислениях не будем использовать также информацию о взаимном расположении границ 3-го и 4-го ограничений, вытекающую из рис. 3.3.

Используем подход, применимый в ситуациях, когда наглядная геометрическая иллюстрация невозможна (например, при решении многомерных задач с $n \geq 3$).

В общем случае из нескольких нарушенных ограничений активными в точке решения могут оказаться любые. Чтобы внести упорядоченность в перебор, обычно оценивают степень нарушения ограничений и вначале в качестве предполагаемого активного выбирают то, которое нарушается в большей степени. Однако, перед этим сравнением ограничения нужно нормировать, разделив каждое из них на норму вектора его градиента в текущей точке–оценке x^* . В случае аффинных ограничений степени их нарушения (после выполнения такой нормировки) будут соответствовать расстояниям от текущей оценки x^* до границ, порожденных ограничениями.

Применим указанный подход к нашей задаче. Вычислим расстояния от точки B до границ нарушенных ограничений. Разделим значения функций 3-го и 4-го ограничений в этой точке на нормы их градиентов, т.е. на $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$, соответственно. Поскольку при $x = B$ значения соотносятся так: $g_3(x)/\sqrt{2} = 13/\sqrt{8} > g_4(x)/\sqrt{5} = 7/\sqrt{5}$, то предполагаемым активным будем считать 3-е ограничение.

Примем гипотезу $I(x^*) = J = \{2,3\}$. Система условий примет вид:

$$\begin{cases} -2x_1 - 19x_2 = -\lambda_3 \\ -19x_1 - 200x_2 = -\lambda_2 - \lambda_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - x_2 = 0 \\ -4 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

В результате получаем $x_1 = -5, x_2 = 1, \lambda_2 = 96 > 0, \lambda_3 = 9 > 0$. Остальные ограничения в найденной точке выполняются, следовательно, $x^* = (-5; 1)$ является глобальным минимумом задачи; $Q(-5; 1) = 600$.

Рассмотрим еще один пример, в котором минимизируемая функция не является выпуклой.

Пример 2. Невыпуклая задача

Пусть требуется найти глобальный минимум в задаче:

$$\min \{x_1 \cdot x_3 : x \in D\}, \quad D = \{x \in R^3 : x_2 \geq 1 - x_2, \quad x_1 - 2 \leq x_3, \quad x_2 + x_3 = 2\}.$$

Допустимая область D задана линейными ограничениями (равенствами и неравенствами) и является выпуклой. Более того, нетрудно подобрать такую допустимую точку, например, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$, что неравенства выполняются строго, следовательно, для области D выполнено достаточное условие регулярности Слейтера. Поскольку все ограничения в задаче аффинны, можно было для выяснения вопроса о регулярности воспользоваться не самим

условием Слейтера, а следствием из него для областей такого вида. Тогда было бы достаточно установить только непустоту множества D . Это значит, что в условиях Каруша-Куна-Таккера всегда можно считать $\lambda_0 = 1$.

Матрица Гессе имеет вид:

$$\nabla_{xx}^2 Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку главные миноры матрицы вторых производных обращаются в нули, то по критерию Сильвестра нельзя выяснить знакоопределенность матрицы. Запишем ее характеристический полином относительно переменной p : $p^3 - p$. Подсчитав собственные числа, видим, что $p_1 = 0$, $p_{2,3} = \pm 1$. Следовательно, матрица Гессе является знаконеопределенной, а минимизируемая функция не является выпуклой.

Поскольку задача не является выпуклой, условия Каруша-Куна-Таккера не будут являться достаточными, а будут лишь необходимыми условиями локального минимума. Поскольку условия оптимальности в этой задаче лишь только необходимы, то сначала следует доказать существование минимума в этой задаче. Если решение существует, то далее придется отыскивать все точки, где эти условия выполняются, и затем, сравнивая значение функции в этих точках, определять глобальный минимум.

В рассматриваемой задаче для упрощения решения можно, используя связь $x_2 + x_3 = 2$, исключить x_2 из ограничений. Тогда задача примет вид:

$$\min \{x_1 \cdot x_3 : x \in D_2\}, \quad D_2 = \{(x_1, x_3) \in R^2 : x_3 - x_1 \geq 1, x_1 - x_3 \leq 2\}.$$

Поскольку в пространстве переменных x_1, x_3 матрица вторых производных минимизируемой функции новой задачи

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $p_{1,2} = \pm 1$, то поверхность $z = x_1 \cdot x_3$ является седловой (что, впрочем, непосредственно видно из ее формулы) и функция не имеет конечных безусловных минимумов. При этом либо минимума вообще нет, либо он достигается на границах области. Проанализируем вопрос о существовании минимума.

Проведем исследование. Область D_2 неограниченна. Изучим поведение функции вдоль прямых $x_1 - x_3 = c$ ($1 \leq c \leq 2$), параллельных границам области. Введем вектор $\nu = (1; 1)$, направленный вдоль этих прямых. Функция $Q(x)$ имеет по направлению ν положительную вторую производную, поскольку

$$\frac{\partial^2 Q(x)}{\partial v^2} = v^T \nabla_{xx}^2 Q \cdot v = (1; 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0.$$

Отсюда и из квадратичного вида функции $Q(x)$ следует существование конечного минимума в задаче, поскольку на бесконечности функция будет возрастать равномерно по параметру c .

Исследуем границу $x_3 - x_1 = 1$. Система условий Куна-Таккера примет вид:

$$\begin{aligned} -x_3 &= -\lambda_1, & x_3 - x_1 &= 1 \\ -x_1 &= \lambda_1, & \lambda &\geq 0, \end{aligned}$$

где λ_1 — множитель Лагранжа. Они выполняются при $x_1 = -0.5$, $x_3 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.5$. Значение функции равно -0.25 (точка A на рис. 3.4).

Исследуем границу $x_1 - x_3 = 2$. Для нее имеем следующую систему необходимых условий локального минимума:

$$\begin{aligned} -x_3 &= \lambda_1, & x_1 - x_3 &= 2 \\ -x_1 &= -\lambda_1, & \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

Они выполняются при $x_1 = +1$, $x_3 = -1$, $\lambda_1 = 1$ (точка B на рис. 3.4). Значение функции равно -1 , т.е. меньше, чем в первой найденной точке. Следовательно, глобальный минимум вспомогательной задачи достигается в точке $x_1 = 1$, $x_3 = -1$, а для исходной задачи — в точке $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

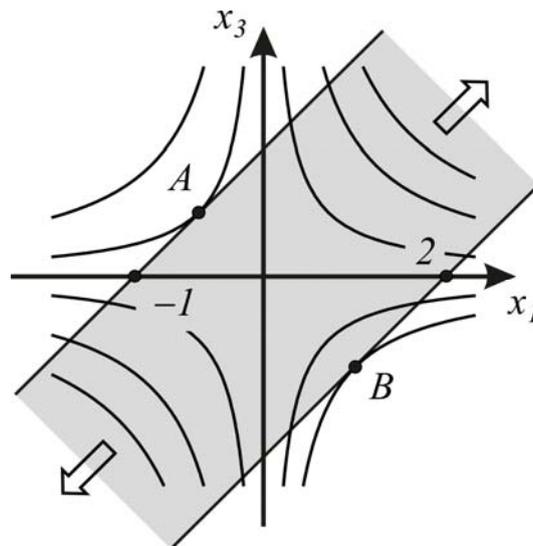


Рис. 3.4. Структура задачи на линейном многообразии, порожденном ограничением-равенством (стрелками показаны направления возрастания функции)

Дополнительный материал и задачи по данному разделу можно найти в литературе [5, 8-16].

3.2. Контрольные задания

1. Используя теорему Лагранжа, определить глобальный минимум в задачах: (a) $\min\{x_2 - x_1^3/3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$; (b) $\min\{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3 : x \in D\}$, где $D = \{x \in R^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1^2 + x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$.

2. Для задачи $\min\{10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 : x \in D\}$
 $D = \{x \in R^2 : x_1 + x_2 \leq 6; x_1 - x_2 \leq 1; 2x_1 + x_2 \geq 6; 0,5x_1 - x_2 \geq -4\}$.

Начертите на плоскости (x_1, x_2) вид области D . В ее угловых точках постройте внешние нормали к границам, а также вектор $-\nabla Q(x)$. Используя геометрическую трактовку условий Куна-Таккера, ответьте на вопрос: может ли точка глобального минимума располагаться в одной из вершин? На основе полученных результатов сделайте выводы о возможном положении точки условного минимума. Проверьте Ваши предположения с помощью теоремы Куна-Таккера, найдите решение.

3. Используя геометрические представления, укажите точку минимума в задаче $\min\{x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1; -x_1 + x_2^2 \leq 0; x_1 + x_2 \geq 0\}$.

Обоснуйте полученные результаты с помощью условий Куна-Таккера.

4. Проверьте выполнение условий Куна-Таккера в точках $(0;2), (0;0), (\sqrt{2};0), (1;0), (0.05;0)$ для задачи: $\min\{10x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 + 2x_2 - 10 : x \in D\}$,
 $D = \{x \in R^2 : 2x_1^2 + x_2^2 \leq 4; x_1 + x_2 \leq 4; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0\}$.

5. Найдите расстояние от начала координат до выпуклого множества $D = \{x \in R^2 : x_1^2 - x_2^2 \geq 4; x_1 \geq 0\}$. Обоснуйте результат с использованием теоремы Куна-Таккера.

6. Найдите проекцию произвольной точки y на множество $D = \{x \in R^2 : x_1 + x_2 \geq 4; 2x_1 + x_2 \geq 5\}$. Дайте геометрическую трактовку условиям неотрицательности множителей Лагранжа.

Указание: Решите задачу, рассмотрев четыре возможных случая относительно множества $I(y)$, содержащего номера неравенств, на границе которых находится проекция точки y : $I(y) = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$.

7. Найдите проекцию произвольной точки $x \in R^n$ на следующие множества: (a) параллелепипед $a_i \leq x_i \leq b_i, (i = \overline{1, n})$;

(b) шар $\sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 \leq r^2$; (c) конус $x_n^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2; x_n \geq 0$.

8. Найдите минимум функции $6x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 9x_1 - 3x_2 + x_3^2 - x_3$ при ограничениях $x_1 - x_2 \geq -3$, $-x_1 + 5x_2 \geq 15$, $0 \leq x_1 \leq 5$.

Как изменится решение, если добавить ограничение-равенство $x_1 + x_3 = 1$? Как изменится решение, если кроме ограничения-равенства добавить еще одно дополнительное неравенство: $10 \cdot x_2 \leq x_1 - 1$?

9. Проверьте выпуклость и регулярность области $D = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_2 \leq x_1^3\}$. Найдите решение задачи: $\min\{x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 : x \in D\}$.

Указание: если предположить, что активно одно ограничение $x_2 \leq x_1^3$, то может возникнуть проблема с аналитическим определением значения множителя Лагранжа. Попробуйте оценить его знак без явного вычисления.

10. На классе гладких задач исследовать область D на регулярность, используя достаточные условия и определение регулярности области в точке. $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4, x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1, x_1 \leq 0\}$. Изменяются ли Ваши выводы, если из описания области D исключить последнее неравенство $x_1 \leq 0$?

11. Найдите решения следующих задач:

$$\max\{2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} : x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\};$$

$$\max\{2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 3\sqrt{x_3} : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_i \geq 0 (i = \overline{1,3})\};$$

$$\max\left\{\alpha_1\sqrt{x_1} + \dots + \alpha_n\sqrt{x_n} : x_1 + \dots + x_n \leq 1, x_i \geq 0 (i = \overline{1,n})\right\},$$

где $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$.

12. Найдите минимум функции $x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 5x_2 + x_3^2$ при ограничениях $x_1 + 2x_2 + x_3^2 \leq 6$, $x_1 \leq 2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

13. Решите задачу $\min\{x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 13x_1 - 22x_3 - 10\}$ при ограничениях $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2$, $x_1^4 + 2x_2 + x_3 \leq 3$, $4x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 5$, $x_1 - 2x_3 = -1$, $x_3 \geq 0$.

14. Найдите минимум функции $x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2$ в пространстве переменных x_1, x_2, x_3 при ограничениях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

15. На допустимом множестве, заданном следующими ограничениями: $3 + x_1 - x_3 \geq 0$, $0 \leq x_1 \leq 2$, $15 + x_1 \leq 5x_3$, $2x_1 + x_2 = 2$. Решите задачу определения минимума функции $24x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_3 - 12x_3 + 36x_1 - x_2$.

16. Найдите глобальный минимум в задаче

$$\min \{5x_1^2 + 9x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3 : x \in D\}$$

$$D = \{x \in R^3 : 4x_1 + 4x_2 \geq 1, x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}.$$

17. Найдите $\min \{x_1^2 + 0.5x_2^2 + 0.5x_3^2 - x_1x_3 - 7x_1 + x_3 - 5x_2\}$ при ограничениях $x_3 - 0.5x_1 \leq 1$, $-x_1 + 5x_3 \geq 10$, $5 \leq x_1 \leq 8$, $x_1 + x_2 = 1$.

18. С использованием теоремы Куна-Таккера докажите, что из всех треугольников с общим углом при вершине и заданной суммой длин боковых сторон равнобедренный треугольник имеет наименьшее основание.

19. В углах прямоугольной заготовки с размерами A на B вырезают квадраты с размерами x на x . Из оставшейся части собирают коробку. Определите значение x , при котором объем коробки максимален.

20. Найдите разложение положительного числа R на N вещественных сомножителей так, чтобы их сумма была минимальной.

21. Рассмотрите задачу о ритмичности производства (задачу № 11 из раздела 1), предполагая, что сырье не является штучным, т.е. значения x_i не целочисленны. Решите задачу при следующих значениях параметров: $N = 5$, $E_0 = 5$, $E = 5$, $A = 20$, $P_1 = 6$, $P_2 = 5$, $P_3 = 3$, $P_4 = 1$, $P_5 = 4$; а также при $N = 5$, $E_0 = 1$, $E = 3$, $A = 15$, $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 5$, $P_4 = 5$, $P_5 = 4$.

22. Найдите глобальные минимумы в задаче:

$$\min \{3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 - 4x_2 : x \in D\}$$

$$D = \{x \in R^2 : (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1, x_1 \geq -2, x_2 \geq 0\}.$$

23. Решите задачу определения глобальных минимумов функции $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3$ при следующих ограничениях: $1 - x_1 \leq x_3 \leq 2 - x_1$, $x_1 = x_2 - x_3$.

24. Найдите глобальный минимум в задаче: $\min \{x_1^2 + 2x_2x_3 - x_3 : x \in D\}$

$D = \{x \in R^4 : x_1 + x_4 = 4, x_2 + x_3 = 8, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$. Обоснуйте его единственность.

25. Найдите глобальный минимум функции $x_1^2 - x_1 \cdot x_3 - x_3^2 + x_2 \cdot x_3$ на D :
 $D = \{x \in R^3 : x_1 \geq 0; 2x_1 + x_3 \geq 1; x_1 + x_2 \geq 0; 2x_1 + x_2 \leq 3; x_3 - x_1 - x_2 = 0\}$.

26. Обосновать существование глобального минимума и найти его в задаче $\min\{3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 10x_2 - 14x_3 : x \in D\}$, где допустимое множество $D = \{x \in R^3 : x_3 \leq x_2^2, 2x_2 - x_3 \leq 1, 2x_2 + x_3 \geq -1, x_1 \leq 2, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

27. Найти глобальный минимум, обосновав его существование, в задаче:

$$\min\{-x_1x_3 + x_2x_3 - x_3^2 + x_3 + x_2^2 : x \in D\},$$

$$D = \{x \in R^3 : 2x_2 \leq x_1 + 1, x_3 \leq 2x_2 + 1, 2x_2 - x_1 \geq -2, x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\}.$$

4. Вычислительные методы математического программирования

4.1. Основные понятия

Вычислительным методам решения задач математического программирования посвящена обширная литература [8-11, 13, 17, 18, 19].

В общем случае задача математического программирования представима в виде:

$$\min \{Q(x) : x \in D\}, \quad (4.1)$$

$$D = \{x \in E \subseteq R^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, N, h_j(x) = 0, j = 1, \dots, M\}, \quad (4.2)$$

где E - множество простой геометрической структуры, например, $E = R^n$ или $E = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$. Постановка (4.1)-(4.2) зависит от набора функций, представимого вектор-функцией $f = (Q, g_1, \dots, g_N, h_1, \dots, h_M)$.

Вычислительный метод должен строить для задачи (4.1)-(4.2) оценку решения e^k (интервальную или точечную) по координатам или по значению функции, проводя испытания функций f в точках x^0, x^1, \dots, x^k . Результат испытания $J_k = J(x^k, f)$ включает значение функции $f_k = f(x^k)$, а также может включать значение ее частных производных до порядка p (обычно $p = 1$ или $p = 2$). Значение p называют *порядком испытания*, например, результат испытания первого порядка имеет вид $J_k = (f_k, \nabla f_k)$, а второго – $J_k = (f_k, \nabla f_k, \nabla^2 f_k)$. Результаты испытаний, проведенных за k шагов, образуют множество поисковой информации $\omega_k = \{(x^s, J_s) : s = 1, \dots, k\}$.

Вычислительный метод α (или алгоритм) решения задачи (4.1)-(4.2) строится исходя из имеющейся априорной информации о свойствах функций f и представляет набор правил $\alpha = \langle P_k(\omega_k), E_k(\omega_k), M_k(\omega_k) \rangle, k = 0, 1, \dots$. Они определяют выбор точки следующего испытания $x^{k+1} = P_k(\omega_k)$, текущую оценку решения $e^k = E_k(\omega_k)$, признак останова поиска $\mu^k = M_k(\omega_k)$ ($\mu^k = 0$ - нет останова, $\mu^k = 1$ - останов).

Одним из принципов построения методов оптимизации является принцип наилучшего гарантированного результата. Он может быть использован, если для класса решаемых задач $\Phi = \{f\}$ и выбранного класса алгоритмов $A = \{\alpha\}$ можно ввести функцию эффективности $d(\alpha, f)$, показывающую, насколько удачным было применение α к задаче f . Например, значение d можно

трактовать как меру остаточной погрешности в оценке решения задачи f с использованием метода α .

Функцию $d^*(\alpha)$ называют *гарантированной эффективностью метода* α на классе Φ , если $d^*(\alpha) = \sup\{d(\alpha, f) : f \in \Phi\}$.

