Решение задания № 3.

Задача 1

Найдите наибольшее пятизначное число, которое при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 дает в остатке 1.

Решение

Обозначим искомое число A. Так как A при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 дает в остатке 1, то число A–1 без остатка делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Наименьшим числом, которое без остатка делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 является их наименьшее общее кратное (НОК). Так как числа 2, 3, 5 и 7 – простые, $4=2^2$, $6=2\cdot3$, $8=2^3$, $9=3^2$ то НОК$(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7=2520$, следовательно, A–1 кратно 2520. Так как по условию задачи A – наибольшее пятизначное число, удовлетворяющее заданному условию, а A–1 кратно 2520, то A–1 также является пятизначным числом. Найдем наибольшее пятизначное число, кратное 2520: $2520\cdot x<100000$, где x – наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству.

$$2520\cdot x < 100000;$$

$$x < \frac{100000}{2520};$$

$$x < \frac{2500}{63};$$

$$x < 39\frac{43}{63}.$$

Так как x – наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $x < 39\frac{43}{63}$, то $x = 39$. При $x = 39$ $A-1 = 2520\cdot39 = 98280$, следовательно, $A = 98281$.

Ответ. 98281.

Задача 2

Докажите, что число $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ является иррациональным.

Решение

Множество рациональных чисел является замкнутым относительно всех арифметических операций, то есть сумма, разность, произведение двух рациональных чисел, а при условии, что делитель отличен от нуля, частное двух рациональных чисел есть число рациональное.

Воспользуемся методом от противного. Предположим, что число $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ является рациональным. Тогда его квадрат также будет числом рациональным как произведение двух рациональных чисел.

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2 = 5+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}+7 = 12+2\cdot\sqrt{35}.$$

Обозначим, $A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2$. Так как по предположению A – число рациональное, то $\sqrt{35}=\dfrac{A-12}{2}$ – число рациональное.

Докажем, что $\sqrt{35}$ – число иррациональное. Пусть это не так, и $\sqrt{35}$ – число рациональное. Тогда по определению рационального числа $\sqrt{35}$ можно представить в виде $\sqrt{35}=\dfrac{m}{n}$, где m – число целое, n – число натуральное и дробь $\dfrac{m}{n}$ является несократимой. Тогда после возведения в квадрат получим

$$35=\frac{m^2}{n^2},$$

$$35\cdot n^2=m^2.$$

Так как число 35 кратно 5, то $35\cdot n^2$ кратно 5, следовательно, и равное ему число m^2 также кратно 5, но 5 число простое, значит, число m кратно 5, то есть m представимо в виде $m=5\cdot k$, где k – число целое. Тогда имеем

$$35\cdot n^2=(5\cdot k)^2,$$

$$35\cdot n^2=25\cdot k^2,$$

$$7\cdot n^2=5\cdot k^2.$$

Так как число $5 \cdot k^2$ кратно 5, следовательно, и равное ему число $7 \cdot n^2$ также кратно 5, откуда, в силу того, что 5 и 7 взаимно просты, следует, что n^2 кратно 5, а, значит, число n кратно 5, то есть n представимо в виде $n=5 \cdot l$ где l – число натуральное. Таким образом получили, что числа m и n кратны 5, что противоречит предположению о том, что дробь $\frac{m}{n}$ является несократимой. Значит, наше предположение не верно, и число $\sqrt{35}$ является иррациональным.

Так как $\sqrt{35}$ – число иррациональное, то получаем противоречие с ранее установленным результатом о том, что $\sqrt{35}$ – число рациональное. Значит, наше предположение не верно, и $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ является числом иррациональным, **что и требовалось доказать**.

__**Замечание.**__ Аналогично числу $\sqrt{35}$ можно было доказать, что числа $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ являются иррациональными, но из того, что числа $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ иррациональные не следует, что их сумма также является числом иррациональным. Например, числа $2+\sqrt{35}$ и $5-\sqrt{35}$ являются иррациональными как сумма и разность рационального и иррационального числа (если бы $B=2+\sqrt{35}$ было числом рациональным, то $\sqrt{35}=B-2$ тоже было бы числом рациональным как разность двух рациональным чисел, что противоречит доказанному утверждению, что $\sqrt{35}$ – число иррациональное, для второго числа аналогично; аналогично устанавливается, что сумма и разность любого рационального числа и любого иррационального числа всегда есть число иррациональное), а их сумма $\left(2+\sqrt{35}\right)+\left(5-\sqrt{35}\right)=7$ есть число рациональное (то есть сумма двух иррациональных чисел может оказаться числом рациональным).

Задача 3

Решите уравнение $x^4+6x^3-27x-10=0$.

