Задание № 2

Задача 1

Запишите все целые делители числа, равного сумме натуральных делителей числа 2022.

Решение

Найдем количество натуральных делителей числа 2022. Для этого разложим число 2022 на простые множители.

$$\begin{array}{r|l} 2022 & 2 \\ 1011 & 3 \\ 337 & 337 \\ 1 & \end{array}$$

Покажем теперь, что число 337 является простым. Так как $18^2 < 337 < 19^2$, то, для того, чтобы доказать, что число 337 является простым, достаточно показать, что оно не делится ни на одно из простых чисел, меньших 18. Этими простыми числами являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Число 337 не делится на 2 и на 5, так как последняя цифра 7 на 2 и на 5 не делится. Сумма цифр числа 337 равна 13, 13 не делится на 3, значит, 337 на 3 не делится. Разность сумм цифр числа 337, стоящих на нечетных и четных местах, $(7+3) - 3 = 7$ не делится на 11, значит, и число 337 на 11 не делится. Делимость на остальные простые числа проверяем непосредственным делением: $337=7\cdot 48+1$, $337=13\cdot 25+12$, $337=17\cdot 19+14$. Таким образом, число 337 является простым.

Получили, что $2022 = 2\cdot 3\cdot 337$. Тогда количество натуральных делителей числа 2022 равно $(1 + 1)\cdot(1 +1)\cdot(1 + 1) = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$. Выпишем все натуральные делители числа 2022: 1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022 и найдем их сумму $1 + 2 + 3 + 6 + 337 + 674 + 1011 + 2022 = 4056$.

Разложим число 4056 на простые множители.

$$\begin{array}{r|l} 4056 & 2 \\ 2028 & 2 \\ 1014 & 2 \\ 507 & 3 \\ 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Получили, что $4056 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13^2$. Тогда количество натуральных делителей числа 4056 равно $(3 + 1)\cdot(1 +1)\cdot(2 + 1) = 4\cdot2\cdot3 = 24$, а количество целых делителей 4056 в два раза больше, то есть у числа 4056 48 целых делителей. Выпишем все целые делители числа 4056: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±13, ±24, ±26, ±39, ±52, ±78, ±104, ±156, ±169, ±312, ±338, ±507, ±676, ±1014, ±1352, ±2028, ±4056.

Ответ. ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±13, ±24, ±26, ±39, ±52, ±78, ±104, ±156, ±169, ±312, ±338, ±507, ±676, ±1014, ±1352, ±2028, ±4056.

Задача 2

Вычислите $a^3 + 2a^2 + \frac{8}{a^2} + \frac{8}{a^3}$, если $a + \frac{2}{a} = -4$.

Решение

Так как по условию $a + \frac{2}{a} = -4$**,** то, возведя обе части равенства в квадрат, получим: $\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 = (-4)^2$**,** $a^2 + 4 + \frac{4}{a^2} = 16$, откуда $a^2 + \frac{4}{a^2} = 16 - 4 = 12$. Возведем теперь обе части равенства $a + \frac{2}{a} = -4$ в куб, получим $\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 = (-4)^3$, $a^3 + 6a + \frac{12}{a} + \frac{8}{a^3} = -64$, откуда, учитывая, что $a + \frac{2}{a} = -4$, получим

$a^3+\dfrac{8}{a^3}=-64-\left(6a+\dfrac{12}{a}\right)=-64-6\cdot\left(a+\dfrac{2}{a}\right)=-64-6\cdot(-4)=-64+24=-40$. Тогда $a^3+2a^2+\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{8}{a^3}=\left(a^3+\dfrac{8}{a^3}\right)+2\cdot\left(a^2+\dfrac{4}{a^2}\right)=-40+2\cdot 12=-40+24=-16$.

Ответ. $a^3+2a^2+\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{8}{a^3}=-16$.

Задача 3

Решите уравнение $\left|\left|\left||3-2x|+1\right|-7\right|+2\right|=5$.