Методы α^* и α^o из A назовем *оптимальным* и ε -*оптимальным*, соответственно, если

$$d^*(\alpha^*) = \inf\{d^*(\alpha) : \alpha \in A\}; \quad d^*(\alpha^o) \leq \inf\{d^*(\alpha) : \alpha \in A\} + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0).$$

Заметим, что оптимального метода может не существовать, но ε -оптимальный всегда существует.

Кроме введенного понятия оптимальности по отношению к априорной информации о функции ($f \in \Phi$), при построении методов широко используется понятие *последовательной оптимальности*, в частности, *одношаговой оптимальности*, учитывающее текущую поисковую информацию.

Пусть метод α уже выполнил k испытаний, результаты которых запомнены в виде поисковой информации ω_k . Обозначим через Φ_{ω_k} апостериорный класс функций

$$\Phi_{\omega_k} = \{f \in \Phi : \forall (x^s, J_s) \in \omega_k : J(x^s, f) = J_s\}.$$

Таким образом, в классе Φ_{ω_k} содержатся те функции из исходного класса Φ , результаты испытаний которых во всех точках x^s уже проведенных испытаний совпадают с имеющимися результатами J_s этих испытаний. Функции из Φ_{ω_k} неразличимы по результатам испытаний в точках x^s ($s = 1, \dots, k$).

Пусть функция $d(\omega_k)$ описывает эффективность проведенных испытаний. *Гарантированной эффективностью очередного испытания* в точке x называют

$$d^*(\omega_k, x) = \sup\{d(\omega_k \cup (x, J)) : J = J(x, f), f \in \Phi_{\omega_k}\}.$$

Говорят, что метод α *последовательно оптимален на один шаг вперед* (*одношагово оптимален*), если выбор следующего испытания подчиняется условию

$$x^{k+1} = \arg \inf\{d^*(\omega_k, x) : x \in E\},$$

Если нижняя грань в определении x^{k+1} не достигается, используют значение x , обеспечивающее ее ε -приближение.

4.2. Поиск минимума унимодальной функции на отрезке

Пусть Φ_u - класс функций Q , унимодальных на отрезке $[a, b] \subseteq R^1$: они должны иметь на этом отрезке единственный глобальный минимум (обозначим его x^*) и строго убывать на $[a, x^*]$, а на $[x^*, b]$ – строго возрастать. Унимодальные функции не обязаны быть непрерывными. Их испытания включают только измерения значений функции.

Пусть методом α проведено N измерений в точках $a < x_1 < \dots < x_N < b$ с результатами $Q_k = Q(x_k)$ и $k^*(Q) = \arg \min \{Q_k : k = 1, \dots, N\}$, где под «arg min» понимается номер испытания с наименьшим значением. Тогда

$$x^* \in [x_{k^*(Q)-1}, x_{k^*(Q)+1}].$$

Заметим, что здесь под x_0 и x_{N+1} , по определению, понимаются точки a и b , в которых измерения не проводятся. Данный интервал является оценкой решения, т.е. $e^N = [x_{k^*(Q)-1}, x_{k^*(Q)+1}]$. Эффективность выполненных измерений можно оценить длиной этого интервала. Заметим, что в общем случае не только номер $k^*(Q)$, но и координаты самих точек измерений x_k зависят от функции Q .

N -шаговые пассивные методы

Если метод α_N проводит ровно N измерений, то такой метод называют N -шаговым. Если для метода α_N правила P_k выбора точек испытаний не зависят от накопленной поисковой информации ω_k , то метод называют пассивным. Пассивный N -шаговый метод $\alpha_N^{\text{пасс}}$ полностью определяется набором точек измерений $a < x_1 < x_2 < \dots < x_N < b$, положение которых не зависит от минимизируемой функции. Для таких методов функцию эффективности можно принять в виде

$$d(\alpha_N^{\text{пасс}}, Q) = x_{k^*(Q)+1} - x_{k^*(Q)-1};$$

гарантированная эффективность на классе $Q \in \Phi_u$ примет вид

$$d^*(\alpha_N^{\text{пасс}}) = \max \{x_{k+1} - x_{k-1} : k = 1, \dots, N\}.$$

Это позволяет построить для каждого N оптимальные или ε -оптимальные пассивные алгоритмы, гарантированная эффективность которых оказывается равной $(b-a)/((N+1)/2)$ для нечетных N и $(b-a)/(N/2+1) + \varepsilon$ для четных N . Для этих методов степень сокращения

исходного интервала невысока за счет пассивного характера поиска. Последовательные методы могут обладать лучшей эффективностью.

Метод дихотомии – неоптимальный последовательный метод

Это простой последовательный метод, позволяющий сокращать интервал поиска в два раза с использованием каждого двух новых измерений. Первое измерение не приводит к сокращению интервала. Данный метод не является ни оптимальным, ни \mathcal{E} -оптимальным.

Описание алгоритма

(a) Задать $\delta > 0$ – точность решения.

(b) Положить $c = (a + b)/2$ и $Q_c = Q(c)$.

(c) Пока $b - a > \delta$, выполнять пункт (d), иначе – перейти на пункт (e).

(d) Вычислить $x = (a + c)/2$, $Q_x = Q(x)$, $y = (c + b)/2$ и $Q_y = Q(y)$.

Используя измерения функции в трех точках x , c и y ($a < x < c < y < b$), в зависимости от того, какое из трех значений Q_x , Q_c , Q_y меньше, установить новые значения: если наименьшим было Q_x , то $b := c$, $c := x$, $Q_c := Q_x$; если наименьшим было Q_c , то $a := x$, $b := y$; если наименьшим было Q_y , то $a := c$, $c := y$, $Q_c := Q_y$ (рис. 4.1). Вернуться на пункт (c).

(e) Полученный интервал $[a, b]$ принять в качестве интервальной оценки решения.

Гарантированная эффективность метода дихотомии за N измерений $d^*(\alpha_N^{\text{дих}}) = (b - a)/2^{(N-1)/2}$ (N всегда нечетно).

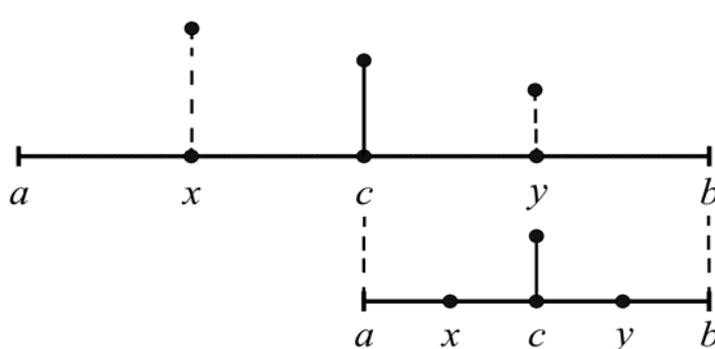


Рис. 4.1. Один из трех возможных случаев сжатия интервала поиска в методе дихотомии после двух новых измерений в точках x и y

Метод золотого сечения и метод Фибоначчи

Рассмотрим методы, которые для очередного сжатия интервала поиска используют только одно новое измерение (кроме начального этапа, требующего проведения сразу двух измерений). Исходя из симметрии задачи, первые два измерения в точках x_2 и y_2 целесообразно размещать симметрично

относительно центра интервала, а на вновь образованных интервалах новое измерение проводить в точке, симметричной точке прежнего измерения, существующей внутри интервала (рис. 4.2).

Обозначим через λ_k доли, составленные длинами соответствующих частей текущего интервала по отношению к его собственной длине. Из рис. 4.2 вытекает следующая их взаимосвязь:

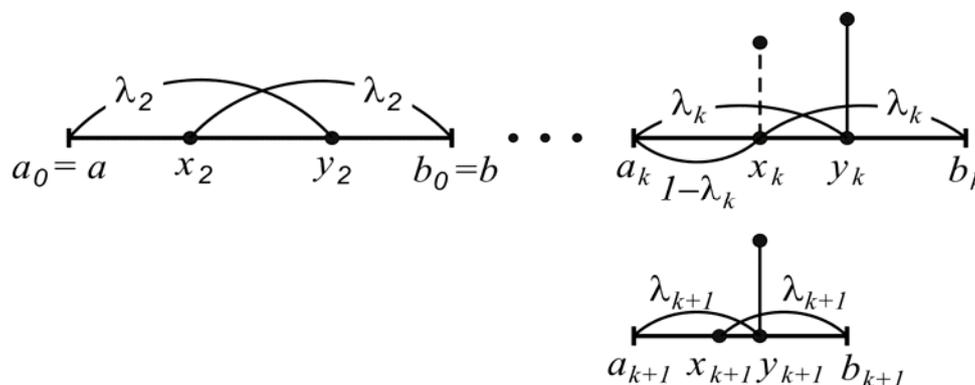


Рис. 4.2. Размещение точек измерений в симметричном методе

$$\lambda_k = \frac{1}{1 + \lambda_{k+1}}. \quad (4.3)$$

Метод золотого сечения использует постоянную пропорцию деления $\lambda_k = \tau = (\sqrt{5} - 1)/2$, полученную как стационарное решение уравнения (4.3).

Описание алгоритма

- (a) Задать $\delta > 0$ - точность решения.
- (b) Провести измерение в точке $y = a + (b - a) \cdot \tau$, $Q_y = Q(y)$ и построить новую точку $x = b - (b - a) \cdot \tau$.
- (c) Пока $b - a > \delta$, выполнять пункт (d), иначе – перейти на пункт (e).
- (d) Провести измерение в новой точке (x или y) и запомнить результат (в Q_x или Q_y). Если $Q_x < Q_y$, то положить $b := y$, $y := x$, $Q_y := Q_x$ и выбрать новую точку $x = b - (b - a) \cdot \tau$; иначе, при $Q_x > Q_y$, положить $a := x$, $x := y$, $Q_x := Q_y$ и выбрать новую точку $y = a + (b - a) \cdot \tau$. Вернуться к пункту (c).
- (e) полученный интервал $[a, b]$ принять в качестве интервальной оценки решения.

Гарантированная эффективность метода золотого сечения за N измерений $d^*(\alpha_N^{з.с.}) = (b - a) \cdot \tau^{N-1} < d^*(\alpha_N^{дих.})$.

Метод Фибоначчи построен американцем Дж. Кифером (J. Kiefer) в 1953 году и назван в честь использованной в нем последовательности чисел

Фибоначчи F_k : $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $F_0 = F_1 = 1$. Метод является ε -оптимальным на множестве A_N всех последовательных N -шаговых методов для класса унимодальных функций Φ_u .

Метод Фибоначчи обладает симметрией при размещении всех точек измерений, кроме последнего N -го. На всех итерациях используются оптимальные пропорции λ_k^* в размещении точек, удовлетворяющие (4.3) и подобранные из условия наилучшего гарантированного сжатия исходного интервала за N измерений. Значения $\lambda_k^* = F_{N-k+1}/F_{N-k+2}$.

При этом $\lambda_N^* = 1/2$, что не позволяет разместить последнее измерение симметрично к имеющемуся (в силу $\lambda_N^* = 1/2$ оно обязательно окажется в центре текущего интервала), поскольку это вызвало бы наложение двух точек измерений. Чтобы избежать повторного вычисления в имеющейся точке, последнее измерение смещают от него на малое $\varepsilon > 0$.

Гарантированная эффективность метода Фибоначчи $d^*(\alpha_N^{\text{Фиб}}) = (b-a)/F_N + \varepsilon < d^*(\alpha_N^{3.c.})$ при достаточно малом ε . Известно, что при $N \rightarrow \infty$ гарантированная эффективность метода золотого сечения достаточно близка к эффективности метода Фибоначчи, а именно $F_N/(1/\tau)^{N-1} \approx 1.17$ при $N \rightarrow \infty$. Это соотношение выполняется уже начиная с семи измерений.

Для применения метода Фибоначчи необходимо заранее определить значение N . При решении задачи с заданной точностью $\delta > 0$ величину N вычисляют, исходя из условия $d^*(\alpha_N^{\text{Фиб}}) \leq \delta$.

Описание алгоритма

- (a) Задать $\delta > 0$ - точность решения и ε , $0 < \varepsilon \ll \delta$.
- (b) Определить $N := \min\{n : (b-a)/F_n + \varepsilon \leq \delta\}$.
- (c) Провести измерение в двух первых точках $x = b - (b-a) \cdot F_{N-1}/F_N$, $y = a + (b-a) \cdot F_{N-1}/F_N$, принять $Q_x = Q(x)$ и $Q_y = Q(y)$; $k = 2$.
- (d) При $k = 2, \dots, N-2$, выполнить пункт (e), при $k = N-1$ перейти к пункту (f).
- (e) Если $Q_x < Q_y$, то положить $b := y$, $y := x$, $Q_y := Q_x$ и провести новое испытание в точке $x = y - (y-a) \cdot F_{N-k-2}/F_{N-k}$, $Q_x := Q(x)$; иначе, при $Q_x > Q_y$, положить $a := x$, $x := y$, $Q_x := Q_y$, провести новое испытание $y = x + (b-x) \cdot F_{N-k-2}/F_{N-k}$, $Q_y := Q(y)$. Увеличить счетчик $k := k+1$ и вернуться к пункту (d).
- (f) Если $Q_x < Q_y$, то положить $b := y$, $y := x$, $Q_y := Q_x$ и провести новое испытание в точке $x = y - \varepsilon$, $Q_x := Q(x)$; иначе, при $Q_x > Q_y$,

положить $a := x$, $x := y$, $Q_x := Q_y$, провести новое испытание $y = x + \varepsilon$, $Q_y := Q(y)$. Положить $k = N$, перейти на пункт (г).

(г) Если $Q_x < Q_y$, положить $b := y$, иначе, при $Q_x > Q_y$, положить $a := x$. Принять интервал $[a, b]$ в качестве интервальной оценки решения.

Иллюстрация размещения точек испытаний для метода Фибоначчи приведена на рис. 4.3.

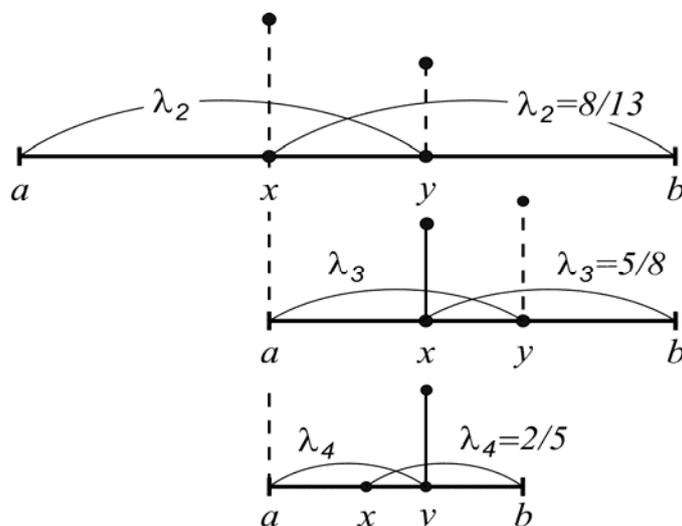


Рис. 4.3. Сокращение интервала и размещение испытаний в методе Фибоначчи на первых итерациях при $N=6$ для некоторого варианта значений функции (указаны доли длин отрезков в текущем $[a, b]$)

4.3. Поиск минимума выпуклой дифференцируемой функции

Пусть в точке x^s проведено испытание первого порядка функции Q с вычислением Q_s и ∇Q_s . Используя критерий выпуклости дифференцируемой функции, получим оценку снизу в виде $Q(x) \geq Q_s + (\nabla Q_s, x - x^s)$. Если проведено k испытаний, оценка принимает вид $Q(x) \geq Q_k^-(x)$, где

$$Q_k^-(x) = \max \{ Q_s + (\nabla Q_s, x - x^s) : s = 1, \dots, k \}.$$

Пусть для выпуклой дифференцируемой функции Q поставлена задача с ограниченной допустимой областью, описанной системой линейных неравенств:

$$\min \{ Q(x) : Ax \leq b \}.$$

Описание алгоритма

(а) Задать $\delta > 0$ - точность поиска по значению функции.

(b) Выбрать $k_0 \geq 1$ начальных точек в области $Ax \leq b$, провести испытания и положить $k = k_0$.

(c) Получить очередную точку $x^{k+1} = \arg \min \{ Q_k^-(x) : Ax \leq b \}$.

(d) Проверить критерий останова: вычислить $Q_k^* = \min \{ Q_s : s = 1, \dots, k \}$ - текущую оценку глобально-оптимального значения. Если $Q_k^* - Q_k^-(x^{k+1}) \leq \delta$, остановить вычисления и перейти к пункту (f), иначе - к пункту (e).

(e) Провести испытание в точке x^{k+1} : $Q_{k+1} = Q(x^{k+1})$, $\nabla Q_{k+1} = \nabla Q(x^{k+1})$. Увеличить счетчик $k := k + 1$ и вернуться к пункту (c).

(f) В качестве оценки решения принять точку $x_k^* \in \{x^1, \dots, x^k\}$, для которой $Q(x_k^*) = Q_k^*$.

Замечание: выбор точки x^{k+1} в пункте (c) алгоритмически сводится к решению задачи линейного программирования в пространстве векторов $(z; x) \in R^{1+n}$:

$$\begin{aligned} (z^{k+1}; x^{k+1}) = \arg \min z \\ Q_1 + (\nabla Q_1, x - x^1) \leq z; \\ \dots\dots\dots \\ Q_k + (\nabla Q_k, x - x^k) \leq z; \\ Ax \leq b \end{aligned}$$

4.4. Поиск локального минимума в задачах без ограничений

Рассмотрим задачу $\min \{ Q(x) : x \in R^n \}$. Большинство методов локальной оптимизации имеют вид итерационных процедур

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k \tag{4.4}$$

где d^k - направление шага, определяемое по результатам испытаний J_k в основных точках поиска x^k , а t_k - скалярный шаговый множитель [8-10], [13, 17, 18]. Его величина определяется с использованием дополнительных испытаний, порядок которых может быть ниже, чем у основных.

Критерии и алгоритмы выбора шагового множителя

Функцию Q будем считать по крайней мере гладкой, а d^k - направлением ее строгого локального убывания в точке x^k .

