

**Задание № 2****Задача 1**

Сколько существует прямоугольников с целочисленными сторонами, площадь которых равна 2022. Укажите длины сторон этих прямоугольников.

**Решение**

Разложим сначала число 2022 на простые множители. Так как 2022 – число четное и сумма его цифр равна 6, а 6 делится на 3, то 2022 делится на 2 и на 3. Таким образом, получаем,  $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ . Покажет теперь, что число 337 является простым. Так как  $18^2 < 337 < 19^2$ , то, для того, чтобы доказать, что число 337 является простым, достаточно показать, что оно не делится ни на одно из простых чисел, меньших 18. Этими простыми числами являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Число 337 не делится на 2 и на 5, так как последняя цифра 7 на 2 и на 5 не делится. Сумма цифр числа 337 равна 13, 13 не делится на 3, значит, 337 на 3 не делится. Разность сумм цифр числа 337, стоящих на нечетных и четных местах,  $(7+3) - 3 = 7$  не делится на 11, значит, и число 337 на 11 не делится. Делимость на остальные простые числа проверяем непосредственным делением:  $337 = 7 \cdot 48 + 1$ ,  $337 = 13 \cdot 25 + 12$ ,  $337 = 17 \cdot 19 + 14$ . Таким образом, число 337 является простым. Так как 2022 представимо в виде произведения трех различных простых чисел, то 2022 имеет 8 натуральных делителей и в виде произведения двух множителей число 2022 можно представить четырьмя различными способами:  $2022 = 1 \cdot 2022 = 2 \cdot 1011 = 3 \cdot 674 = 6 \cdot 337$ . Следовательно, существует всего восемь прямоугольников с целочисленными сторонами, площадь которых равна 2022. Это прямоугольники со сторонами 1 и 2022, 2022 и 1, 2 и 1011, 1011 и 2, 3 и 674, 674 и 3, 6 и 337, 337 и 6. (Если не различать прямоугольники с равными измерениями, то четыре прямоугольника.)

**Ответ.** 1 и 2022, 2022 и 1, 2 и 1011, 1011 и 2, 3 и 674, 674 и 3, 6 и 337, 337 и 6.

## Задача 2

Вычислить без использования микрокалькулятора наиболее рациональным способом

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{2}{2017 \cdot 2019} + \frac{2}{2019 \cdot 2021}.$$

### Решение

Заметим, что знаменатель каждой дроби представляет собой произведение двух множителей, в котором второй множитель на 2 больше первого. А в числителе каждой дроби стоит 2. Для вычисления суммы наиболее рациональным способом представим числитель каждой дроби как разность большего и меньшего множителей, стоящих в знаменателе этой дроби. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{2}{2017 \cdot 2019} + \frac{2}{2019 \cdot 2021} = \frac{3-1}{1 \cdot 3} + \frac{5-3}{3 \cdot 5} + \frac{7-5}{5 \cdot 7} + \frac{9-7}{7 \cdot 9} + \\ & + \frac{11-9}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{2019-2017}{2017 \cdot 2019} + \frac{2021-2019}{2019 \cdot 2021} = \frac{3}{1 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 5} - \frac{3}{3 \cdot 5} + \frac{7}{5 \cdot 7} - \frac{5}{5 \cdot 7} + \frac{9}{7 \cdot 9} - \frac{7}{7 \cdot 9} + \\ & + \frac{11}{9 \cdot 11} - \frac{9}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{2019}{2017 \cdot 2019} - \frac{2017}{2017 \cdot 2019} + \frac{2021}{2019 \cdot 2021} - \frac{2019}{2019 \cdot 2021} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \\ & + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}, \end{aligned}$$

Так как в получившемся выражении за каждым слагаемым со знаком минус стоит точно такое же слагаемое со знаком плюс, сумма которых равна 0 и остаются только первое и последнее слагаемые.

**Ответ.**  $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{2}{2017 \cdot 2019} + \frac{2}{2019 \cdot 2021} = \frac{2020}{2021}.$

### Задача 3

Расстояние между двумя городами по железной дороге на 70 км больше, чем по шоссе. Электричка проходит это расстояние за 3 ч, а автобус – за 3 ч 24 мин. Найдите скорость автобуса и электрички, если скорость электрички на 30 км/ч больше скорости автобуса.

