Решения задания № 3

Задача 1

Имеется три кучки камней: в первой –10 камней, во второй –15, в третьей – 20. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход разрешается разбить любую кучку камней на две меньшие, ходы Петя и Вася делают по очереди, проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кому делать первый ход, определяют жребием. Кто в игре победит: игрок, который начинает игру или второй. Ответ обосновать.

Решение

Всего в трех кучках $10 + 15 + 20 = 45$ камней. Ход нельзя будет сделать тогда, когда после предыдущего хода в каждой кучке будет ровно по одному камню, то есть получится ровно 45 кучек камней. За каждый ход количество кучек с камнями увеличивается на одну.

Так как в начале игры три кучки с камнями, после последнего возможного хода количество кучек увеличится до 45, а каждый следующий ход увеличивает количество кучек с камнями на одну по сравнению с предыдущим ходом, то всего возможно выполнить 42 хода.

Тот игрок, который начинает игру, выполняет ходы с нечетными номерами, а второй игрок выполняет ходы с четными номерами. Так как количество возможных ходов – 42, то есть четное число, то последний ход выполнит второй игрок, а поэтому победит в игре второй игрок.

Ответ. Второй игрок.

Задача 2

Восстановите в примере отсутствующие цифры, отмеченные звездочками:

$$\begin{array}{r} \times\; *2* \\ *7 \\ \hline +\; *2*8 \\ *6** \\ \hline **\,*** \end{array}$$

Решение

Определим сначала последнюю цифру первого множителя. Так как при умножении первого множителя на 7 произведение оканчивается на 8, то последней цифрой первого множителя может быть только цифра 4. Так как в разряде сотен произведения первого множителя на 7 должна получиться цифра 2, а произведение 24 на 7 равно 168, то есть в разряд сотен переходит 1, то произведение первой цифры первого числа на 7 должно оканчиваться на 1. Так как только произведение 3 на 7 оканчивается на 1, то первая цифра первого множителя равна 3. Таким образом, первый множитель – 324, а произведение 324 на 7 равно 2268.

Определим теперь первую цифру второго множителя. Так как при умножении первой цифры второго множителя на первый множитель получается четырехзначное число, то эта цифра не меньше 4 ($324 \cdot 3 = 972$ – трехзначное число). Первой цифрой второго множителя не может быть 4, так как в произведении первого множителя на 4 в разряде сотен стоит цифра 2, а должна быть цифра 6. При умножении первого множителя на 6 в разряде сотен получим 8+1=9; на 7 – 1+1=2; на 8 – 4+1=5; на 9 – 7+2=9. Таким образом, при умножении первого множителя на цифру 4 и цифры от 6 до 9 в разряде сотен цифра 6 не получается. Осталась только цифра 5. Произведение 324 на 5 равно 1620, в разряде сотен получили цифру 6, следовательно, первая цифра второго множителя равна 5, а второй множитель – 57. Теперь в примере восстанавливаются все отсутствующие цифры, отмеченные звездочками:

$$\begin{array}{r} \times\, 324 \\ 57 \\ \hline +\, 2268 \\ 1620 \\ \hline 18468 \end{array}$$

Ответ. $\begin{array}{r} \times\, 324 \\ 57 \\ \hline +\, 2268 \\ 1620 \\ \hline 18468 \end{array}$

Задача 3

Отец сказал сыну: «11 лет тому назад я был в 18 раз старше тебя, а через 4 года я буду только в 3 раза старше тебя». Сколько лет теперь отцу и сколько сыну?

Решение

Пусть 11 лет назад сыну было x лет, тогда отцу 11 лет назад было $18x$ лет, так как отец тогда был в 18 раз старше сына. В настоящее время сыну $(x+11)$ лет, а отцу – $(18x+11)$ лет. Через 4 года сыну станет $(x+15)$ лет, а отцу – $(18x+15)$ лет или $3(x+15)$ лет, так как отец станет в три раза старше сына. Получаем уравнение: $18x+15=3(x+15)$. Решим полученное уравнение.

$$18x + 15 = 3(x + 15),$$
$$18x + 15 = 3x + 45,$$
$$18x - 3x = 45 - 15,$$

$$15x = 30,$$
$$x = 2.$$

В настоящее время сыну $x+11=2+11=13$ (лет), а отцу – $18x+11=18\cdot 2+11=47$ (лет).

Ответ. Сыну 13 лет, а отцу 47 лет.

Задача 4

Докажите, что число $987^{423}+423^{987}$ делится на 47 и найдите наибольшую степень числа 47, на которую делится это число.