Критерий 1 (существенности убывания функции):

$$t_k \in \Pi_1(\mu) := \{ t \geq 0 : Q(x^k + t d^k) \leq Q_k + \mu (\nabla Q_k, d^k) t \}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Критерий 2 (близость к минимуму по направлению):

$$t_k \in \Pi_2(\eta) := \left\{ t \geq 0 : \left| (\nabla Q(x^k + t d^k), d^k) \right| \leq \eta \cdot \left| (\nabla Q_k, d^k) \right| \right\}, \quad 0 < \eta < 1.$$

Критерий 3

$$t_k \in \Pi_3(\eta) := \left\{ t \geq 0 : (\nabla Q(x^k + t d^k), d^k) \geq \eta (\nabla Q_k, d^k) \right\}.$$

Критерии 2 и 3 используются совместно с критерием 1. Ниже приведено алгоритмическое описание трех способов выбора шагового множителя: правило Армихо, правило одномерной минимизации и правило Вулфа.

Правило Армихо

(а) Задать параметры: μ , $0 < \mu < 1$ - параметр критерия 1; $\alpha > 0$ - начальное значение шагового множителя; γ , $0 < \gamma < 1$ - коэффициент сжатия.

(б) Положить $t = \alpha$.

(с) Пока $t \notin \Pi_1(\mu)$, корректировать $t := \gamma t$.

(д) При первом выполнении условия $t \in \Pi_1(\mu)$ принять $t_k = t$.

Данное правило является простым и не требует дополнительных вычислений градиента функции, однако оно применимо не для всех способов выбора направлений d^k .

Правило одномерной минимизации

Согласно этому правилу, выбор t_k должен удовлетворять требованию $t_k \in \Pi_1(\mu) \cap \Pi_2(\eta)$. Непустота пересечения гарантируется при $0 < \mu < \eta < 1$. Выбор подходящего t_k происходит в два этапа. На первом этапе определяется отрезок $[0, T]$, содержащий точку t^* первого локального минимума функции $\varphi(t) = Q(x^k + t d^k)$ на луче $t \geq 0$. На втором этапе, в предположении унимодальности функции $\varphi(t)$ на $[0, T]$, выполняется процедура поиска ее минимума (например, методом золотого сечения) до первого обнаружения значения t , удовлетворяющего заданным условиям.

Этап 1. Сканирование луча с удвоением шага

(а) Задать начальное значение шага $0 < \Delta \ll 1$. Положить $t = 0$, $\varphi_t = \varphi(t)$.

(б) Перейти к следующей точке $\bar{t} = t + \Delta$, $\varphi_{\bar{t}} = \varphi(\bar{t})$ и удвоить шаг $\Delta := 2\Delta$.

(с) Если в точке \bar{t} обнаружено возрастание функции φ (например, $\varphi_{\bar{t}} > \varphi_t$ или $\varphi'(\bar{t}) > 0$, если значение производной вычисляется), то положить $T = \bar{t}$ и завершить этап 1; иначе положить $t := \bar{t}$, $\varphi_t := \varphi_{\bar{t}}$ и вернуться к пункту (б).

Этап 2. Минимизация на $[0, T]$ с целью определения t_k

(а) Задать параметры $0 < \mu < \eta < 1$.

(б) Выполнить одним из методов поиск минимума $\varphi(t)$ на отрезке $[0, T]$, считая ее унимодальной, до момента первого испытания в точке $t \in \Pi_1(\mu) \cap \Pi_2(\eta)$, после чего поиск остановить.

(с) Положить $t_k = t$.

Правило одномерной минимизации требует вычисления градиента функции для каждого t , проверяемого на этапе 2. Это может приводить к гораздо большим затратам, чем при использовании правила Армихо. Однако выбор t_k по правилу одномерной минимизации (по крайней мере при $\eta \ll 1$) обеспечивает сходимость процесса поиска локального минимума для всех распространенных вариантов выбора направлений d^k .

Правило одномерной минимизации при $0 < \mu < \eta \ll 1$ называют *аккуратным одномерным поиском*.

Правило Вулфа

Шаговый множитель выбирается из условия $t_k \in \Pi_1(\mu) \cap \Pi_3(\eta)$, $0 < \mu < \eta < 1$.

Алгоритмизация правила [9]

(а) Задать $0 < \mu < \eta < 1$ – параметры критериев 1 и 2; $\alpha > 0$ – начальное пробное значение; $0 < \gamma < 1$ – коэффициент «интерполяции»; $r > 1$ – коэффициент «экстраполяции». Положить $t = \alpha$ и $\check{\alpha} = \hat{\alpha} = 0$.

(б) Если $t \in \Pi_1(\mu) \cap \Pi_3(\eta)$, перейти к пункту (е), иначе – к пункту (с).

(с) Если $t \notin \Pi_1(\mu)$, положить $\hat{a} = t$ и перейти к пункту (д), иначе, если $t \notin \Pi_2(\eta)$, положить $\check{a} = t$. Если при этом $\hat{a} \neq 0$, перейти к пункту (д), а при $\hat{a} = 0$ выполнить «экстраполяцию», положив $t := \check{a} r$ и вернуться к пункту (б).

(д) Выполнить «интерполяцию»: $t := \check{\alpha} \gamma + \hat{\alpha} \cdot (1 - \gamma)$ и вернуться к пункту (б).

(е) Положить $t_k = t$.

Методы безусловной локальной оптимизации

Методы градиентного поиска

К этой группе относятся методы, использующие итерационное соотношение (4.4), в котором направление шага $d^k = -\nabla Q_k$. Шаговый множитель может выбираться по любому из трех указанных выше правил: Армихо, одномерной минимизации или Вулфа. Сходимость градиентного поиска к стационарной точке функции Q обеспечивается во всех случаях из любой начальной точки при весьма слабых требованиях на Q . Если

используется правило одномерной минимизации в варианте «аккуратного» одномерного поиска ($\eta \ll 1$), то его можно рассматривать как вычислительную реализацию правила

$$t_k = \arg \min \{ Q(x^k + t d^k) : t \geq 0 \}. \quad (4.5)$$

Градиентный поиск в сочетании с правилом (4.5) называют методом *наискорейшего градиентного спуска*. Для него направления d^k , полученные на двух последовательных итерациях, всегда ортогональны, т.е. $(d^{k+1}, d^k) = 0$. Для квадратичных функций $Q(x)$ с положительно определенной матрицей Гессе, имеющей разброс собственных чисел от λ_{\min} до λ_{\max} , справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$\exists a(x^{k=0}) \in [0, q], \quad q = \left(\frac{1 - \lambda_{\min} / \lambda_{\max}}{1 + \lambda_{\min} / \lambda_{\max}} \right)^2 < 1 \text{ и } C > 0,$$

что $Q_k - Q^* \leq (a(x^0))^k \cdot (Q_0 - Q^*)$, $\|x^k - x^*\| \leq C (a(x^0))^{k/2} \cdot \|x^0 - x^*\|$.

Таким образом, обеспечивается сходимость со скоростью геометрической прогрессии, при этом величины $\|x^{k+1} - x^*\|$ и $\|x^k - x^*\|$ имеют одинаковый порядок малости. *Такая сходимость называется линейной*. В качестве критерия останова в градиентных методах обычно используют условие $\|\nabla Q_{k+1}\| \leq \delta$.

Метод Ньютона и его модификации

Метод Ньютона предполагает, что функция Q по крайней мере дважды непрерывно дифференцируема. Проводятся испытания второго порядка $J_k = (Q_k, \nabla Q_k, \nabla^2 Q_k)$. Точка x^{k+1} размещается в стационарной точке квадратичной аппроксимации, построенной по результату k -го испытания. Шаговый множитель выбирается равным единице, т.е. $t_k = 1$. В методе Ньютона

$$x^{k+1} = x^k + 1 \cdot d_{\text{НЬЮТ}}^k,$$

где $d_{\text{НЬЮТ}}^k$ определяют из решения линейной системы

$$\nabla^2 Q_k \cdot d_{\text{НЬЮТ}}^k = -\nabla Q_k.$$

В явной форме

$$x^{k+1} = x^k + (\nabla^2 Q_k)^{-1} (-\nabla Q_k).$$

Однако при вычислениях этот вид записи не применяется, за исключением одномерного случая ($n = 1$), когда

$$x^{k+1} = x^k - Q'_k / Q''_k.$$

Сходимость метода Ньютона к стационарной точке x^* функции Q обеспечивается для функций $Q \in C^2(R^n)$ при условии $\det(\nabla^2 Q(x^*)) \neq 0$ только лишь в некоторой окрестности x^* . Сходимость является *сверхлинейной*, т.е. $\|x^{k+1} - x^*\| = o(\|x^k - x^*\|)$, следовательно, ошибка убывает быстрее, чем любая геометрическая прогрессия. Если у функции существуют третьи производные и они ограничены в области сходимости, то сходимость по крайней мере *квадратична*, т.е. существует $C \geq 0$ такая, что с некоторого шага $\|x^{k+1} - x^*\| \leq C \|x^k - x^*\|^2$.

Расширение области сходимости метода Ньютона может быть достигнуто за счёт введения шагового множителя t_k , выбираемого по правилу Армихо, Вулфа или одномерной минимизации. В первых двух случаях следует выбирать значения параметра $\alpha = 1$.

Заметим, что в методе Ньютона направление $d_{\text{Ньюто}}^k$ будет являться направлением локального убывания только в случае выполнения очевидного условия $((\nabla^2 Q_k)^{-1}(-\nabla Q_k), \nabla Q_k) < 0$. Оно может нарушаться, если матрица $\nabla^2 Q_k$ не будет являться положительно определённой, что говорит о нарушении выпуклости функции. Таким образом, для невыпуклых функций метод Ньютона (для возможности регулировки шагового множителя) должен быть модифицирован путем замены матрицы $\nabla^2 Q_k$ на близкую к ней положительно определённую. Обычно для этого используется модифицированное преобразование Холесского [18].

В качестве основного критерия останова в методе Ньютона используется останов по малости нормы градиента: $\|\nabla Q_k\| \leq \delta$.

Метод сопряжённых градиентов Флетчера-Ривса

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций Q можно построить метод, использующий для повышения порядка скорости сходимости скорректированные направления антиградиентов. Приведенный ниже метод при весьма общих дополнительных предположениях о функции обеспечивает *сверхлинейную скорость сходимости*. В нем описана схема с рестартами через каждые N шагов.

Описание метода

(а) Задать $\delta > 0$ – параметр останова, $0 < \mu < \eta < 1$ – параметры одномерной минимизации, x^0 – начальную точку.

(б) Вычислить $Q_0 = Q(x^0)$, $\nabla Q_0 = \nabla Q(x^0)$. Положить $p^0 = -\nabla Q_0$ и $k = 0$.

(с) Если $(\nabla Q_k, p^k) \geq 0$ (т.е. p^k – не направление строгого локального убывания), то выполнить замену $p^k = -\nabla Q_k$, $x^0 = x^k$ и положить $k = 0$; иначе не изменять p^k .

(d) Принять $d^k = p^k$ и определить шаговый множитель t_k по алгоритму «аккуратной» одномерной минимизации, вычислить $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $Q_{k+1} = Q(x^{k+1})$, $\nabla Q_{k+1} = \nabla Q(x^{k+1})$, увеличить счетчик $k := k + 1$.

(e) Проверить критерий останова: при $\|\nabla Q_k\| \leq \delta$ остановить вычисления и принять за оценку решения x^k . При $\|\nabla Q_k\| > \delta$ перейти к пункту (f).

(f) Если $k = N$, то положить $x^0 = x^N$, $p^0 = -\nabla Q_N$ и $k = 0$, вернуться к пункту (d); иначе определить

$$p^k = -\nabla Q_k + \beta_k p^{k+1},$$

где $\beta_k = (\nabla Q_k, \nabla Q_k - \nabla Q_{k-1}) / \|\nabla Q_{k-1}\|^2$, вернуться к пункту (d).

Укажем на некоторые дополнительные свойства метода в случае его применения к квадратичной функции $Q(x)$ с положительно определенной матрицей Гессе $\nabla^2 Q = A$. Для таких функций метод строит систему направлений p^0, p^1, \dots, p^{N-1} , которая будет являться A -сопряженной, т.е. $\forall i \neq j \quad (p_i, A p_j) = 0$ при нетривиальности самих векторов. При этом глобальный минимум квадратичной функции будет найден (если не учитывать критерий останова) не более, чем за N шагов (где N – размерность пространства переменных x), а система градиентов $\nabla Q_0, \nabla Q_1, \dots, \nabla Q_{N-1}$ окажется взаимно ортогональной.

Для функции $Q(x)$ общего вида метод за N итераций в точку её минимума, естественно, не попадет и будет выполнен рестарт из последней найденной точки. Кроме того, для функции общего вида очередной вектор p^k может не являться направлением строгого локального убывания. Это проверяется в пункте (c). В случае нарушения данного условия выполняется рестарт из последней точки.

Метод Хука-Дживса

Этот метод прямого поиска, т.е. измеряются только значения функции, а гладкость и даже непрерывность $Q(x)$ не предполагаются. Направление локального убывания определяется построением так называемой *конфигурации*. При удачных перемещениях создается и в последующем используется *шаг по образцу*.

Пусть e_1, e_2, \dots, e_N – координатные орты, а h – параметр конфигурации.

Алгоритм построения конфигурации $\bar{x} = F(z)$.

(a) Положить $\bar{x} = z$, $i = 1$.

(b) Для $i \leq N$ выполнить пункт (c); при $i > N$ завершить построение конфигурации.

(с) Если $Q(\bar{x} + h e_i) < Q(\bar{x})$, положить $\bar{x} := \bar{x} + h e_i$; иначе, если $Q(\bar{x} - h e_i) < Q(\bar{x})$, положить $\bar{x} := \bar{x} - h e_i$; иначе сохранить прежнее \bar{x} . Увеличить номер координаты $i := i + 1$ и вернуться к пункту (b).

Основной алгоритм

(a) Задать начальную точку x^0 , параметр останова $\delta > 0$ и параметр конфигурации $h \gg \delta$.

(b) Положить $z^1 = x^0$, $k = 0$.

(с) Построить конфигурацию $x^{k+1} = F(z^{k+1})$

(d) Если $Q(x^{k+1}) < Q(x^k)$, то положить $k := k + 1$ и перейти к пункту (e); иначе, если $h < \delta$, остановить вычисления, приняв за оценку решения значение x^k ; если же $h > \delta$, то перейти к пункту (f).

(e) Выполнить шаг по образцу: $z^{k+1} = x^k + 2(x^k - x^{k-1})$, и перейти к пункту (с).

(f) Если $k > 0$, положить $x^0 := x^k$, $k = 0$ и перейти к пункту (b); если же $k = 0$, то уменьшить параметр конфигурации $h := h/2$ и перейти к пункту (b).

4.5. Вычислительные методы решения задач с ограничениями

Рассмотрим задачи общего вида (4.1)-(4.2) и приведем описание двух общих методов: метода внешнего штрафа и метода модифицированных множителей Лагранжа. Оба метода строят последовательность вспомогательных оптимизационных задач. Минимизируемые функции этих задач зависят от настраиваемых параметров. Решения исходной задачи можно получить как предельные точки последовательностей решения вспомогательных задач.

Метод внешнего степенного штрафа [8, 9, 10, 13]

Функция $H(x)$, определенная на множестве $x \in E$, называется функцией штрафа в задаче (4.1)-(4.2), если

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \in D, \\ > 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Одним из конкретных видов функции штрафа является степенной штраф:

$$H(x) = \sum_{i=1}^N (\max\{0; c_i g_i(x)\})^p + \sum_{j=1}^M |C_j h_j(x)|^p,$$

где $c_1, \dots, c_N; C_1, \dots, C_M$ - положительные нормировочные коэффициенты, а показатель степени $p > 0$.

Заметим, что при достаточной гладкости функций g_i и h_j порядок гладкости функции штрафа определяется значением p следующим образом:

- (a) при $0 < p \leq 1$ негладкий штраф;
- (b) при $1 < p \leq 2$ гладкость до первого порядка;
- (c) при $2 < p \leq 3$ гладкость до второго порядка.

Построим вспомогательную функцию для задачи со штрафом

$$S_\gamma(x) = Q(x) + \gamma H(x),$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент штрафа. Заметим, что в допустимой области $x \in D$ функция $S_\gamma(x) = Q(x)$, а вне этой области $S_\gamma(x) > Q(x)$ за счет присутствия положительной штрафной добавки за нарушение ограничений.

Вспомогательные задачи со штрафом будут иметь вид:

$$\min \{ S_{\gamma_k}(x) : x \in E \}, \quad (4.6)$$

где выбирается $\gamma_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Предполагается, что при больших γ_k решения $x_{\gamma_k}^*$ этих задач существуют и не покидают некоторой ограниченной и замкнутой области. Если E - компактно, то последнее предположение будет всегда выполнено. Можно доказать, что при непрерывности Q и H все предельные точки последовательности $x_{\gamma_k}^*$ будут являться решениями исходной задачи (4.1)-(4.2). Структуру задачи со штрафом при некотором коэффициенте штрафа γ_k иллюстрирует рис. 4.4.

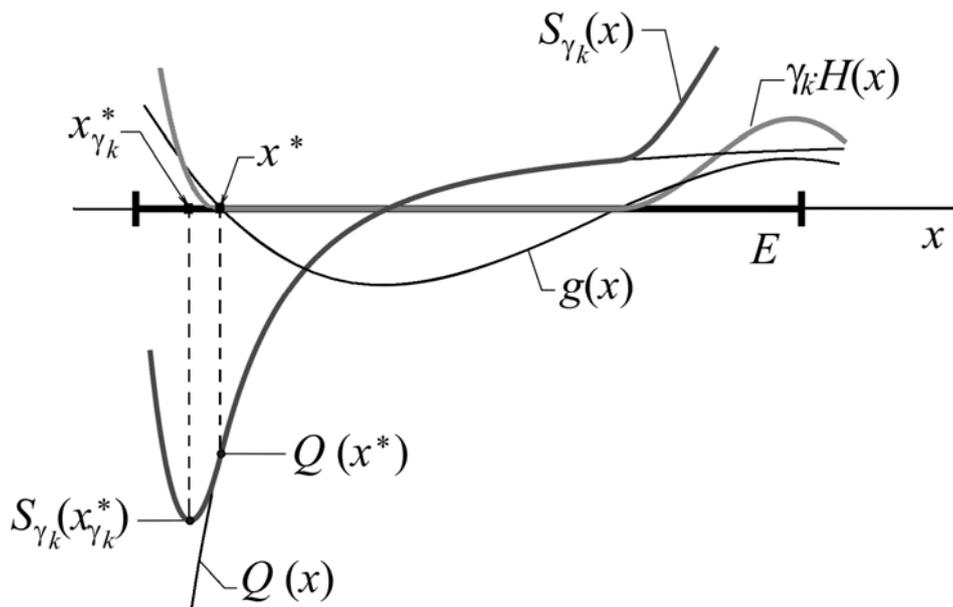


Рис. 4.4. Пример поведения функции задачи со штрафом при гладкой функции штрафа

Заметим, что при гладкости штрафа в случае положения x^* (решения исходной задачи) на границе допустимой области D сходящаяся к x^*

подпоследовательность $x_{\gamma_k}^*$ решений вспомогательных задач со штрафом в общем случае будет приближаться к x^* , оставаясь вне области D . Сходимость обеспечивается лишь при $\gamma_k \rightarrow \infty$. Это приводит к ухудшению структуры функций со штрафом $S_{\gamma_k}(x)$ за счет усиления их «овражности», т.е. увеличения разброса значений собственных чисел матриц Гессе в точках $x_{\gamma_k}^*$ решений вспомогательных задач. Этот эффект препятствует хорошей работе вычислительных методов.