Решение

В силу определения модуля действительного числа модуль действительного числа неотрицателен, следовательно, $|3-2x|+1>0$ как сумма неотрицательного и положительного числа, значит, $\left||3-2x|+1\right|=|3-2x|+1$. Аналогично, $\left|\left||3-2x|+1\right|-7\right|+2>0$, значит, $\left|\left|\left||3-2x|+1\right|-7\right|+2\right|=\left|\left||3-2x|+1\right|-7\right|+2$. Тогда $\left|\left|\left||3-2x|+1\right|-7\right|+2\right|=\left||3-2x|+1-7\right|+2=\left||3-2x|-6\right|+2$ и уравнение принимает вид $\left||3-2x|-6\right|+2$=5 или $\left||3-2x|-6\right|=3$. Воспользуемся определением модуля:

$$\left||3-2x|-6\right|=3;$$

$$|3-2x|-6=3 \text{ или } |3-2x|-6=-3;$$

$$|3-2x|=9 \text{ или } |3-2x|=3;$$

$$3-2x=9 \text{ или } 3-2x=-9 \text{ или } 3-2x=3 \text{ или } 3-2x=-3;$$

$$2x=-6 \quad \text{или} \quad 2x=12 \quad \text{или} \quad 2x=0 \quad \text{или} \quad 2x=6;$$

$$x=-3 \quad \text{или} \quad x=6 \quad \text{или} \quad x=0 \quad \text{или} \quad x=3.$$

Ответ. $x=-3$, $x=6$, $x=0$, $x=3$.

Задача 4

Школьник выполнил задание заочной математической школы, в котором было 12 задач. За каждую правильно решенную задачу ему начисляли 7 баллов, за каждую решенную неверно задачу – снимали 3 баллов, а за те задачи, к которым он не приступал, – начисляли нуль баллов. Всего ученик получил 16 баллов. Ко скольким задачам школьник не приступал?

Решение

Пусть школьник верно решил x задач, а y задач решил не верно. Так как всего в задании было 12 задач, то $x + y \le 12$. Всего школьник получил 16 баллов за задание, следовательно, он точно верно решил хотя бы одну задачу, то есть $x > 0$, а в силу того, что 16 не делится на 7, точно есть хотя бы одна задача, которую школьник решил не верно, то есть $y > 0$. Тогда имеем:

$$7x = 16 + 3y.$$

$7x$ делится на 7, поэтому и $16 + 3y$ должно делиться на 7, а так как $16 + 3y = 14 + 2 + 3y$, то $2 + 3y$ делится на 7. Так как $x > 0$, $y > 0$ и $x + y \le 12$, то y может принимать значения от 1 до 11 включительно. Рассмотрим все возможные значения y:

при $y = 1$ $2 + 3y = 5$, но 5 не делится на 7, следовательно, $y \neq 1$;

при $y = 2$ $2 + 3y = 8$, но 8 не делится на 7, следовательно, $y \neq 2$;

при $y = 3$ $2 + 3y = 11$, но 11 не делится на 7, следовательно, $y \neq 3$;

при $y = 4$ $2 + 3y = 14$, 14 делится на 7. Если $y = 4$, то $7x = 28$, $x = 4$, $x + y = 4 + 4 = 8 < 12$, следовательно, школьник решал 8 задач из 12, а поэтому не приступал к решению $12 – 8 = 4$ задач;

при $y = 5$ $2 + 3y = 17$, но 17 не делится на 7, следовательно, $y \neq 5$;

при $y = 6$ $2 + 3y = 20$, но 20 не делится на 7, следовательно, $y \neq 6$;

при $y = 7$ $2 + 3y = 23$, но 23 не делится на 7, следовательно, $y \neq 7$;

при $y = 8$ $2 + 3y = 26$, но 26 не делится на 7, следовательно, $y \neq 8$;

при $y = 9$ $2 + 3y = 29$, но 29 не делится на 7, следовательно, $y \neq 9$;

при $y = 10$ $2 + 3y = 32$, но 32 не делится на 7, следовательно, $y \neq 10$;

при $y = 11$ $2 + 3y = 35$, 35 делится на 7. Если $y = 11$, то $7x = 49$, $x = 7$, $x + y = 7 + 11 = 18 > 12$, что противоречит условию $x + y \le 12$, следовательно, $y \ne 11$.