Решение

Разложим 987 и 423 на простые множители: $987=3\cdot 7\cdot 47$, $423=3^2\cdot 47$. Тогда $987^{423}+423^{987}=3^{423}\cdot 47^{423}\cdot(7^{423}+3^{1551}\cdot 47^{564})$. Таким образом, число $987^{423}+423^{987}$ мы представили в виде произведения, один из множителей которого делится на 47, следовательно, все произведение, то есть $987^{423}+423^{987}$, делится на 47.

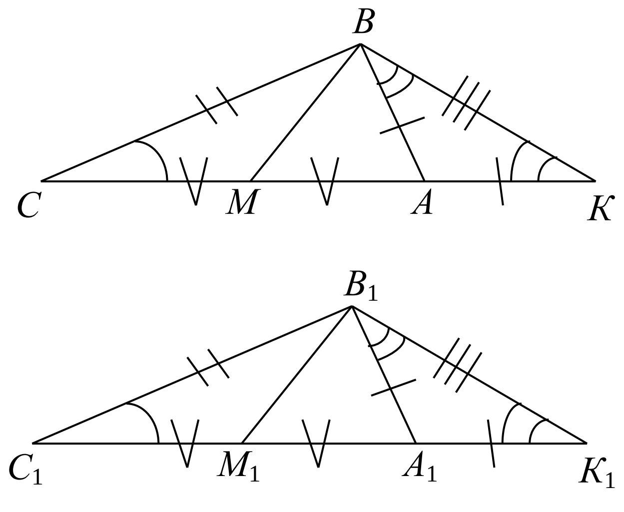
Определим теперь наибольшую степень числа 47, на которую делится $987^{423}+423^{987}$. Так как 3 и 47 взаимно просты, то 3^{423} на 47 не делится, $3^{1551}\cdot 47^{564}$ делится на 47, а 7^{423} на 47 не делится в силу взаимной простоты чисел 7 и 47, следовательно, $7^{423}+3^{1551}\cdot 47^{564}$ на 47 не делится. Таким образом, $3^{423}\cdot 47^{423}\cdot(7^{423}+3^{1551}\cdot 47^{564})$ делится на 47^{423} и не делится на 47^{424}, то есть 423 – наибольшая степень числа 47, на которую делится число $987^{423}+423^{987}$.

Ответ. 423.

Задача 5

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AB + AC = A_1B_1 + A_1C_1$, BM и B_1M_1 – медианы этих треугольников. Докажите, что $BM = B_1M_1$.

Решение



В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за точку A отложим отрезок AK так, что $AK = AB$.

В треугольнике $A_1B_1C_1$ на продолжении стороны A_1C_1 за точку A_1 отложим отрезок A_1K_1 так, что $A_1K_1 = A_1B_1$.

Рассмотрим ΔBCK и $\Delta B_1C_1K_1$.

$BC = B_1C_1$ по условию;
$\angle C = \angle C_1$ по условию;
$CK = CA + AK = CA + AB = C_1A_1 + A_1B_1 = = C_1A_1 + A_1K_1 = C_1K_1$ по условию и построению. Значит, $\Delta BCK = \Delta B_1C_1K_1$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $BK = B_1K_1$, $\angle K = \angle K_1$.

В треугольнике ABK $AK = AB$ по построению, значит, ΔABK – равнобедренный по определению, следовательно, $\angle K = \angle KBA$ по свойству равнобедренного треугольника.

Аналогично, в треугольнике $A_1B_1K_1$ $A_1K_1 = A_1B_1$ по построению, значит, $\Delta A_1B_1K_1$ – равнобедренный по определению, следовательно, $\angle K_1 = \angle K_1B_1A_1$ по свойству равнобедренного треугольника.

Так как $\angle K = \angle K_1$, $\angle K = \angle KBA$ и $\angle K_1 = \angle K_1B_1A_1$ то $\angle KBA = \angle K_1B_1A_1$.

Рассмотрим ΔBAK и $\Delta B_1A_1K_1$. $BK = B_1K_1$, $\angle K = \angle K_1$, $\angle KBA = \angle K_1B_1A_1$ по доказанному, значит, $\Delta BAK = \Delta B_1A_1K_1$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно, $AB = A_1B_1$.

Так как $AB = A_1B_1$ и $AB + AC = A_1B_1 + A_1C_1$, то $AC = A_1C_1$. Так как по условию BM – медиана треугольника ABC, то M – середина стороны AC, значит, $CM = MA = \frac{1}{2}AC$. Аналогично, $C_1M_1 = M_1A_1 = \frac{1}{2}A_1C_1$, так как B_1M_1 – медиана треугольника $A_1B_1C_1$, следовательно, в силу того, что $AC = A_1C_1$, $MC = M_1C_1$.

Рассмотрим ΔBCM и $\Delta B_1C_1M_1$. $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ по условию, $MC = M_1C_1$ по доказанному, значит, $\Delta BCM = \Delta B_1C_1M_1$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $BM = B_1M_1$, **что и требовалось доказать.**