Алгоритм метода штрафов

(а) Задать $\delta > 0$ – параметр останова, γ_0 – достаточно большое начальное значение коэффициента штрафа; выбрать стратегию построения последовательности γ_k , обеспечивающую стремление γ_k к бесконечности при $k \rightarrow \infty$. Выбрать степень в штрафе p , $p > 1$, и принять $k = 0$.

(б) Найти решение $x_{\gamma_k}^*$ в задаче со штрафом (4.6), используя один из методов решения задач без функциональных ограничений с использованием информации о решении $x_{\gamma_{k-1}}^*$ предыдущей задачи.

(с) Проверить критерий останова по малости невязки

$$G(x) = \max \{c_1 g_1(x), \dots, c_N g_N(x), |C_1 h_1(x)|, \dots, |C_M h_M(x)|, 0\}.$$

Если $G(x_{\gamma_k}^*) \leq \delta$, остановить вычисления и принять $x_{\gamma_k}^*$ в качестве оценки решения; иначе, при $G(x_{\gamma_k}^*) > \delta$, перейти на пункт (d).

(d) Выбрать, согласно принятой стратегии, обеспечивающей неограниченное увеличение γ_k , значение $\gamma_{k+1} > \gamma_k$, положить $k := k + 1$ и вернуться к пункту (b).

Методы модифицированных функций Лагранжа

Метод ориентирован на решение задачи (4.1)-(4.2) при $E = R^n$ в случае гладкости функций Q , g_i и h_j до второго порядка. Для сходимости метода должны быть выполнены ещё и некоторые дополнительные условия, имеющие характер достаточных условий второго порядка наличия в x^* строгого локального минимума (включающих достаточные условия регулярности области в точке x^* в форме линейной независимости градиентов ограничений).

В основе метода лежит идея определения x^* путём поиска *седловой точки* модифицированной функции Лагранжа $L_\gamma(x, \lambda, \mu)$ в пространстве *прямых переменных* x и *двойственных переменных* λ, μ (множители Лагранжа).

Обычная функция Лагранжа для задачи с регулярной областью, имеющая вид

$$L(x, \lambda, \mu) = Q(x) + (\lambda, g(x)) + (\mu, h(x)),$$

далеко не всегда имеет в точке Каруша-Куна-Таккера (x^*, λ^*, μ^*) седловую точку по области $x \in R^n$, $\lambda \geq 0$, $\mu \in R^M$. Седловая точка всегда существует только при выпуклости Q , g_i и аффинности h_j . Для задач более общего вида ее может не быть.

Если же модифицировать функцию Лагранжа, добавив к ней штрафную функцию, то при достаточно большом коэффициенте штрафа γ модифицированная функция Лагранжа будет иметь в точке Каруша-Куна-Таккера седловую точку.

Метод модифицированных функций Лагранжа для задач с равенствами [9, 13]

Решается задача

$$\min \{ Q(x) : h_j(x) = 0, j = 1, \dots, M \}. \quad (4.7)$$

Модифицированная функция Лагранжа имеет вид

$$L_\gamma(x, \mu) = Q(x) + (\mu, h(x)) + (\gamma/2) \sum_{j=1}^M h_j^2(x).$$

Градиент этой функции по переменным μ имеет вид $\nabla_\mu L_\gamma(x, \mu) = h(x)$.

Метод сочетает поиск минимума модифицированной функции Лагранжа по переменным x с процедурой градиентного поиска максимума этой функции по переменным μ .

Описание алгоритма

(a) Задать $\delta > 0$ - параметр останова, x^0, μ^0 - начальные значения прямых и двойственных переменных, γ_0 - начальное значение коэффициента штрафа; определить стратегию изменения последовательности γ_k ; принять $k = 0$.

(b) Определить локальный минимум

$$x^{k+1} = \arg \min \{ L_{\gamma_k}(x, \mu^k) : x \in R^n \}, \quad (4.8)$$

используя в качестве начальной точки x^k .

(c) Найти новые оценки множителей Лагранжа, выполнив шаг в направлении градиента по μ модифицированной функции Лагранжа:

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \gamma_k h(x^{k+1}).$$

(d) Проверить критерий останова по малости невязки в условиях оптимальности:

$$\| \nabla_x L(x^{k+1}, \mu^{k+1}) \| \leq \delta, \quad \max \left\{ |h_j(x)| : j = 1, \dots, M \right\} \leq \delta$$

Если эти условия выполнены, принять x^{k+1} в качестве оценки решения задачи с ограничениями; иначе перейти на пункт (е).

(е) Изменить γ_k , согласно принятой стратегии, выбрав $\gamma_{k+1} \geq \gamma_k$, положить $k := k + 1$ и вернуться к пункту (б).

При определённых требованиях к задаче (4.7) и при достаточной малой погрешности начального приближения метод обеспечивает сходимость (x^k, μ^k) к (x^*, μ^*) - стационарной точке функции Лагранжа (эта точка одновременно является седловой для модифицированной функции Лагранжа). При этом $\exists T \geq 0$, что

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq T \|\mu^k - \mu^*\| / \gamma_k; \quad \|\mu^{k+1} - \mu^*\| \leq T \|\mu^k - \mu^*\| / \gamma_k$$

Таким образом, по множителям Лагранжа сходимость будет линейной, если коэффициенты штрафа γ_k остаются ограниченными. Если же $\gamma_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то сходимость по μ будет *сверхлинейной*.

Вычислительные эксперименты показывают, что метод достаточно устойчив к значительной начальной погрешности.

Метод модифицированных функций Лагранжа для задач с равенствами и неравенствами [9, 13]

Метод ориентирован на решение гладких до второго порядка задач вида (4.1)-(4.2) при $E = R^n$. Его правила могут быть получены из рассмотренного выше аналогичного метода для задач с ограничениями-равенствами за счёт сведения неравенств $g_i(x) \leq 0$ к равенствам $g_i(x) + z_i^2 = 0$, включающим искусственные переменные z_i . При этом в правиле (4.8) нужно будет брать минимум не только по x , но и по (z_1, \dots, z_N) . Исключая затем z_i , путём аналитического определения их значений из условия оптимальности для (4.8), можно получить приведённый ниже алгоритм, использующий следующий вид модифицированной функции Лагранжа.

$$L_\gamma(x, \lambda, \mu) = Q(x) + (\mu, h(x)) + (\gamma/2) \sum_{j=1}^M h_j^2(x) + \\ + (1/(2\gamma)) \sum_{j=1}^N ((\max\{0; \gamma g_j(x) + \lambda_j\})^2 - \lambda_j^2).$$

Описание алгоритма

(а) Задать $\delta > 0$ - параметр останова, x^0, λ^0, μ^0 - начальные значения прямых и двойственных переменных, γ_0 - начальное значение коэффициента штрафа; определить стратегию изменения последовательности γ_k ; положить $k = 0$.

(b) Определить локальный минимум

$$x^{k+1} = \arg \min \{ L_{\gamma_k}(x, \lambda^k, \mu^k) : x \in R^n \}, \quad (4.9)$$

используя в качестве начальной точки x^k .

(c) Найти новые оценки множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mu^{k+1} &= \mu^k + \gamma_k h(x^{k+1}), \\ \lambda_i^{k+1} &= \max \{ 0; \lambda_i^k + \gamma_i g_i(x^{k+1}) \}, \quad (i = 1, \dots, N). \end{aligned}$$

(d) Проверить критерий останова по малости невязки в системе условий Каруша-Куна-Таккера:

$$\| \nabla_x L_{\gamma_k}(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \| \leq \delta, \quad G(x^{k+1}) \leq \delta, \quad H(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) \leq \delta,$$

где $G(x) = \max \{ g_1(x), \dots, g_N(x), |h_1(x)|, \dots, |h_M(x)|, 0 \}$ - невязка в ограничениях, $H(x, \lambda) = \max \{ |\lambda_1 \cdot g_1(x)|, \dots, |\lambda_N \cdot g_N(x)| \}$ - невязка в условиях дополняющей нежёсткости. Если все условия выполнены, остановить вычисления и принять x^{k+1} в качестве оценки; иначе перейти к пункту (e).

(e) Выбрать γ_k , согласно принятой стратегии $\gamma_{k+1} \geq \gamma_k$; положить $k := k + 1$ и вернуться к пункту (b).

Характер сходимости такой же, как в предыдущем методе для задачи с ограничениями-равенствами. Следует подчеркнуть, что сходимость имеет место при конечных γ_k , что приводит к лучшей обусловленности вспомогательных оптимизационных задач по сравнению с методом внешних штрафных функций. Здесь при конечных значениях коэффициента штрафа сходимость обеспечивается за счёт подстройки оценок множителей Лагранжа.

4.6. Методы липшицевой многоэкстремальной оптимизации

Этому вопросу посвящена обширная литература (см., например, библиографию в [19], [13]).

Рассмотрим задачу поиска глобального минимума

$$\min \{ Q(x) : x \in E \},$$

где функция $Q(x)$ многоэкстремальна, а E - гиперинтервал, т.е. $E = \{ x \in R^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n \}$.

Функция Q называется *липшицевой* в области E с константой Липшица $L \geq 0$, если $\forall x', x''$ из E

$$|Q(x'') - Q(x')| \leq L \|x'' - x'\|. \quad (4.10)$$

Такие функции обладают ограниченной «скоростью» изменения. Например, $\sin x$ - липшицева с константой $L \geq 1$ в R^1 , а функция \sqrt{x} липшицева на $[\varepsilon, \infty)$ при $\varepsilon > 0$ с константой $L \geq 1/(2\sqrt{\varepsilon})$, но не является липшицевой на $[0, \infty)$. Заметим, что, кроме принимаемой нами по умолчанию евклидовой нормы $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, могут быть использованы и другие, например, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Липшицевы функции являются удобной моделью многоэкстремальных функций.

Пусть выполнено k измерений функции в точках x^s с результатами Q_s ($s = 1, \dots, k$). По результатам каждого измерения можно построить, используя (4.10), верхнюю и нижнюю оценки для $Q(x)$:

$$Q_s - L\|x - x^s\| \leq Q(x) \leq Q_s + L\|x - x^s\|.$$

Учитывая результаты всех k измерений, получим (рис. 4.5)

$$Q_k^-(x) \leq Q(x) \leq Q_k^+(x),$$

$$Q_k^-(x) = \max \{ Q_s - L\|x - x^s\| : s = 1, \dots, k \}$$

$$Q_k^+(x) = \min \{ Q_s + L\|x - x^s\| : s = 1, \dots, k \}.$$

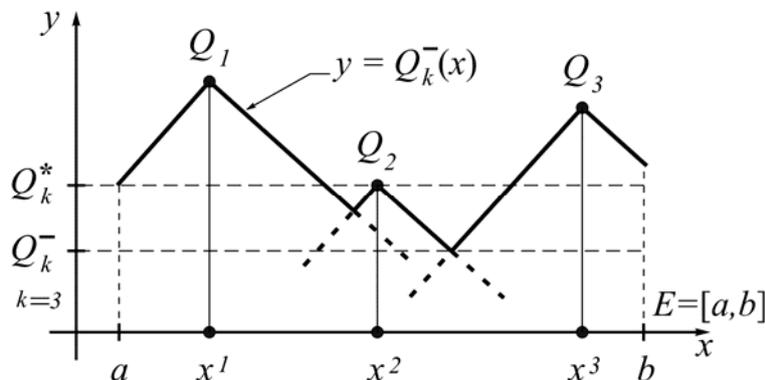


Рис. 4.5. Вид нижней оценки $Q_k^-(x)$ липшицевой функции по $k = 3$ измерениям при $n = 1$

Обозначим $Q_k^* = \min \{ Q_s : s = 1, \dots, k \}$, $Q_k^- = \min \{ Q_k^-(x) : x \in E \}$. Свойство Липшица позволяет по конечному числу испытаний получить оценки положения глобальных минимумов x^* и значения функции в них $Q^*(x) = Q(x^*)$. Очевидно, что $Q_k^- \leq Q^* \leq Q_k^*$, а $x^* \in E_k = \{x \in E : Q_k^-(x) \leq Q_k^*\}$.

Многие методы липшицевой оптимизации основаны на размещении новых измерений в тех точках, где можно ожидать наименьших значений функции Q .

Метод С.А. Пиявского (1967)

(а) Задать $\delta > 0$ - точность решения задачи и L - константу Липшица, вычислить функцию в $k_0 \geq 1$ произвольно выбранных начальных точках x^s , запомнить значения Q_s ($s = 1, \dots, k_0$); положить $k = k_0$.

(b) Найти точку

$$x^{k+1} = \arg \min \{ Q_k^-(x) : x \in E \}.$$

(c) Проверить выполнение критерия останова: $Q_k^* - Q_k^-(x^{k+1}) \leq \delta$.

Если условие выполнено, то точку x_k^* , соответствующую проведенному измерению со значением Q_k^* , принять за оценку глобального минимума; иначе перейти к пункту (d).

(d) Выполнить измерение $Q_{k+1} = Q(x^{k+1})$, положить $k := k + 1$ и вернуться к пункту (b).

При компактности E и липшицевости функции Q с константой L метод остановится через конечное число шагов и построенная им оценка Q_k^* будет отличаться от глобально-оптимального значения не более чем на δ . В процессе своего выполнения метод строит неравномерное адаптивное покрытие области поиска E точками испытаний. Это покрытие (при весьма общих условиях) в пределе имеет в качестве точек сгущения множество глобальных минимумов решаемой задачи.

В случае, когда размерность задачи $n = 1$, метод С.А. Пиявского называют методом ломаных [13, 17, 19]. Пусть $E = [a, b]$, тогда обычно используют $k_0 = 2$ и принимают $x^1 = a$, $x^2 = b$. После проведения нескольких испытаний упорядочим точки измерений нижним индексом в порядке возрастания координаты: $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$. Будем считать, что им соответствуют результаты измерений Q_1, Q_2, \dots, Q_k . Тогда в каждом из интервалов $[x_i, x_{i+1}]$ нижняя оценка будет иметь вид одного «зубца» (см. рис. 4.5) с координатами точки минимума:

$$\hat{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2 - (Q_i + Q_{i+1})/(2L), \quad (4.11)$$

$$R_i = (Q_i + Q_{i+1})/(2L) - L(x_{i+1} - x_i)/2. \quad (4.12)$$

Величину R_i называют характеристикой интервала.

Алгоритм метода ломаных

(а) Задать $\delta > 0$ - точность решения задачи, $L > 0$ - константу Липшица, принять $x_1 = a$, $Q_1 = Q(x_1)$, $x_2 = b$, $Q_2 = Q(x_2)$ и $Q_2^* = \min \{ Q_1, Q_2 \}$, положить $k = 2$.

(b) Найти интервал с лучшей характеристикой

$$R_t = \min \{ R_i : i = 1, \dots, k-1 \}.$$

(с) Если $Q_k^* - R_t \leq \delta$, остановить вычисления и принять за оценку глобального минимума точку x_k^* , соответствующую Q_k^* ; иначе перейти на пункт (д).

(д) Вычислить $x_{k+1} = \hat{x}_t$ и $Q_{k+1} = Q(x^{k+1})$; вставить полученную пару x^{k+1} , Q_{k+1} в упорядоченный по координатам набор проведенных испытаний (в отрезок с номером t); положить $Q_{k+1}^* = \min \{ Q_k^*, Q_{k+1} \}$; увеличить $k := k + 1$ и вернуться к пункту (б).

В случае неизвестной константы Липшица метод может проводить её оценку в ходе поиска. А именно, после k -го измерения можно вычислить величину

$$l_k = \max \{ |Q_{i+1} - Q_i| / |x_{i+1} - x_i| : i = 1, \dots, k-1 \}, \quad (4.13)$$

являющуюся заниженной оценкой для L . Как правило, вводят коэффициент надежности $r > 1$ и в качестве оценки L принимают величину

$$L_k = \begin{cases} 1, & l_k = 0; \\ r \cdot l_k, & l_k > 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

которую и используют в алгоритме вместо L .

Укажем на эффективный информационно-статистический метод, предложенный Р.Г. Стронгиным [19].

Информационно-статистический метод

Он получен как одношагово оптимальный в среднем, исходя из некоторой вероятностной модели поведения функции. Его можно описать в сравнении с описанием метода ломаных. Перечислим различия.

Во-первых, в соотношениях (4.11)-(4.12) изменяется способ определения характеристики (4.12). В информационно-статистическом методе она может быть представлена в виде:

$$R_i = (Q_i + Q_{i+1})/2 - L \cdot \frac{1 + ((\Delta Q_i / \Delta x_i) / L)^2}{2} (x_{i+1} - x_i) / 2.$$

Во-вторых, константа Липшица считается неизвестной и оценивается согласно (4.13)-(4.14). При вычислении характеристики R_i используется её оценка (4.14).

В-третьих, правило останова поиска заменяется на проверку условия $x_{t+1} - x_t \leq \delta$. При достаточно общих условиях информационно-статистический метод экономичнее метода ломаных.

Компонентные методы

В многомерном случае метод С.А. Пиявского точно не реализуем.

Для построения процедур многоэкстремальной оптимизации в многомерном случае используются несколько подходов: методы *редукции (т.е. понижения) размерности* с использованием *разверток Пеано-Гильберта*, редукция с применением *многошаговой схемы*; *компонентные методы* [13].

Методы последней группы последовательно разделяют множество E на подобласти-компоненты P стандартной формы (чаще всего – гиперинтервалы). Измерения функции в каждом из них размещаются в строго определенных положениях. Далее в пределах каждой компоненты P учитываются только те испытания, которые были размещены в ней.

