Задание № 1

Задача 1

Найдите остаток от деления 13^{2021} на 10.

Решение

Любое натуральное число можно представить в виде $10 \cdot k + a_0$, где k – число натуральное или ноль, а a_0 – последняя цифра этого числа. Так как $10 \cdot k$ делится на 10, а $0 \le a_0 \le 9$, то остаток от деления натурального числа на 10 совпадает с его последней цифрой. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению последней цифры числа 13^{2021}. $13^0=1$, $13^1=13$, $13^2=169$, $13^3= 2197$, $13^4=28561$. Далее последние цифры числа будут повторяться. Следовательно, степени числа 13 могут своей последней цифрой иметь 1, 3, 9 или 7; причем последняя цифра степени числа 13 зависит от того, какой остаток от деления на 4 имеет показатель степени. Если показатель степени делится на 4, то степень числа 13 оканчивается на 1; если показатель степени при делении на 4 имеет остаток 1, то степень числа 13 оканчивается на 3; если показатель степени при делении на 4 имеет остаток 2, то степень числа 13 оканчивается на 9; если показатель степени при делении на 4 имеет остаток 3, то степень числа 13 оканчивается на 7. $2021=4 \cdot 505 + 1$, то есть, 2021 при делении на 4 имеет остаток 1, значит, последняя цифра числа 13^{2021} равна 3, следовательно, остаток от деления числа 13^{2021} на 10 равен 3.

Ответ. 3.

Задача 2

Найдите все целые значения x, при которых значение выражения $3x^6 + 4x^4 - x + 2$ равно простому числу.

Решение

$4x^4 - x \geq 0$, так как при целых значения x $x^4 \geq x$, следовательно, $4x^4 \geq x^4 \geq x$.

При $x = 0$ $3x^6 + 4x^4 - x + 2 = 2$ – число простое.

Если $x \neq 0$, то $3x^6 + 4x^4 - x + 2 \geq 5$, так как $x^6 \geq 1$. Если x число четное, то $3x^6 + 4x^4 - x + 2$ также число четное, как сумма четных чисел, и больше 2, следовательно, составное. Если x число нечетное, то x^6 также число нечетное, а поэтому и $3x^6$ – число нечетное как произведение двух нечетных чисел, следовательно, $3x^6 + 4x^4 - x + 2$ – число четное как сумма двух четных и двух нечетных чисел, и больше 2, значит, число составное.

Ответ. x=0.

Задача 3

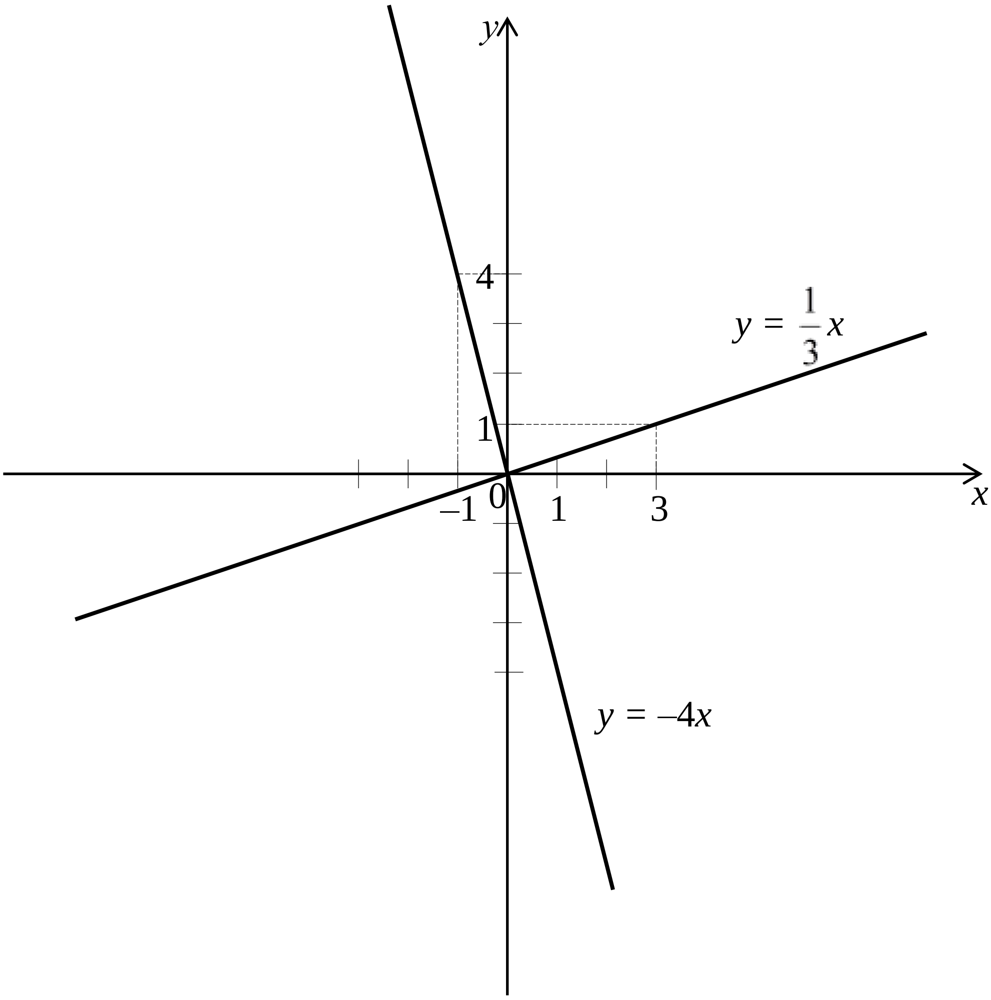
На координатной плоскости постройте множество точек, удовлетворяющих уравнению $3y^2 + 11xy - 4x^2 = 0$.