#### Решение

Пусть скорость автобуса  $x$  км/ч, тогда скорость электрички  $(x + 30)$  км/ч. 3 ч 24 мин = 3,4 ч. Расстояние между городами по шоссе равно  $3,4x$  км, а по железной дороге –  $3 \cdot (x + 30)$  км, что по условию задачи на 70 км больше, чем по шоссе. Получаем уравнение:

$$3 \cdot (x + 30) - 3,4x = 70;$$

$$3x + 90 - 3,4x = 70;$$

$$-0,4x = 70 - 90;$$

$$-0,4x = -20;$$

$$x = 50.$$

Таким образом, скорость автобуса равна 50 км/ч, тогда скорость электрички –  $50 + 30 = 80$  (км/ч).

**Ответ.** Скорость автобуса 50 км/ч, а скорость электрички 80 км/ч.

### Задача 4

В хозяйстве собрали картофеля, капусты и свеклы 255 ц. Масса капусты составляет 30% массы картофеля, а свеклы собрали в 2,5 раза меньше, чем картофеля. Сколько картофеля, капусты и свеклы собрали в отдельности?

#### Решение

Пусть в хозяйстве собрали  $x$  ц свеклы, тогда картофеля собрали  $2,5x$  ц, а капусты –  $0,3 \cdot 2,5x = 0,75x$  (ц). Всего в хозяйстве собрали  $(x + 2,5x + 0,75x)$  ц овощей или 255 ц. Получаем уравнение:

$$x + 2,5x + 0,75x = 255;$$

$$4,25x = 255;$$

$$x = \frac{255}{4,25};$$

$$x = 60.$$

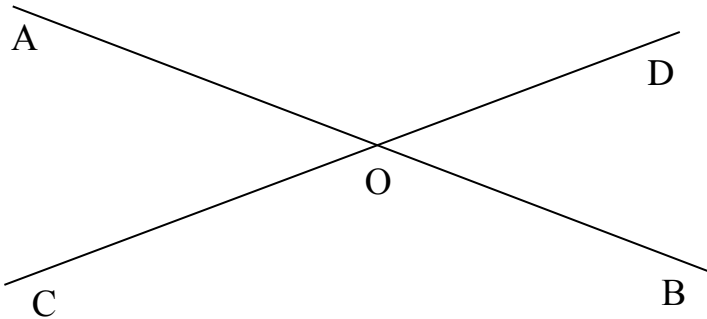
Таким образом, свеклы собрали 60 ц, тогда картофеля –  $2,5 \cdot 60 = 150$  (ц), а капусты –  $0,75 \cdot 60 = 45$  (ц).

**Ответ.** Свеклы собрали 60 ц, картофеля – 150 ц, капусты – 45 ц.

### Задача 5

Сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, равна  $276^\circ$ . Найдите величины каждого из углов, образованных при пересечении этих прямых.

#### Решение



Любые два из образованных четырех углов являются смежными или вертикальными. Так как  $\angle AOC$  и  $\angle AOD$  смежные,  $\angle BOC$  и  $\angle BOD$  смежные, а сумма смежных углов равна  $180^\circ$ , то

$$\angle AOC + \angle AOD = 180^\circ \quad \text{и} \quad \angle BOC + \angle BOD = 180^\circ, \quad \text{следовательно,}$$

$$\angle AOC + \angle AOD + \angle BOC + \angle BOD = 360^\circ. \quad \text{Пусть } \angle AOC + \angle AOD + \angle BOC = 276^\circ,$$

$$\text{тогда} \quad \angle BOD = 360^\circ - (\angle AOC + \angle AOD + \angle BOC) = 360^\circ - 276^\circ = 84^\circ,$$

$$\text{следовательно, } \angle BOC = 180^\circ - \angle BOD = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ. \quad \text{Так как } \angle AOC \text{ и } \angle BOD$$

вертикальные,  $\angle BOC$  и  $\angle AOD$  вертикальные, то, в силу равенства вертикальных

$$\text{углов, } \angle AOC = \angle BOD = 84^\circ, \quad \angle AOD = \angle BOC = 96^\circ.$$

**Ответ.**  $\angle AOC = \angle BOD = 84^\circ$ ,  $\angle AOD = \angle BOC = 96^\circ$ .