Форма компонент P и правило размещения в ней измерений выбираются так, чтобы существовала аналитическая нижняя оценка $Q^-(P)$ наименьшего значения $Q(x)$ при $x \in P$. Далее на каждом шаге для последующего деления выбирается компонента P^* с наименьшей нижней оценкой $Q^-(P^*)$.

Метод деления на три

Метод предложен Ю.Г. Евтушенко и В.А. Ратькиным в 1987 год и использует деление исходного множества $E = \{x \in R^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$ координатными плоскостями на гиперинтервалы P с последующим проведением по одному испытанию в геометрических центрах каждого из P (так называемая *центральная схема* измерений) [13]. Гиперинтервал с геометрическим центром в точке y будем обозначать как P_y . Пусть $Q_y = Q(y)$, а $\text{diam}(P_y)$ - диаметр множества P_y . Из свойства (4.10) очевидно следует, что

$$Q^-(P_y) = Q_y - L \cdot \text{diam}(P_y)/2. \quad (4.15)$$

Использование этой оценки позволяет построить метод деления на три. На рис. 4.6 показан пример возможного вида разделения множества E на компоненты и размещение точек испытаний после трех итераций метода.

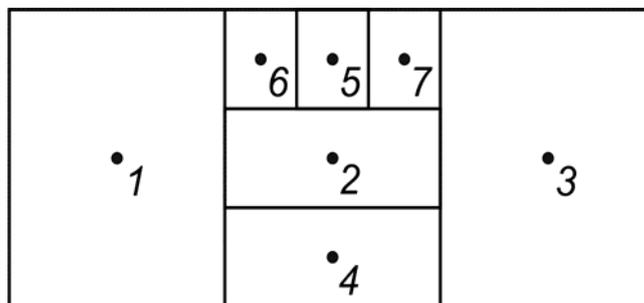


Рис. 4.6. Характер возможного разбиения области поиска в методе деления на три после трех итераций (цифрами отмечены точки проведенных испытаний)

Описание алгоритма

(a) Задать $\delta > 0$ - точность поиска и $L > 0$ - константу Липшица.

(b) Исходный гиперинтервал E разделить по большему ребру на три равные части P_1, P_2, P_3 . В их геометрических центрах x^1, x^2, x^3 выполнить измерения Q_1, Q_2, Q_3 , вычислить по формуле (4.15) нижние оценки $Q^-(P_i)$ ($i=1,2,3$) и принять их за характеристики гиперинтервалов P_i : $R(P_i) = Q^-(P_i)$. Наборы $K_i = (P_i, Q_i, R(P_i))$ поместить в список K .

(c) В списке K найти лучший по характеристике $R(P_i)$ набор K_t

$$R(P_t) = \min\{R(P_i) : K_i \in K\}.$$

(d) Вычислить $\hat{Q}^* = \min\{Q_i : i=1, \dots, |K|\}$.

(e) Если выполняется $\hat{Q}^* - Q^-(P_t) \leq \delta$, остановить вычисления и в качестве оценки глобального минимума выбрать точку испытаний с наименьшим значением функции; иначе перейти к пункту (f).

(f) Разделить P_t по его большему ребру на три равных компоненты \bar{P}_1, \bar{P}_2 и \bar{P}_3 ; провести измерения функции в геометрических центрах крайних компонент. Значение функции в центре средней известно, и его следует извлечь из набора K_t (оно равно Q_t). Вычислить для новых компонент нижние оценки функции по формуле (4.15). Исключить из списка K набор K_t и включить в него три новых набора, соответствующих построенным новым компонентам. Вернуться к пункту (c).

Метод строит покрытие области точками измерений, сгущающееся в областях с меньшими значениями функции.

Метод деления на три для задач с ограничениями-неравенствами

Метод применим к задаче

$$\min\{Q(x) : g_1(x) \leq 0, \dots, g_N(x) \leq 0, x \in E\},$$
$$E = \{x \in R^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\},$$

где функции Q и g_i липшицевы с константами L^Q и L^{g_i} , а допустимая область не пуста. Алгоритм поиска глобального минимума для задачи с ограничениями-неравенствами аналогичен рассмотренному выше, поэтому остановимся только на отличиях.

В центре каждой компоненты P вычисляются значения всех функций Q, g_1, \dots, g_N . Результаты измерения для компонента P_i обозначим Q^i, g_1^i, \dots, g_N^i . Далее для гиперинтервала P вычисляются нижние оценки для каждой из функций Q, g_1, \dots, g_N по результатам их измерений в геометрическом центре P . Вид этих оценок аналогичен (4.15).

Введем новый способ вычисления характеристики компоненты P . Может сложиться две ситуации. Если $\forall i = 1, \dots, N$ все значения $g_i^-(P) \leq 0$, то в компоненте P существуют допустимые точки и в качестве её характеристики примем нижнюю оценку функции Q по области P , т.е. $R(P) = Q^-(P)$. Если же для некоторого i выполняется $g_i^-(P) > 0$, то допустимых точек в P нет и проводить дальнейшие измерения в ней нецелесообразно. Для того, чтобы такая компонента никогда не была выбрана для дальнейшего деления, формально положим для нее $R(P) = +\infty$.

Наборы K_i , помещаемые в список K в пунктах (b) и (f), теперь будут включать в себя более широкую информацию: $K_i = (P_i, Q^i, g_1^i, \dots, g_N^i, R(P_i))$. Кроме того, изменится правило вычисления значения \hat{Q}^* - оценки глобально-оптимального значения. Поскольку теперь не любая точка проведенного измерения допустима, следует определить наилучшее значение только по допустимым точкам, т.е. значение \hat{Q}^* в пункте (d) теперь будем вычислять так:

$$\hat{Q}^* = \min\{Q^i : \forall j = 1, \dots, N \ g_j^i \leq 0; i = 1, \dots, |K|\},$$

где $|K|$ - количество элементов в списке K . Если к данному шагу ни одной допустимой точки не встретится, формально положим $\hat{Q}^* = +\infty$.

Остальные действия, описанные в алгоритме метода деления на три при отсутствии ограничений, принципиально не изменяются и остаются такими же для метода, учитывающего ограничения-неравенства.

4.7. Контрольные задания

1. Выяснить, какой из трех пассивных M шаговых алгоритмов $\alpha = \alpha_M^j$ ($j = 1, 2, 3$) обладает меньшим значением гарантированной погрешности $d^*(\alpha)$ при поиске минимума унимодальной функции Q на отрезке $[0, 10]$. Погрешность измеряется длиной интервала, который определяется в качестве подобласти, содержащей глобальный минимум, после проведения M измерений функции Q и применения правил отбрасывания.

Принять, что алгоритмы проводят измерения функции в точках со следующими координатами: $\alpha_{M=4}^1 : 1, 3, 4, 8$; $\alpha_{M=4}^2 : 3, 4, 7, 8$; $\alpha_{M=5}^3 : 2, 4, 6, 8, 9$. Для каждого алгоритма α показать на рисунке подынтервал, соответствующий значению $d^*(\alpha)$.

2. Для класса задач оптимизации, представленных в задаче № 1, получить оптимальное пассивное размещение $M = 5$ точек измерений, а также \mathcal{E} -оптимальное для $M = 4$ и $M = 6$ точек.

3. Задачу поиска минимума унимодальной функции $Q = |x - 6|$ на отрезке $[0, 10]$ решить с точностью $\delta = 1$, используя следующие последовательные методы: Фибоначчи (с параметром ε -оптимальности $\varepsilon = 0.01$); золотого сечения (приняв $\tau \approx 0.62$); дихотомии (по схеме с использованием измерения в центральной точке). Сравнить число проведенных измерений в каждом методе и реальную достигнутую точность.

Указание: для методов Фибоначчи и дихотомии вычисления провести в обыкновенных дробях.

4. Для класса строго возрастающих функций f , имеющих значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, построить последовательный M -шаговый метод поиска корня, оптимальный по отношению к гарантированному значению остаточной ошибки. Изменится ли алгоритм, если использовать правило проведения измерений, оптимальное по гарантированному значению ошибки, только на один шаг вперед?

5. В условиях задачи № 4 построить метод, оптимальный на шаг вперед по гарантированному значению ошибки, если известна следующая дополнительная информация о функции:

$$\exists 0 < L_1 < L_2, \text{ что } \forall x' \neq x'' : L_1 \leq (f(x'') - f(x')) / (x'' - x') \leq L_2.$$

6. Для дифференцируемой выпуклой функции $Q(x)$, заданной на множестве $D = [0, 5]^2 \subset R^2$, по измерениям градиента, выполненным в трех точках $x^1 = (1; 3)$, $x^2 = (4; 1)$, $x^3 = (0; 2)$ выделить минимальное подмножество, гарантированно содержащее точку глобального минимума Q на D . Считать, что значения градиентов ∇Q_1 , ∇Q_2 , ∇Q_3 в этих точках следующие: (а) $(-1; 1)$, $(4; 1)$, $(-1; -4)$; (б) $(0; 5)$, $(2; -1)$, $(-1; 5)$.

7. Построить нижнюю оценку выпуклой функции на отрезке $[0, 9]$ по результатам пяти ее измерений $(x^k; Q_k)$: $(0; 6)$, $(1; 4)$, $(5; 2)$, $(8; 5)$, $(9; 9)$.

8. Изучить последовательности испытаний, порожденные методами Ньютона при поиске минимума следующих функций скалярной переменной x : (а) $Q(x) = x^{(m+1)/m}$, где m – нечетное число; (б) $Q(x) = x^4$; (с) $Q(x) = x^2 + x^4$. Выяснить наличие сходимости, порядок сходимости, определить область сходимости. Объяснить результаты, используя условия сходимости метода.

Указание: для определения области сходимости в случае (с) используйте диаграммы Кенигса-Ламерея.

9. Исследовать поведение метода Ньютона для функции, «собранный» из двух квадратичных $Q(x_1, x_2) = \max \{ (x_1 + 1)^2 + 5x_2^2; (x_1 - 1)^2 + 5x_2^2 \}$. Дать объяснение обнаруженному эффекту.

10. Показать, что для метода наискорейшего градиентного поиска, примененного к функции $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + \alpha x_2^2$, $\alpha > 0$, выполнение одной итерации из точки $(x_1^k; x_2^k) = (a; a/\beta)$ приводит к уменьшению значения функции по закону $Q^{k+1} = Q^k \cdot q(\beta)$, где

$$q(\beta) = 1 - \frac{(1 + \alpha^2/\beta^2)^2}{(1 + \alpha^3/\beta^2)(1 + \alpha/\beta^2)}.$$

Исследовать зависимость q от параметра β размещения точки начала итерации. Какая связь Q^{k+1} с Q^k будет в случае использования метода Ньютона?

11. Используя соотношение Канторовича, получить оценку скорости сходимости метода наискорейшего градиентного поиска для функции

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 9x_2^2 - 8x_1x_2 + x_1 - x_2.$$

12. Для функции $Q(x_1, x_2) = x_1 + 9/(x_1 + 1) + x_2^2$ исследовать применение трех алгоритмов выбора шагового множителя t_k при условии, что итерация метода локальной оптимизации выполняется из точки $x^k = (x_1^k; x_2^k) = (0; 0)$ в направлении $d^k = (1; 0)$. Найти t_k , используя:

а) метод Армихо с параметрами $\mu = 1/80$, $\gamma = 1/2$ и $\alpha = 20$;

б) правило Вулфа с параметрами останова $\mu = 1/80$, $\eta = 1/40$ и начальным пробным $t = \alpha = 20$, коэффициентами «экстраполяции» и «интерполяции», соответственно, 2 и $1/2$.

в) метод одномерной оптимизации с параметрами останова $\mu = 1/80$, $\eta = 1/40$, основанный на использовании золотого сечения, считая, что начальный отрезок поиска $[0, T] = [0, 20]$. Как изменится начальный отрезок $[0, T]$, если значение T выбирается алгоритмически просмотром луча $x^k + d^k t$ с удваивающимся шагом h при начальном значении $t = 0$ и $h = 2^{-10}$?

13. Для функции $Q(x_1, x_2) = 4(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2$ построить множество точек, в которых выполняется критерий останова $\|\nabla Q(x_1, x_2)\| \leq \varepsilon$ при $\varepsilon = 1$.

14. Построить качественный вид линий равного уровня функции Розенброка $Q(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (x_1 - 1)^2$. Применить метод Хука-Дживса для начальной точки $x^{k=0} = (-2; -2)$ при начальном значении шага построения конфигурации $h = 1$ и параметре останова $\delta = 1/5$.

15. Для функции $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + \alpha x_2^2$, $\alpha > 0$, применить метод сопряженных градиентов из начальной точки $x^0 = (x_1^0; x_2^0) = (a; a/\beta)$, построив x^k для $k = 1, 2$. Сколько итераций понадобится этому методу для попадания в минимум функции Q ? Сколько итераций при тех же условиях понадобится методу наискорейшего градиентного поиска, методу Ньютона?

16. В методе внешнего квадратичного штрафа исследовать влияние величины коэффициента штрафа γ на степень обусловленности функции $S_\gamma(x)$ вспомогательной задачи со штрафом для задачи

$$\min \{ 4(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 : x_2 \geq x_1 + 1 \}.$$

Обусловленность $S_\gamma(x)$ характеризовать отношением наименьшего к наибольшему из собственных чисел матрицы вторых производных функции $S_\gamma(x)$ в точке ее минимума x_γ^* .

17. Для метода внешнего штрафа доказать, что при строгом возрастании коэффициента штрафа $\gamma_{k+1} > \gamma_k$ в точках минимума $x_{\gamma_k}^*$ вспомогательных задач со штрафом значения функций штрафа $H(x)$ и целевой функции $Q(x)$ удовлетворяют соотношениям: $Q(x_{\gamma_{k+1}}^*) \geq Q(x_{\gamma_k}^*)$, $H(x_{\gamma_{k+1}}^*) \leq H(x_{\gamma_k}^*)$.

18. Получить оценку погрешности решения задачи

$$\min \{ -(x-1)^2 : g(x) = x-2 \leq 0, x \in E = \{x : x \geq 1\} \}.$$

по невязке в ограничении в зависимости от величины коэффициента штрафа γ . Считать, что задача решается методом внешнего степенного штрафа с показателем степени $p = 2$. Оценить количество итераций метода штрафа для решения задачи с погрешностью $\delta = 0.001$ по невязке, равной $\max\{0; g(x)\}$, если начальное значение коэффициента штрафа $\gamma_0 = 2$ и его значения удваиваются после каждой итерации.

19. Исследовать зависимость величины ошибки по координате от показателя степени $p > 1$ степенного штрафа и значения коэффициента штрафа при решении задачи $\min \{ -x : g(x) = x-1 \leq 0, x \in E = \{x : x \geq 0\} \}$ методом внешнего штрафа.

Как изменится результат, если функцию ограничения-неравенства заменить на $g(x) = (x-1)^3$.

20. Оценить характер сходимости по множителям Лагранжа для метода модифицированных функций Лагранжа, примененного к вырожденной задаче

$\min\{-x^2 : h(x) = x - 1 = 0\}$. Представить процесс изменения приближения μ_k множителя Лагранжа диаграммой Кенигса-Ламерея на плоскости $(\mu_k; \mu_{k+1})$. Выяснить влияние поведения последовательности коэффициентов штрафа на порядок скорости сходимости.

21. Выполнить исследование, аналогичное предложенному в задаче № 19, для задачи $\min\{-x(x+1) : h(x) = x = 0\}$, применительно к процессу поиска локального минимума в окрестности точки $x^* = 0$.

22. Вывести итерационные соотношения метода модифицированных функций Лагранжа для задачи $\min\{x(x-1) : g(x) = x \leq 0\}$, с ограничением-неравенством используя известную форму этого метода для случая ограничений-равенств.

Указание: заменить неравенство $g(x) \leq 0$ эквивалентным равенством $h(x, z) = g(x) + z^2 = 0$ за счет добавления искусственной переменной z . В полученных итерационных соотношениях от переменной z следует избавиться.

23. Для функции $Q(x)$, липшицевой с константой $L = 1$ на отрезке $x \in [0, 10]$, известны результаты трех измерений: $x^1 = 3, Q(x^1) = 1; x^2 = 6, Q(x^2) = 2; x^3 = 10, Q(x^3) = 1$, где верхний индекс – номер измерения.

Построить по этим данным миноранту функции, получить ее графическое представление, определить нижнюю оценку глобально-оптимального значения $Q(x^*)$ и указать область возможного положения точек глобального минимума на отрезке $[0, 10]$. Как изменятся построенные оценки, если становится известным результат четвертого измерения: $x^4 = 0, Q(x^4) = 0$?

24. Применить метод Пиявского (ломаных) к функции $Q(x) = x$ на отрезке $x \in [0, 16]$, используя в качестве константы Липшица значение $L = 2$. Первые два измерения провести в точках $x^1 = 0$ и $x^2 = 16$. Определить координаты третьего и четвертого: x^3 и x^4 . После проведения этих измерений, получить оценки решения как по значению функции, так и по координате.

25. Липшицева с константой $L = 1$ функция $Q(x)$ рассматривается на отрезке $x \in [0, 18]$; имеется следующий набор измерений: $x^1 = 3, Q(x^1) = 6; x^2 = 9, Q(x^2) = 3; x^3 = 15, Q(x^3) = 5$, где верхний индекс – номер измерения. Сравнить нижние оценки, построенные для двумя методами: ломаных и деления на три.

Для каждой из минорант получить интервальные оценки неизвестного глобально-оптимального значения. Построить геометрическую иллюстрацию исходных данных и решения.

26. Рассмотреть задачу поиска глобального минимума негладкой функции $Q(x) = \min\{x^2; 1 + (x - 5)^2/3\}$ на отрезке $[-2, 8]$. Используя качественные геометрические построения, показать размещение первых девяти точек испытаний в методе деления на три и в методе Пиявского. В качестве L выбрать минимально возможное для $Q(x)$ значение.

27. В задаче № 26 применить метод Пиявского, используя адаптивную оценку константы Липшица со значением коэффициента надежности $r = 2$. Показать работу метода, выполнив качественные геометрические построения для первых семи шагов.

28. Определить погрешность оценки глобального минимума в задаче $\min Q(x)$, $x \in [0, 648]$ при применении метода деления на три после выполнения двух итераций метода. Принять, что константа Липшица $L = 2$, а значения функции во всех точках испытаний, проведенных на этих итерациях, совпали со значениями функции x в этих точках.