Таким образом, условию задачи удовлетворят только $y = 4$, значит, школьник верно решил 4 задачи из 12 задач в задании, не верно решил 4 задачи и не приступал к решению 4-х задач.

Ответ. К четырем задачам.

Задача 5

На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M – середина гипотенузы AB, H – точка пересечения прямых CM и DK.

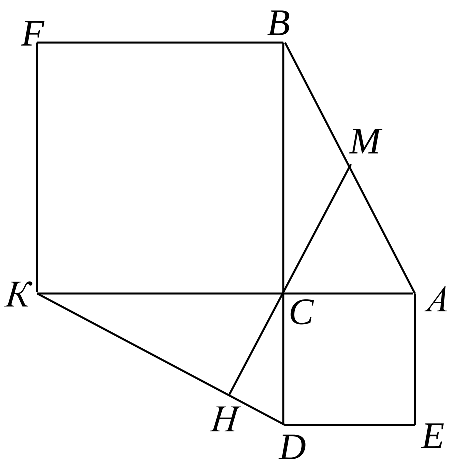
а) Докажите, что $CM \perp DK$.

b) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

Решение

а) Рассмотрим ΔABC и ΔDKC.

$BC = KC$ как стороны квадрата $BFKC$, $AC = DC$ как стороны квадрата $ACDE$. $\angle ACB + \angle BCK + \angle KCD + \angle DCA = 360°$, $\angle BCK = \angle DCA = 90°$ как углы квадратов, $\angle ACB = 90°$ по условию, следовательно, $\angle KCD = 360° - \angle BCA - \angle BCK - \angle DCA = 360° - - 90° - \ 90° - 90° = 90°$, то есть $\angle ACB = \angle KCD$. Значит, ΔDKC – прямоугольный и $\Delta ABC = \Delta DKC$ по двум катетам, следовательно, $\angle CBA = \angle CKD$, $\angle CAB = \angle CDK$.



Так как CM – медиана прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе, то по свойству прямоугольного треугольника $AM = BM = CM$, следовательно, треугольники

AMC и CMB – равнобедренные, значит, $\angle CBM = \angle BCM$, $\angle CAM = \angle ACM$ по свойству равнобедренного треугольника.

$\angle HCD = \angle BCM$ как вертикальные, $\angle CBM = \angle BCM$, следовательно, $\angle HCD = \angle CBM = \angle CBA$. Так как в ΔABC $\angle ACB = 90°$, то по свойству прямоугольного треугольника $\angle CBA + \angle CAB = 90°$, следовательно, $\angle HCD + \angle CDH = \angle CBA + \angle CAB = 90°$, значит, из ΔCDH в силу теоремы о сумме углов треугольника имеем: $\angle CHD = 180° – (\angle HCD + \angle CDH) = 180° – 90° = = 90°$. Так как $\angle CHD = 90°$, то $CH \perp KD$, то есть $CM \perp KD$, что и требовалось доказать.

b) $MH = CM + CH$.

Рассмотрим ΔABC, $\angle ACB = 90°$, $AC = 30$, $BC = 40$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 = 50^2$, значит, $AB = 50$. Тогда $CM = AM = \frac{1}{2}AB = 25$.

Так как $\Delta ABC = \Delta DKC$, то $CD = AC = 30$, $CK = BC = 40$, $KD = AB = 50$. $CH \perp KD$, значит, CH – высота ΔDKC. $\angle CHD = 90°$, следовательно, $S_{CKD} = \frac{1}{2}KC \cdot CD = \frac{1}{2}CH \cdot KD$, откуда $KC \cdot CD = CH \cdot KD$, следовательно, $CH = \frac{KC \cdot CD}{KD} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24$.

Тогда $MH = CM + CH = 25 + 24 = 49$.

Ответ. $MH = 49$.