Решение

$$3y^2 + 11xy - 4x^2 = 3y^2 - xy + 12xy - 4x^2 = y(3y - x) + 4x(3y - x) = (3y - x)(y + 4x).$$

Уравнению $(3y - x)(y + 4x) = 0$ удовлетворяют координаты тех и только тех точек координатной плоскости, которые принадлежат прямой $y = -4x$ или прямой $y = \frac{1}{3}x$.

Ответ.



Задача 4

Платье дороже блузки на 70% и дешевле пиджака на 32%. На сколько процентов блузка дешевле пиджака?

Решение

Пусть блузка стоит x рублей, тогда платье стоит $1{,}7x$ рублей. Пусть пиджак стоит y рублей, тогда платье стоит $0{,}68y$ рублей. Получили, что $1{,}7x=0{,}68y$, откуда $x = \frac{0{,}68}{1{,}7}y = \frac{6{,}8}{17}y = 0{,}4y$. Значит, блузка дешевле пиджака на 60%.

Ответ. На 60%.

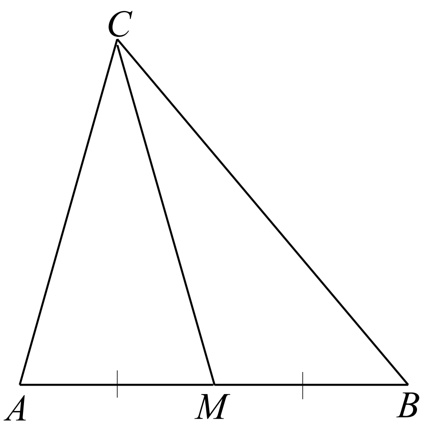
Задача 5

Медиана треугольника больше половины стороны этого треугольника, к которой она проведена. Докажите, что эта медиана проведена из острого угла треугольника.

Решение

Пусть CM – медиана треугольника ΔABC, M – середина стороны AB, тогда по условию задачи $AM = BM < CM$. Докажем, что $\angle ACB$ – острый.

По теореме о сумме углов треугольника в ΔABC $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$.



Рассмотрим ΔAMC. Так как $AM < CM$, то в силу неравенства треугольника $\angle ACM < \angle A$ (в треугольнике против большей стороны лежит больший угол).

Аналогично, из ΔBMC и условия $BM < CM$ получаем, что $\angle BCM < \angle B$.

Сложим неравенства $\angle ACM < \angle A$ и $\angle BCM < \angle B$, получим, что

$$\angle ACB = \angle ACM + \angle MCB < \angle A + \angle B.$$

Так как $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$ и $\angle ACB < \angle A + \angle B$, то $2\angle ACB < \angle A + \angle B + \angle ACB = = 180°$, то есть $2\angle ACB < 180°$, $\angle ACB < 90°$, значит, $\angle ACB$ – острый, что и требовалось доказать.