29. Для функции $Q(x)$, липшицевой в метрике $\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$ с константой L , определить выражение для нижней оценки $Q(x)$ в целом по параллелепипеду $P(a, b) = \{x \in R^n : a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1, \dots, n\}$, используя результат ее измерения $Q_y = Q(y)$ в геометрическом центре P , $y = (a + b)/2$.

30. Найти оценку глобального минимума многоэкстремальной функции $Q(x)$ на множестве $x = (x_1, x_2) \in [0, 108]^2$ с точностью δ по значению функции при $\delta = 24$, используя метод деления на три. Определить количество необходимых испытаний. Принять, что функция $Q(x)$ липшицева в метрике, использованной в задаче № 29, с константой $L = 2$, а ее значения во всех точках проводимых испытаний совпадают со значениями функции $x_1 + x_2$.

31. Используя метод деления на три, найти оценку глобального минимума многоэкстремальной функции $Q(x)$ на множестве $x \in [0, 108]^2$ при наличии дополнительного ограничения $g(x) \leq 0$. Точность δ построения оценки должна составлять $\delta = 24$ по значению функции. Принять, что $Q(x)$ и $g(x)$ липшицевы по отношению к норме $\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$ с константами $L^Q = 2$ и $L^g = 1.5$, а их значения в точках испытаний, проведенных до выполнения критерия останова, совпадают, соответственно, со значениями функций $x_1 + x_2$ и $36 - (x_1 + x_2)$.

5. Вариационное исчисление

5.1. Основные понятия

Пусть $I[y(\cdot)]$ – интегральный функционал, заданный на некотором классе Y допустимых функций $y(x)$. Множество Y является открытым множеством. Функция $y^*(x)$ из Y называется глобальным минимумом (максимумом) функционала $I[y(\cdot)]$, если $I[y^*(\cdot)] \leq I[y(\cdot)]$ ($I[y^*(\cdot)] \geq I[y(\cdot)]$) для всех $y \in Y$.

Для определения локального экстремума необходимо ввести расстояние (норму) в множестве Y . В вариационном исчислении чаще всего используют расстояние $\rho_0(y_1, y_2) = \max_{x \in [x_0, x_1]} |y_1(x) - y_2(x)|$ (сильное расстояние) и

$$\rho_1(y_1, y_2) = \max_{x \in [x_0, x_1]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x \in [x_0, x_1]} |y_1'(x) - y_2'(x)|$$

(слабое расстояние).

Соответственно определяется 2 вида локальных экстремумов. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $y \in Y$ таких, что $\rho_0(y^*, y) < \varepsilon$ ($\rho_1(y^*, y) < \varepsilon$) имеет место $I[y^*(\cdot)] \leq I[y(\cdot)]$ ($I[y^*(\cdot)] \geq I[y(\cdot)]$), то на $y^*(x) \in Y$ достигается сильный (слабый) локальный минимум (максимум). Поскольку $\rho_1(y^*, y) \geq \rho_0(y^*, y)$, то если на y^* достигается сильный экстремум, то, тем более, достигается и слабый. Глобальный экстремум является одним из локальных.

Для получения необходимых условий экстремума функционала рассматривается произвольное однопараметрическое семейство кривых $y(x, \alpha)$, удовлетворяющих тем же условиям гладкости и тем же граничным условиям, что и допустимые кривые, и такое, что кривая $y_0(x)$, для которой вычисляется вариация функционала, погружена в это семейство при $\alpha = 0$. Тогда первой вариацией функционала $I[y(\cdot)]$ называется

$\frac{d}{d\alpha} I[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0} \cdot \alpha$. Необходимым условием экстремума (любого - сильного или слабого локального, глобального) является обращение в ноль его первой вариации для любого семейства $y(x, \alpha)$. Это условие аналогично необходимому условию локального экстремума дифференцируемой функции. Кривые, удовлетворяющие этому условию, называются *экстремальями*.

Дополнительный теоретический материал по разделу можно найти в литературе [20, 21], а задачи в [5, 11, 15, 20, 21].

5.2. Простейшая задача с фиксированными концами и ее обобщения

Пусть $I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$, где $y \in Y$,

$$Y = \{y = y(x) : y(x) \in C^2[x_0, x_1], y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\},$$

а функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Для того, чтобы на функции $y(x)$ достигался экстремум функционала, необходимо, чтобы $y(x)$ удовлетворяла *уравнению Эйлера*: $\partial F / \partial y - d/dx(\partial F / \partial y') = 0$. Интегральные кривые уравнения Эйлера являются *экстремальями*. Свойство кривой быть или не быть экстремалью не зависит от выбора системы координат (это означает инвариантность уравнения Эйлера относительно выбора переменных).

Уравнение Эйлера — нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в обыкновенных производных; в общем случае оно не интегрируется. Отметим важные частные случаи. Если F явно не зависит от y , то имеется первый интеграл $\partial F / \partial y' = C$; если F явно не зависит от x , то есть первый интеграл $F - y' \partial F / \partial y' = C$; если F не зависит от y' , то уравнение Эйлера не является дифференциальным уравнением и в общем случае не существует функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Если же F зависит только от y' , то экстремальями являются прямые $y = C_1 x + C_2$.

Если $F(x, y, y') = A(x) \cdot y^2(x) + B(x) \cdot y(x) \cdot y'(x) + C(x) \cdot y'^2(x)$, то уравнение Эйлера является линейным уравнением второго порядка, поэтому, даже если у него есть первый интеграл, то удобнее решать само уравнение.

Пусть найдены кривые, удовлетворяющие уравнению Эйлера и граничным условиям $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$. Решена ли задача? Нет, поскольку выполнение уравнения Эйлера является лишь необходимым условием экстремума: «каждый понимает разницу между арестом подозреваемого и фактическим доказательством его виновности». Если не решен вопрос о существовании решения, то нет смысла и говорить о необходимых условиях. Если же существование решения экстремальной задачи именно в этом классе допустимых кривых доказано, то экстремум может достигаться лишь там, где выполнены необходимые условия (в случае простейшей вариационной задачи - только на гладких экстремальных, удовлетворяющих заданным граничным условиям). Во всех рассмотренных ниже задачах можно доказать существование решения.

Отметим роль $\partial^2 F / \partial y'^2$. Задачи, где эта производная отлична от нуля, называются регулярными. Условие $\partial^2 F / \partial y'^2 \neq 0$ исключает возможность излома экстремалей (теорема Дюбуа-Реймона). Кроме того, имеет место

необходимое условие второго порядка (условие Лежандра): если на $y^*(x)$ достигается минимум (максимум) функционала, то

$$\partial^2 F / \partial y'^2 (x, y^*(x), y'^*(x)) \geq 0 \quad (\partial^2 F / \partial y'^2 (x, y^*(x), y'^*(x)) \leq 0)$$

при $x \in [x_0, x_1]$.

В точках нарушения условия регулярности (т.е. при $\partial^2 F / \partial y'^2 = 0$) экстремали могут иметь изломы, т.е. являться кусочно-гладкими.

Необходимыми условиями экстремума функционала в классе кусочно-гладких кривых является выполнение на каждом участке гладкости уравнения Эйлера, а в точках излома \bar{x} экстремали – выполнение условий Вейерштрасса-Эрдмана [20]:

$$(\partial F / \partial y')|_{\bar{x}-0} = (\partial F / \partial y')|_{\bar{x}+0}; \quad (F - y' \cdot \partial F / \partial y')|_{\bar{x}-0} = (F - y' \cdot \partial F / \partial y')|_{\bar{x}+0}.$$

Если $y(x)$ – вектор-функция $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$, то при аналогичных условиях для F и фиксированных граничных условиях необходимое условие экстремума состоит в выполнении системы n уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если $F = F(x, y, y', \dots, y^{(m)})$, то при аналогичных условиях для F и фиксированных граничных условиях $y(x_i) = y_i, y'(x_i) = y', \dots, y^{(m-1)}(x_i) = y_i^{(m-1)}$, ($i = 0, 1$) необходимое условие экстремума первого порядка состоит в выполнении уравнения Эйлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \frac{\partial F}{\partial y^{(m)}} = 0$$

Для функционала вида $I[z(x, y)] = \iint_D F(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y) dx dy$, где $z(x, y)$ — гладкие поверхности, удовлетворяющие на границе множества D условию $z|_{\partial D} = f(x, y)$, необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера-Остроградского) имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z'_y} = 0$$

Пример 1. Задача Лопиталья о форме световых лучей

Какова траектория световых лучей в атмосфере, где скорость распространения пропорциональна высоте?

Постановка этой задачи использует вариационный принцип Ферма в оптике: свет распространяется из одной фиксированной точки в другую по

такому пути, время распространения по которому минимально. На основе этого принципа можно построить всю геометрическую оптику.

Рассмотрим плоскую задачу. Пусть источник расположен в точке $M_0(x_0, y_0)$, а наблюдатель – в точке $M_1(x_1, y_1)$, $y_0, y_1 > 0$.

Запишем математическую модель этой задачи. Время распространения света из точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M_1(x_1, y_1)$ описывается функционалом $\int_{x_0}^{x_1} (\sqrt{1+y'^2}/v) dx$, где v — скорость распространения света, т.к. $dt = ds/v = (\sqrt{1+y'^2}/v) dx$. Таким образом,

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} dx$$

Здесь $v = ky$ ($k > 0$). Так как при всех k функционал достигает минимума на одной и той же кривой, то примем $k = 1$.

Функция $F = \sqrt{1+y'^2}/y$ при $y \neq 0$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Задача регулярна, необходимое условие Лежандра выполнено, так как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{1}{y\sqrt{(1+y'^2)^3}} > 0$$

при $y > 0$. Мы пришли к простейшей вариационной задаче: найти глобальный минимум функционала в классе гладких кривых, соединяющих точки M_0 и M_1 . Уравнение Эйлера – трудное нелинейное уравнение второго порядка. Но если заметить, что F явно не зависит от x , то можно записать первый интеграл $F - y'(\partial F/\partial y') = C$ и решить существенно более простое уравнение первого порядка, которое легко интегрируется:

$$y\sqrt{1+y'^2} = C_1, \quad 1+y'^2 = C_1^2/y^2, \quad y' = \pm \sqrt{C_1^2 - y^2}/y.$$

Тогда:

$$\frac{\pm y dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = dx, \quad \mp \sqrt{C_1^2 - y^2} = x + c_2, \quad (x + c_2)^2 + y^2 = C_1^2;$$

т.е. экстремалами являются окружности, центры которых лежат на оси Ox . Через точки M_0 и M_1 можно провести единственную окружность данного семейства.

Итак, мы нашли единственную допустимую кривую, на которой может достигаться минимум функционала. Можно показать, что экстремум существует. А так как он может достигаться лишь на экстремали, проходящей

через точки M_0 и M_1 , то эта экстремаль и является решением поставленной задачи.

Через два века после Лопиталья А. Пуанкаре на основе этой задачи построил модель плоскости Лобачевского.

Пример 2. Задача о движении яхты против ветра

Пусть на безграничном водном пространстве дует постоянный по величине и направлению ветер, вектор скорости которого параллелен вектору, направленному из точки B в точку A . Найти способ передвижения яхты, при котором она за наименьшее время сможет перейти из точки A в точку B .

Как и в примере 1,

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} dx$$

Яхтсмены считают, что $v = v(y')$. Требуется найти глобальный минимум этого функционала. Здесь $F = \sqrt{1+y'^2}/v = F(y')$, т.е. гладкими экстремальными в этой задаче являются прямые. На единственной прямой AB , соединяющей начало и конец движения, очевидно, не может достигаться минимум времени перехода. Отсюда следует, что поставленная задача решения в классе гладких кривых не имеет. Будем искать ее решение в классе кусочно-гладких кривых с конечным числом угловых точек. Поскольку на каждом участке гладкости искомая кривая должна удовлетворять уравнению Эйлера, то искомый путь яхты состоит из прямолинейных отрезков, т.е. яхта должна двигаться галсами.

Задача решена лишь качественно. Если мы хотим получить аналитический результат, то надо записать зависимость $v(y')$ и использовать условия Вейерштрасса-Эрдмана.

Пример 3.

Найти экстремум функционала:

$$I[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} xz^2(2yz + xzy' + 3xyz') dx$$

в классе гладких кривых, проходящих через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

В этой задаче экстремум может достигаться лишь на функциях $y(x)$ и $z(x)$, удовлетворяющих системе уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} = 0, \text{ т.е.}$$

$$2xz^3 + 3x^2z^2z' - \frac{d}{dx}(x^2z^3) \equiv 0;$$

$$6xyz^2 + 3x^2z^2y' + 6x^2yzz' - \frac{d}{dx}(3x^2yz^2) \equiv 0.$$

Следовательно, любая допустимая кривая является экстремалью. Этот результат легко понять, если увидеть, что исследуемый функционал описывает работу силового поля $2xyz^3\bar{i} + x^2z^3\bar{j} + 3x^2yz^2\bar{k}$ по перемещению точки из M_0 в M_1 . Это поле является потенциальным с потенциалом $u = x^2yz^3$; в этом случае работа не зависит от пути.

5.3. Задачи со скользящими концами

В этих задачах концы допустимых кривых могут перемещаться по заданным кривым. В этом случае к необходимым условиям экстремума добавляются условия трансверсальности на подвижном конце — условия, связывающие угловые коэффициенты экстремали и граничной кривой, показывающие, с каким угловым коэффициентом экстремаль должна подходить к граничной кривой.

Для плоского случая условия трансверсальности имеют вид

$$\left[\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{\Psi(x,y)=0} = 0,$$

где $\Psi(x, y) = 0$ — неявное задание кривой, по которой перемещается конец допустимой кривой.

В частности, если значения допустимых функций $y(x)$ на границе не подчинены никаким условиям (т.е. конец может перемещаться по прямой $x = x_0$ или $x = x_1$), то будем говорить, что это *задача со свободным концом*.

На свободном конце выполняется естественное граничное условие $\partial F / \partial y' = 0$.

Если конец движется по прямой $y = const$, то на нем $F - y' \partial F / \partial y' = 0$. Если граничная кривая задана в явном виде $y = f(x)$, то условия трансверсальности имеет форму

$$\left(F + (f' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \Big|_{y=f(x)} = 0.$$

В случае $F(x, y, y') = A(x, y) \sqrt{1 + y'^2}$ условия трансверсальности задают условия ортогональности экстремали с граничной кривой: $y' \cdot f' = -1$.

Пример 4.

Найти экстремали функционала

$$\int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) dx$$

в классе кусочно-гладких кривых, удовлетворяющих условию $y(0) = 1$.

$F(x, y, y') = y'^2 - y^2$ имеет непрерывные частные производные любого порядка, $F_{y'y'} = 2 \neq 0$, поэтому по теореме Дюбуа-Реймона экстремали изломов не имеют, являются дважды гладкими. Т.к. $F_{y'y'} > 0$, то если в данном классе допустимых кривых достигается экстремум функционала, то он является минимумом.

Необходимым условием минимума является выполнение уравнения Эйлера при $0 < x < \pi/4$, условие закрепленного конца $y(0) = 1$ и условие свободного конца при $x = \pi/4$: $F_{y'}$, вычисленная вдоль экстремали, обращается в 0.

$y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$, $y(0) = C_1 = 1$; $y = \cos x + C_2 \cdot \sin x$, $F_{y'} = 2y'$, для экстремали

$$F_{y'} = -2 \sin x + 2C_2 \cdot \cos x, \quad F_{y'} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2C_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

откуда $C_2 = 1$. Итак, экстремалью является кривая $y = \cos x + \sin x$.

Пример 5.

Найти гладкую кривую OA длины ℓ , проходящую через начало координат, кончающуюся на прямой $y = h$ и образующую вместе с ординатой точки A и осью Ox наибольшую площадь.

В этой задаче требуется найти максимум функционала $I[y(\cdot)] = \int_0^{x_1} y(x) dx$ в классе гладких кривых, левый конец которых закреплен: $y(0) = 0$, правый конец лежит на прямой $y = h$, а функционал $I_0[y(\cdot)] = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$ принимает заданное значение ℓ .

Решаем эту изопериметрическую задачу методом множителей Лагранжа. Вводим вспомогательный функционал $I_1[y(\cdot)] = \int_0^{x_1} (y + \lambda_1 \sqrt{1 + y'^2}) dx$ и решаем для него задачу на безусловный экстремум. Запишем необходимые условия. Так как $F_1 = y + \lambda_1 \sqrt{1 + y'^2}$ явно не зависит от x , то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y' \cdot \partial F_1 / \partial y' = c$. Мы будем искать такое его решение, которое на левом конце удовлетворяет условию $y(0) = 0$, а на

правом конце – условию трансверсальности, которое для горизонтальной прямой $y = h$ имеет вид $F - y' \cdot \partial F_1 / \partial y' = 0$. Таким образом, нам известно значение первого интеграла в одной точке (на правом конце). Тогда по определению первого интеграла во всех точках экстремали $F - y' \cdot \partial F_1 / \partial y' = 0$.

$$y + \lambda_1 \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0; \quad y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda = 0; \quad y' = \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - y^2}}{y};$$

$$\pm \frac{y dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}} = dx; \quad (x + c)^2 + y^2 = \lambda^2.$$

Это – семейство экстремалей. Неизвестные c, λ, x_1 определяются из условий на концах: $y(0) = 0, y(x_1) = h$, и условия $\int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = \ell$. Эти условия дают $c^2 = \lambda^2, (x_1 + c)^2 + h^2 = \lambda^2, x_1 = -c \pm \sqrt{c^2 - h^2}$. Если искомую кривую рассматривать при $x > 0$ (при $x < 0$ будет симметричное решение), то, так как окружность пересекает прямую $y = h$ в двух точках, то конец кривой – правая из двух возможных точек пересечения: $x_1 = -c + \sqrt{c^2 - h^2}$. Константу c , а вместе с ней и λ , находим из условия $\int_0^{-c + \sqrt{c^2 - h^2}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \ell$, где y' вычисляется вдоль экстремали и $\sqrt{1 + y'^2} = -\lambda/y$ (из дифференциального уравнения экстремали). Так как $y > 0$ при $h > 0$ (при $h < 0$ имеется симметричное решение), то $y = \sqrt{\lambda^2 - (x + c)^2}$. Тогда $\lambda < 0, c < 0, \lambda = c$ и

$$\int_0^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - h^2}} \frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - (x + \lambda)^2}} dx = \ell; \quad -\lambda \arcsin \frac{x + \lambda}{|\lambda|} \Big|_0^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - h^2}} = \ell;$$

$$-\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{\lambda^2 - h^2}}{\lambda} = \frac{\ell}{\lambda},$$

т.е. λ — отрицательный корень этого трансцендентного уравнения. Величина λ определяет положение центра искомой окружности и ее радиус.

5.4. Вариационные задачи на условный экстремум

Изопериметрическая задача имеет следующую постановку: найти экстремум функционала $I[y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)]$ в классе гладких на $[x_0, x_1]$ кривых, удовлетворяющих заданным граничным условиям, при условии, что другой функционал $I_0[y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)]$ принимает заданное постоянное значение:

$$I[y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

$$I_0[y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx = \ell.$$

Аналогично задаче Лагранжа изопериметрическая задача сводится к задаче на безусловный экстремум вспомогательного функционала $I_1 = \int_{x_0}^{x_1} (F + \lambda G) dx$, где $\lambda = const$. При этом предполагается, что $y_1(x), \dots, y_n(x)$ не является экстремалью функционала I_0 .

Задача Лагранжа ставится следующим образом: требуется найти экстремум функционала $I[y_1(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$ в классе гладких на $[x_0, x_1]$ кривых, удовлетворяющих заданным граничным условиям и условиям связи $G_k(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, k = \overline{1, m}, m < n$.

Если G_k не зависят от y_1', \dots, y_n' , то связи называются голономными. В этом случае условия связи означают, что допустимые кривые лежат на поверхностях $G_k = 0$.

Эта задача сводится к задаче на безусловный экстремум вспомогательного функционала: если кривая $y_1(x), \dots, y_n(x)$ доставляет экстремум функционалу I при условиях $G_k = 0$, то существуют множители Лагранжа $\lambda_k(x)$ такие, что на этой кривой достигается безусловный экстремум функционала:

$$I[y_1(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} \left(F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') + \sum_{k=1}^m \lambda_k(x) C_k(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') \right) dx.$$

Пример 6.

Найти геодезические линии круглого цилиндра $r = R$. Геодезические линии — это линии наименьшей длины, соединяющие две заданные точки поверхности. Задача сводится к нахождению глобального минимума функционала $I_1 = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$ при условии, что кривые, проходящие через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежат на поверхности цилиндра. Это — задача Лагранжа с голономными связями. Задачу удобнее решать в цилиндрических координатах r, φ, z . Тогда функционал имеет вид:

$$I = \int_{M_0}^{M_1} \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r_\varphi'^2 + z_\varphi'^2} d\varphi$$

Уравнение связи: $r = R$ (*const*).

Составляем вспомогательный функционал:

$$I_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\sqrt{r^2 + r_\varphi'^2 + z_\varphi'^2} + \lambda(\varphi)(r - R)) d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} F_1(\varphi, r, z, r_\varphi', z_\varphi') d\varphi$$

и решаем для него задачу о нахождении глобального минимума.

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F_1}{\partial r_\varphi'} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F_1}{\partial z_\varphi'} = 0, \text{ т.е. } \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_\varphi'^2 + z_\varphi'^2}} + \lambda(\varphi) - \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_\varphi'}{\sqrt{r^2 + r_\varphi'^2 + z_\varphi'^2}} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{z_\varphi'}{\sqrt{r^2 + r_\varphi'^2 + z_\varphi'^2}} \right) = 0. \text{ Так как } r_\varphi' = 0, \text{ из второго уравнения}$$

$$\frac{z_\varphi'}{\sqrt{R^2 + z_\varphi'^2}} = c, \quad z_\varphi' = c\sqrt{R^2 + z_\varphi'^2}, \quad z_\varphi' = \pm \frac{cR}{\sqrt{1 - c^2}} = c_1 \quad (\text{при } c^2 \neq 1),$$

$$z = c_1\varphi + c_2.$$

При $c^2 = 1$, $z'^2 = R^2 + z'^2$, что возможно только при $d\varphi/dz = 0$.

Кроме того, есть уравнение связи $r = R$.

Экстремальными задачи являются винтовые линии. Через точки M_0 и M_1 (при $z_0 \neq z_1$) можно провести бесчисленное множество винтовых линий, отличающихся друг от друга числом оборотов вокруг цилиндра. В этой задаче наглядно видно, что выполнение уравнения Эйлера — необходимое условие *локального* экстремума. Можно показать, что на каждой из этих винтовых линий достигается локальный минимум функционала; глобальный минимум реализуется на той винтовой линии, для которой $|\varphi_0 - \varphi| < 2\pi$. При $\varphi_0 = \varphi_1$ это будет отрезок прямой, соединяющей точки M_0 и M_1 .

Пример 7.

Найти минимум функционала $I[y(\cdot)] = \int_0^1 y'^2 dx$ в классе гладких кривых, удовлетворяющих условиям $y(0) = y(1) = 0$, $\int_0^1 y^2 dx = 1$.

Эта изопериметрическая задача сводится к нахождению безусловного экстремума вспомогательного функционала $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (y'^2 + \lambda y^2) dx$ в классе гладких кривых, удовлетворяющих условию $y(0) = y(1) = 0$.

Уравнение Эйлера $2\lambda \cdot y - 2 d/dx(y') = 0$, $y'' - \lambda \cdot y = 0$. Получим краевую задачу. При $\lambda \geq 0$ она имеет только тривиальные решения, не удовлетворяющие условию $\int_0^1 y^2 dx = 1$. При $\lambda < 0$ $y = c_1 \sin \sqrt{-\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{-\lambda} x$.

Из граничных условий $c_2 = 0$, $c_1 \sin \sqrt{-\lambda} = 0$; а т.к. $c_1 \neq 0$ (в противном случае получим тривиальное решение), то для множителя Лагранжа λ получаем условие $\sqrt{-\lambda_n} = \pi n$, $\lambda_n = -\pi^2 n^2$. Тогда $y_n = c_n \sin(\pi n x)$.

Коэффициенты c_n определяются из условия $\int_0^1 y^2 dx = 1$.

$$\int_0^1 c_n^2 \sin^2(\pi n x) dx = c_n^2 \int_0^1 \frac{1 - \cos(2\pi n x)}{2} dx = \frac{c_n^2}{2} = 1, c_n = \pm \sqrt{2}.$$

Итак, найдено счетное множество экстремалей $y_n = \pm \sqrt{2} \cdot \sin(\pi n x)$.

Вычисляя $\int_0^1 y'^2 dx$, убеждаемся, что $I[y_n(x)]$ принимает наименьшее значение при $n = 1$:

$$I[y_n(x)] = \int_0^1 2(\pi n)^2 \cos^2(\pi n x) dx = (\pi n)^2.$$

Можно показать, что на $y = \sqrt{2} \cdot \sin(\pi x)$ (и симметричной ей $y = -\sqrt{2} \cdot \sin(\pi x)$) достигается глобальный минимум.

5.5. Контрольные задания

Решить следующие классические задачи вариационного исчисления (1-5).

1. Задача о брахистохроне (линии наибыстрейшего ската). В вертикальной плоскости даны точки A и B . Определить путь, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело, начав двигаться из точки A , достигнет точку B в кратчайшее время.

2. Задача о минимальной поверхности вращения. Найти плоскую кривую, соединяющую две заданные точки плоскости и лежащую выше оси x , которая при вращении вокруг этой оси образует поверхность наименьшей площади.

3. Задача о цепной линии. Найти форму тяжелой однородной нерастяжимой нити, подвешенной за концы.

4. Найти форму мыльной пленки, натянутой на каркас, состоящий из двух параллельных дисков радиусов r и R , центры которых соединены осью длины ℓ , ортогональной дискам.

5. Задача Дидоны. Найти кривую заданной длины ℓ , проходящую через точки A и B оси x ($AB < \ell$), ограничивающую вместе с осью x наибольшую площадь.

6. Материальная точка перемещается вдоль плоской кривой $y = y(x)$, соединяющей точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, со скоростью $v = k \cdot y'$. Найти гладкую кривую, время движения вдоль которой из точки M_0 в точку M_1 будет минимальным.

7. Доказать, что линейный функционал $I[y] = \int_{x_0}^{x_1} (P(x)y' + Q(x)y + R(x))dx$,

где $P(x), Q(x), R(x)$ — функции класса C^2 , не имеет экстремумов в классе гладких функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям.

Найти экстремали следующих функционалов (8-30).

8. $I[y(\cdot)] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2)dx$; $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$.

9. $I[y(\cdot)] = \int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2)dx$, $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = 0$.

10. $I[y(\cdot)] = \int_0^{\pi/2} (6y \cdot \sin 2x + y^2 - y'^2)dx$, $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

11. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (x^2 y'^2 + 12x^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

12. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (x^2 y - y'^2)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

13. $I[y(\cdot)] = \int_1^\ell (y - xy'^2)dx$, $y(1) = 1$, $y(\ell) = 2$.

14. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (y'^2 + yy' + 12xy)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

15. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (4y \cdot \sin x - y^2 - y'^2)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

16. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 4y \cdot ch(x))dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

17. $I[y(\cdot)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y(-1) = y(2) = 1.$

18. $I[y(\cdot)] = \int_1^\ell (xy'^2 + yy') dx; \quad y(1) = 0, \quad y(\ell) = 1.$

19. $I[y(\cdot)] = \int_a^b (2xy + (x^2 + e^y)y') dx; \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$

20. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (e^y + xy') dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = a.$

21. $I[y(\cdot)] = \int_0^\pi (y'^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1.$

22. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$

23. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$
 $y'(0) = 1, \quad y'(1) = -sh(1).$

24. $I[y(\cdot)] = \int_a^b (y + y'') dx; \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad y'(a) = y'_0, \quad y'(b) = y'_1.$

25. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 y'' dx; \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = 0.$

26. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (y'^2 + y) dx, \quad y(1) = 0.$

27. $I[y(\cdot)] = \int_0^\pi (xy' + y'^2) dx, \quad y(\pi) = 1.$

28. $I[y(\cdot)] = \int_0^{x_1} (1 + x)y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) + x_1 = 2.$

29. $I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^1 \sqrt{1 + y'^2}, \quad y(1) = 1, \quad y(x_0) = x_0 - 5.$

30. $I[y(\cdot)] = \int_0^{x_1} (y'^2 + y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = 1.$

31. Найти расстояние между: (а) точкой $(0,0)$ и кривой $y = 1/x^2$; (b) параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 5$; (c) окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и прямой $x + y = 4$.

Найти экстремали в следующих изопериметрических задачах (32-37).

32. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int_0^1 xy dx = 0.$

33. $I[y(\cdot)] = \int_0^\pi y \sin x \, dx, y(0) = 0, y(\pi) = \pi, \int_0^\pi y'^2 \, dx = \frac{3}{2} \pi.$

34. $I[y(\cdot)] = \int_0^\ell (y')^2 \, dx; y(0) = y(\ell) = 0, \int_0^\ell y^2 \, dx = 1.$

35. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (x^2 + (y')^2) \, dx; y(0) = y(1) = 0, \int_0^1 y^2 \, dx = 2.$

36. $I[y(\cdot)] = \int_0^1 y'^2 \, dx, \int_0^1 y \, dx = 3, y(0) = 1, y(1) = 6.$

37. $I[y(\cdot)] = \int_0^\pi y'^2 \, dx, \int_0^\pi y \cos x \, dx = \pi/2, y(0) = y(\pi) = 0.$

38. Найти геодезические линии на сфере радиуса R .

39. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, -1)$ и $B(0, -1, 1)$, лежащими на плоскости $x + y + z = 0$.

40. Существует ли решение с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) \, dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1?$$

41. Решить задачи о минимуме функционала:

а) $\int_0^2 y'^2 (1 - y'^2)^2 \, dx, y(0) = 0, y(2) = 1;$

б) $\int_{-1}^1 y^2 (1 - y')^2 \, dx, y(-1) = 0, y(1) = 1.$

6. Оптимальное управление

6.1. Теория и примеры

Дана управляемая система, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x}_i = f_i(x, u(t))$, $i = 1, \dots, n$, где допустимое управление $u(\cdot)$ является *кусочно непрерывной* функцией времени, (непрерывной справа), значения которой $u(t) \in V \subset R^m$ (V – множество значений допустимого управления). Требуется перевести систему из начального состояния x^0 в конечное состояние x^1 так, чтобы заданный функционал $I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u) dt$ принимал наименьшее значение.

Составим *функцию Гамильтона* $H(x, \psi, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u)$, где вспомогательные переменные ψ_i являются решением сопряженной системы $\dot{\psi}_i = -\partial H / \partial x_i$, $i = \overline{1, n}$. Необходимые условия оптимальности в форме принципа *максимума Понтрягина* имеют вид: для оптимальности в смысле минимума функционала I процесса $u^*(t), x^*(t), t_0 \leq t \leq t_1$, необходимо существование нетривиального набора $(\psi_0^*, \psi^*(t))$, состоящего из константы $\psi_0^* \leq 0$ и решения $\psi^*(t), t_0 \leq t \leq t_1$, *сопряженной системы*, что для любого t , при котором $u^*(t)$ непрерывно, выполняется условие максимума:

$$H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) = \max \{ H(x^*(t), \psi^*(t), u) : u \in V \} \equiv 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

причем если $f_0 > 0$, то $\psi_0^* < 0$. Равенство нулю функции Гамильтона можно проверять только при одном из значений t , например, при $t = t_1$.

Если конец x^0 (x^1) не фиксирован, а принадлежит некоторому многообразию M , то на этом конце выполняются условия *трансверсальности*: вектор $\psi^*(t_0)$ ($\psi^*(t_1)$) ортогонален всем касательным векторам многообразия M в точке x^0 (x^1).

Важным классом задач являются задачи о *быстрейшем попадании* в начало координат по траекториям линейной системы $\dot{x} = Ax + Bu$, где область $V = M$ является m -мерным выпуклым многогранником, содержащим точку ноль (0 не должен быть вершиной M), удовлетворяющим *условию общности положения*: если w -вектор, параллельный любому ребру многогранника M , то векторы $Bw, ABw, \dots, A^{n-1}Bw$ линейно независимы. В таких задачах принцип

максимума Понtryгина для функции Гамильтона $H = \psi^T (Ax + Bu)$ является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности, причем требование равенства нулю функции Гамильтона выполнено автоматически.

Пример 1. О наискорейшем выведении судна на курс

В качестве первого примера рассмотрим задачу о быстрейшем приведении в начало координат объекта, движение которого описывается уравнением

$$\ddot{x} + h\dot{x} = u(t), |u(t)| \leq 1.$$

Эту задачу можно интерпретировать как задачу о быстрейшем выведении судна на курс.

Изучим случай $h < 0$. Вначале рассмотрим, что будет при крайних значениях управления, при $u = \pm 1$. На рис. 6.1 сплошными линиями начерчены траектории системы при $u = +1$, пунктиром – при $u = -1$. Если взять начальное состояние, расположенное вне полосы $|y = \dot{x}| < |1/h|$, то для него не существует допустимой траектории, ведущей в начало координат, так как никакая допустимая траектория, начинающаяся вне этой полосы, не может попасть в эту полосу при возрастании t . Это происходит потому, что никакая траектория не может пересечь траектории системы с $u = +1$ снизу вверх. Верхняя граница этой полосы является траекторией системы с $u = -1$, а нижняя – траекторией системы с $u = +1$. Из точек, расположенных внутри этой полосы, можно придти в точку 0 (хотя бы по траекториям систем с $u = \pm 1$). Итак, задачу об отыскании оптимального управления можно решать лишь для точек множества управляемости – полосы $|y| < |1/h|$.

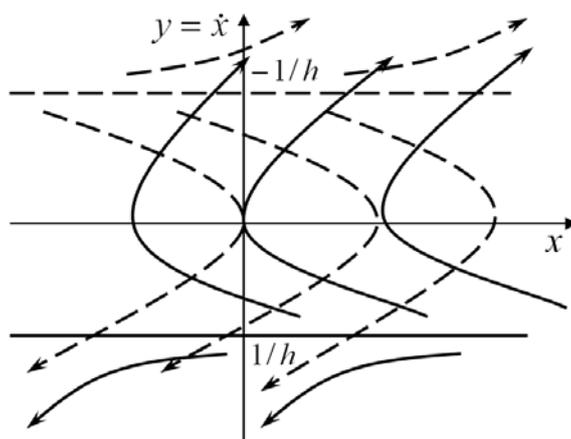


Рис. 6.1. Фазовые траектории системы при двух постоянных значениях управления $u = \pm 1$

Нетрудно показать, что в этой задаче выполняется условие общности положения. Поэтому принцип максимума Понtryгина задает необходимые и достаточные условия оптимальности.

Составим функцию Гамильтона $H = \psi_1 y + \psi_2 (-hy + u)$, где ψ_1, ψ_2 — решения сопряженной системы $\dot{\psi}_1 = -\partial H/\partial x = 0$, $\dot{\psi}_2 = -\partial H/\partial y = -\psi_1 + h\psi_2$.

Так как u входит в H линейно с коэффициентом ψ_2 , то $\max\{H : |u| \leq 1\}$ достигается при граничных значениях управления, причем знак u_{opt} зависит от ψ_2 : $u_{opt} = \text{sign} \psi_2(t)$. Решая сопряженную систему, получим: $\psi_1 = c_1$, $\dot{\psi}_2 = -c_1 + h\psi_2$, $\psi_2 = c_2 e^{ht} - c_1/h$, откуда видно, что $\psi_2(t)$ может менять знак не более 1 раза. Следовательно, оптимальное управление может менять знак не более 1 раза. Мы пока знаем только качественную структуру оптимального управления и не знаем, при каких состояниях происходит переключивание руля из одного крайнего положения в другое. Выясним этот вопрос. Целью управления является точка $(0,0)$. В нее ведут лишь 2 траектории, удовлетворяющие принципу максимума: γ_{+1} и γ_{-1} , отвечающие граничным значениям управления u . Последний участок движения должен лежать на одной из них, т.е. кривая Γ , состоящая из γ_{+1} и γ_{-1} , является линией переключения. Решение задачи синтеза оптимальных управлений (нахождение оптимального управления как функции состояния системы) существует лишь при $|x| < |1/h|$ и имеет следующий вид:

$$u_{opt} = \begin{cases} +1 & \text{ниже } \Gamma \text{ и на } \gamma_{+1} \\ -1 & \text{выше } \Gamma \text{ и на } \gamma_{-1} \end{cases}$$

Схема переключений показана на рис. 6.2.

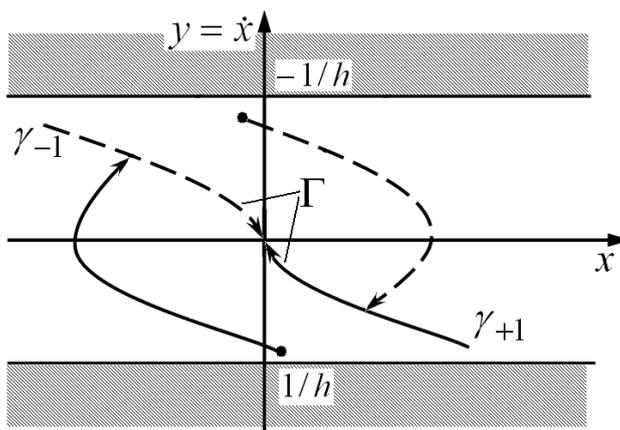


Рис. 6.2. Вид линии переключения Γ и оптимальных траекторий примера 1 для области управляемости (серым тоном отмечена область неуправляемости)

Пример 2.0 скорейшем выведении на интервал

В качестве второго примера рассмотрим задачу о быстрейшем приведении объекта, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + x = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad (6.1)$$

или, что то же самое, системой

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + u(t) \end{cases}, \quad |u(t)| \leq 1, \quad (6.2)$$

на множество $Q = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$. Эту задачу можно интерпретировать как задачу о быстрой остановке колебаний маятника.

Составим функцию Гамильтона $H = \psi_1 y + \psi_2(-x + u)$, где функции ψ_1, ψ_2 являются решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \end{cases}.$$

Очевидно, что максимальное значение функции Гамильтона достигается при значениях управления $u^0(t) = \text{sign} \psi_2(t)$. Решая сопряженную систему, получим

$$\psi_2(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad \psi_1(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t.$$

Из условий трансверсальности следует, что если траектория приходит в момент времени T на интервал $(-1; +1)$ оси OX , то вектор $\psi(T) = (\psi_1(T), \psi_2(T))$ должен принять одно из значений $(0; -1)$, $(0; +1)$. В первом случае мы имеем систему

$$\begin{cases} c_1 \sin T - c_2 \cos T = 0 \\ c_1 \cos T + c_2 \sin T = -1 \end{cases},$$

решив которую, получим: $c_1 = -\cos T$, $c_2 = -\sin T$.

Таким образом, $\psi_2(t) = -(\cos t \cos T + \sin t \sin T) = -\cos(t - T)$. Это означает, что на последнем интервале времени $(T - \pi/2; T)$ значение управления равно -1 , а предыдущие интервалы времени с постоянным значением управления $+1$ (или -1), имеют длительность π (кроме, быть может, первого интервала).

Во втором случае мы имеем систему

$$\begin{cases} c_1 \sin T - c_2 \cos T = 0 \\ c_1 \cos T + c_2 \sin T = 1 \end{cases},$$

решив которую, получим: $c_1 = \cos T$, $c_2 = \sin T$.

Таким образом, $\psi_2(t) = \cos t \cos T + \sin t \sin T = \cos(t - T)$. Это означает, что на последнем интервале времени $(T - \pi/2; T)$ значение управления равно $+1$, а предыдущие интервалы времени с постоянным значением управления -1 (или $+1$), имеют длительность π (кроме, быть может, первого интервала).

Далее заметим, что траекториями системы (6.2) при $u = -1$ являются окружности с центром в точке $(-1; 0)$, а при $u = +1$ - окружности с центром в точке $(+1; 0)$. Таким образом, сверху на интервал Q могут придти только траектории системы (2) при управлении $u = -1$, а снизу на интервал Q могут придти только траектории системы (2) при управлении $u = +1$. Поскольку длительности времени $\pi/2$ соответствует четверть окружности соответствующей траектории системы (2), линией переключения в момент времени $T - \pi/2$ с управления $u = +1$ на $u = -1$ будет отрезок $Q_{-1} = \{(x, y) : x = -1, 0 \leq y \leq 2\}$, а линией переключения с $u = -1$ на $u = +1$ будет отрезок $Q_{+1} = \{(x, y) : x = 1, -2 \leq y \leq 0\}$ (рис. 6.3).

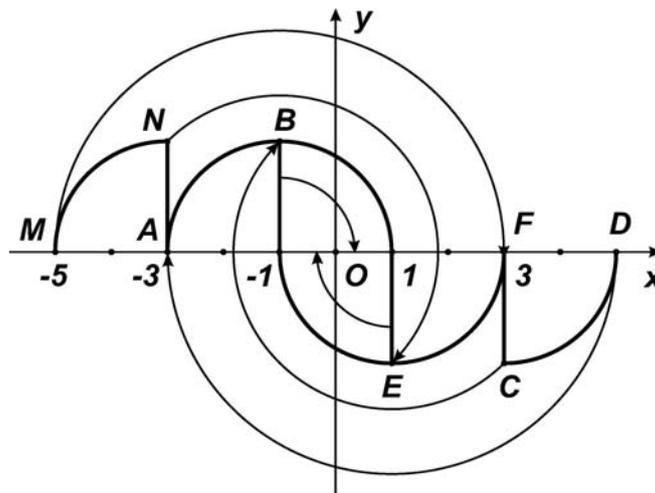


Рис. 6.3. Вид оптимальных траекторий и линии переключения в примере 2

Отдельно решается вопрос о длительности интервала времени с постоянным значением управления $u = -1$ для траектории $\Gamma(1)$, приходящей в крайнюю точку $(1; 0)$ множества Q , поскольку в этой точке любая прямая является «касательным» к множеству Q вектором. Таким образом, длительность этого интервала для траектории $\Gamma(1)$ в соответствии с принципом максимума и общим решением для $\psi_2(t)$ может теоретически быть любой от нуля до значения π . С другой стороны, легко видеть, что длительность этого интервала не может быть меньше, чем $\pi/2$, так как для того, чтобы пересечь дугу траектории $\Gamma(1)$, соединяющую точки $(-1; 2)$ и $(1; 0)$, траектория

системы (6.2) при управлении $u = +1$ должна пересечь отрезок $Q_{-1} = \{(x, y) : x = -1, 0 \leq y \leq 2\}$, уже являющийся линией переключения с управления $u = +1$ на управление $u = -1$. Значит, заключительным участком оптимальной траектории, приходящей в точку $(1; 0)$, может быть любая дуга траектории $\Gamma(1)$, соответствующая интервалу времени (t_1, T) , где каждому значению $t_1 \in [T - \pi, T - \pi/2]$ соответствует точка дуги AB траектории $\Gamma(1)$, соединяющей точки $A(-3; 0)$ и $B(-1; 2)$. Рассмотрим траектории системы (6.2) при управлении $u = +1$ на отрезке времени $[T - 3\pi/2, T - \pi/2]$, приходящие в момент времени $T - \pi/2$ в одну из точек линии переключения $Q_{-1} = \{(x, y) : x = -1, 0 \leq y \leq 2\}$, а также на отрезке времени $[t_1, t_1 - \pi]$, приходящие в момент времени t_1 в одну из точек дуги AB . Начала этих траекторий, соответствующие моментам времени $T - 3\pi/2$ и $t_1 - \pi$, образуют линию переключения с управления $u = -1$ на управление $u = +1$, составленную из отрезка $Q_{+3} = \{(x, y) : x = 3, -2 \leq y \leq 0\}$ и дуги CD окружности с центром в точке $(3; 0)$ радиуса 2, соединяющей точки $C(3; -2)$ и $D(5; 0)$. Заметим, что отрезок $Q_{+3} = \{(x, y) : x = 3, -2 \leq y \leq 0\}$ и дуга CD получаются из отрезка $Q_{-1} = \{(x, y) : x = -1, 0 \leq y \leq 2\}$ и дуги AB поворотом на угол π относительно точки $(1; 0)$.

Совершенно аналогичным образом решается вопрос о структуре оптимальных траекторий, приходящих на множество Q снизу: заключительному интервалу времени $(T - \pi/2, T)$ соответствует дуга траектории системы (2) при управлении $u = +1$ (четверть дуги окружности с центром в точке $(1; 0)$). Отрезок $Q_{+1} = \{(x, y) : x = +1, -2 \leq y \leq 0\}$ будет линией переключения с управления $u = -1$ на управление $u = +1$. При этом заключительный участок траектории $\Gamma(-1)$, входящей в точку $(-1; 0)$, может начинаться с любой точки ее дуги EF , соединяющей точки $E(1; -2)$ и $F(3; 0)$, и являющейся также частью линии переключения с управления $u = -1$ на управление $u = +1$. Начальные точки дуг траекторий системы (2) при управлении $u = -1$, соответствующие интервалу времени π и заканчивающиеся в точках отрезка $Q_{+1} = \{(x, y) : x = +1, -2 \leq y \leq 0\}$ и дуги EF , образуют линию переключения с управления $u = +1$ на управление $u = -1$.

Она будет составлена с помощью поворота на угол π вокруг точки $(-1; 0)$ из отрезка $Q_{-3} = \{(x, y) : x = -3, 0 \leq y \leq 2\}$ и дуги MN окружности с

центром в точке $(-3; 0)$ и радиусом 2, соединяющей точки $M(-5; 0)$ и $N(-3; 2)$.

Продолжая указанным выше образом процесс построения линии переключения, мы в итоге получим следующий результат. Линией переключения, с управления $u = -1$ на управление $u = +1$ будет ломаная непрерывная кривая, составленная из отрезков $Q_{2k-1} = \{(x, y) : x = 2k - 1, -2 \leq y \leq 0\}$ и дуг окружностей с центрами в точках $(2k - 1; 0)$ и радиусом 2, соединяющих точки $(2k - 1; -2)$ и $(2k + 1; 0)$, $k = 1, 2, \dots$. Линией переключения с управления $u = +1$ на управление $u = -1$ будет ломаная непрерывная кривая, составленная из отрезков $Q_{-2k+1} = \{(x, y) : x = -2k + 1, 0 \leq y \leq 2\}$ и дуг окружностей с центрами в точках $(-2k + 1; 0)$ и радиусом 2, соединяющих точки $(-2k + 1; 2)$ и $(-2k - 1; 0)$, $k = 1, 2, \dots$.

Дополнительный теоретический материал и задачи можно найти в литературе [21, 22], а также [5, 14].

6.2. Контрольные задания

1. Найти область управляемости и осуществить синтез оптимальных управлений в задаче о быстрейшем попадании в начало координат для линейной системы $\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = u(t)$, где $-1 \leq u(t) \leq +1$, в следующих случаях:

- (a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; (b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$; (c) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$;
 (d) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$; (e) $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$; (f) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$;
 (g) $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \operatorname{Re} \lambda_2 > 0$.

Здесь λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2h\lambda + k = 0$.

2. Оптимальное управление гармоническим осциллятором с помощью двух независимых управлений.

Рассмотрим вращающийся космический летательный аппарат с единственной осью симметрии (рис. 6.4).

Пусть $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ — угловые скорости (в рад/сек) относительно трех основных осей тела; I_1, I_2, I_3 — моменты инерции относительно тех же осей; D_1, D_2, D_3 — реактивные двигатели, которые жестко прикреплены к аппарату и могут развивать тягу в обоих направлениях; сила тяги этих двигателей ограничена по величине.

Требуется найти оптимальный закон управления тягой двигателей D_1 и D_2 так, чтобы при постоянной скорости $x_3(t)$ скорости $x_1(t)$ и $x_2(t)$ сделать равными нулю за наименьшее время. Осуществить синтез оптимальных управлений.

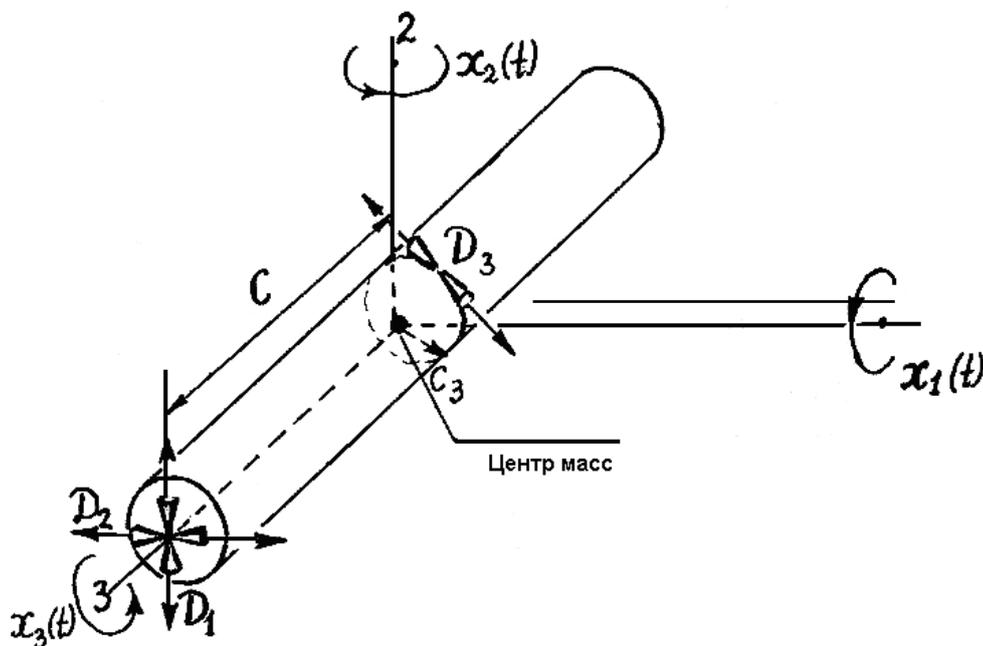


Рис.6.4. – Модель вращающегося космического летательного аппарата с единственной осью симметрии.

3. Оптимальное управление демпфированным гармоническим осциллятором с помощью двух независимых управлений.

Найти оптимальный по быстродействию закон управления в начало координат для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + u_1(t), \\ \dot{y} = -x - y + u_2(t). \end{cases}$$

$|u_1(t)| \leq 1, |u_2(t)| \leq 1$. Осуществить синтез оптимальных управлений.

4. Для линейной системы второго порядка с двумя независимыми управляющими воздействиями найти оптимальный по быстродействию закон управления в начало координат и решить задачу синтеза:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, |u_1(t)| \leq 1, |u_2(t)| \leq 2$$

$$(a) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; (b) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (d) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(e) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Оптимальное управление объектом третьего порядка. Для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ay - au(t) \\ \dot{y} = au(t) \\ \dot{z} = -az + au(t) \end{cases},$$

где $|u(t)| \leq 1$, найти управление, переводящее систему в начало координат за наименьшее время. Решить задачу синтеза.

6. Решить задачу о быстрейшем попадании по траекториям системы $\ddot{x} = u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, на: (а) отрезок $[-1, +1]$ оси OX ; (б) на отрезок $[-1, +1]$ оси OY .

7. Найти управление, переводящее систему $\ddot{x} = u(t)$, $|u(t)| \leq 1$ из начального состояния на квадратную окрестность начала координат $|x| \leq a$, $|\dot{x}| \leq a$? за наименьшее время. Решить задачу синтеза.

8. Решить задачу, аналогичную задаче 7, если уравнение управляемой системы имеет вид $\ddot{x} + x = u(t)$.

9. Решить задачу, аналогичную задаче 7, для круглой окрестности начала координат $x_1^2 + x_2^2 \leq R$ в двух случаях: (а) $R > 1$; (б) $R < 1$.

10. Рассмотрим одномерное управляемое движение (например, движение поезда) под действием ограниченной по величине силы тяги $u(t)$. Считая, что затраты энергии за время T пропорциональны $\int_0^T |u| dt$, найти оптимальное управление, переводящее систему из начального состояния в начало координат таким образом, чтобы линейная комбинация времени перехода и энергетических затрат была бы минимальной. При решении задачи неровностью пути и сопротивлением пренебречь.

11. Решить задачу 9, считая, что энергетические затраты пропорциональны $\int_0^T (t)dt$, с учетом сопротивления воздуха. Найти особый режим.

12. Решить задачу 9, считая, что энергетические затраты пропорциональны $\int_0^T \dot{x}(t)u(t)dt$, с учетом сопротивления воздуха. Найти особый режим.

13. Решить задачу об оптимальном управлении одномерной системой $\dot{x} = ax + u(t)$ в начало координат, минимизирующем квадратичный функционал $\int_0^T u^2(t)dt$.

14. Задача об оптимальном управлении тягой ракеты. Пусть газы из сопла ракеты вылетают с постоянной скоростью C . Сопло подвешено на оси, и направление выброса газов можно регулировать. В предположениях, что движение ракеты является плоским, происходит в безвоздушном пространстве и вектор ускорения свободного падения g является постоянным, найти оптимальное управление тягой ракеты $(\alpha(t); u(t))$, $0 \leq u(t) \leq A$, максимизирующее: а) дальность полета ракеты; б) высоту подъема ракеты. Здесь $\alpha(t)$ – угол между горизонтом и прямой, вдоль которой происходит выброс газов в момент времени t .

15. Задача о мягкой посадке при минимальном расходе горючего. Посадить космический корабль на планету с нулевой скоростью, используя минимальное количество горючего. Управлением является сила тяги двигателя $u(t)$, $0 \leq u(t) \leq A$. Гравитационное ускорение вблизи планеты считаем постоянным.

16. Решить задачу 14 с учетом сопротивления. Найти особый режим управления.

Литература

1. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978.
2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.
3. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1979.
4. Арис Р. Дискретное динамическое программирование. – М.: Мир, 1969.
5. Сборник задач по математике для втузов. Часть 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1990.
6. Чжун К. Однородные цепи Маркова. – М.: «Мир», 1964.
7. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы. – М.: Советское радио, 1964.
8. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Физматлит, 2000.
9. Измайлов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2003.
10. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М., Мир, 1982.
11. Галлеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. Учебное пособие. – М.: Элиториал УРСС, 2000.
12. Методические указания (сборник задач) для самостоятельной работы студентов. / Сост. Коротченко А.Г. – Н. Новгород: ННГУ, 1991.
13. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н.Новгород: ННГУ, 2007.
14. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984.
15. Васильев О.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Физматлит, 1999.
16. Оптимизация функций и динамических процессов. / Сост. Городецкий С.Ю., Павлюченок З.Г., Савельев В.П. – Н.Новгород: ННГУ, 2001.
17. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
18. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985.
19. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы). – М.: Наука, 1978.
20. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1973.
21. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: МГТУ им. Баумана, 1999.
22. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Авторы:

Руслан Сергеевич Бирюков
Станислав Юрьевич Городецкий
Светлана Анатольевна Григорьева и др.

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. Уч.-изд. л. .
Заказ № . Тираж 300 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 4.05.01