Решение

В левой части уравнения прибавим и вычтем $9x^2$. Получим

$$x^4+6x^3+9x^2-9x^2-27x-10=0.$$

Далее в левой части уравнения сгруппируем первые три слагаемых и воспользуемся формулой сокращенного умножения, а также сгруппируем четвертое и пятое слагаемые и вынесем за скобку общий множитель. Получим

$$(x^4+6x^3+9x^2)-(9x^2+3x)-10=0,$$

$$(x^2+3x)^2-9\cdot(x^2+3x)-10=0.$$

После преобразований получили уравнение, которое сводится к квадратному с помощью замены переменной. Пусть $y=x^2+3x$. Тогда получим уравнение

$$y^2-9y-10=0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$D=(-9)^2-4\cdot1\cdot(-10)=81+40=121,$$

$$y_{1,2}=\frac{9\pm11}{2};\ y_1=10,\ y_2=-1.$$

Вернемся к замене. Получим

$$x^2+3x=10 \text{ или } x^2+3x=-1,$$

$$x^2+3x-10=0 \text{ или } x^2+3x+1=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm7}{2} \text{ или } x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ. –5, 2, $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

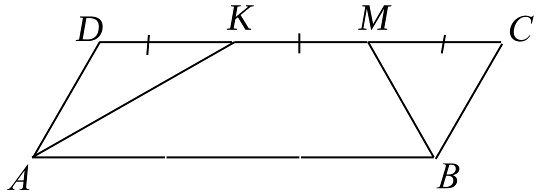
Задача 4

Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы его углов A и B пересекают сторону CD в точках K и M, причем $CK:KM:MD = 2:1:2$. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 112.

Решение

Условие задачи допускает четыре возможные конфигурации: точка пересечения биссектрис углов A и B соответственно лежит внутри параллелограмма или вне параллелограмма, а также биссектрисой угла A может быть AK, а биссектрисой угла B – BM или биссектрисой угла A является AM, а биссектрисой угла B – BK.

1 случай. Биссектрисы AK и BM пересекаются вне параллелограмма. Тогда, так как в силу условия задачи $CK:KM:MD = 2:1:2$, то $CK = MD = 2x$, $KM = x$, следовательно, $CM = CK – KM = 2x – x = x$, $DK = DM – KM = 2x – x = x$, то есть $DK = KM = MC$.



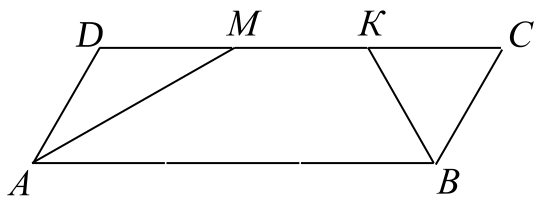
Так как AK – биссектриса $\angle BAD$, то $\angle BAK = \angle KAD$.

$\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых AB и DC секущей AK.

Из равенства углов $\angle BAK = \angle KAD$ и $\angle AKD = \angle KAB$ следует, что $\angle KAD = \angle AKD$, значит, ΔAKD – равнобедренный (по признаку), следовательно, $AD = KD = x$.

Тогда $AD = CB = KD = x$, $DC = AB = 3DK = 3x$. Тогда периметр параллелограмма $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(x + 3x) = 8x$. В силу условия задачи $P_{ABCD} = 112$, следовательно, $8x = 112$, $x = 14$. Значит, $AD = CB = 14$, $DC = AB = 3\cdot 14 = 42$.

2 случай. Биссектрисы AM и BK пересекаются вне параллелограмма. Тогда, так как в силу условия задачи $CK:KM:MD = 2:1:2$, то $CK = MD = 2x$, $KM = x$.



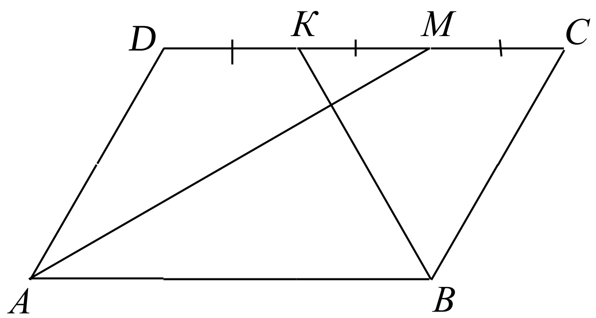
Так как AM – биссектриса $\angle BAD$, то $\angle BAM = \angle MAD$.

$\angle AMD = \angle MAB$ как накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых AB и DC секущей AM.

Из равенства углов $\angle BAM = \angle MAD$ и $\angle AMD = \angle MAB$ следует, что $\angle MAD = \angle AMD$, значит, ΔAMD – равнобедренный (по признаку), следовательно, $AD = MD = 2x$.

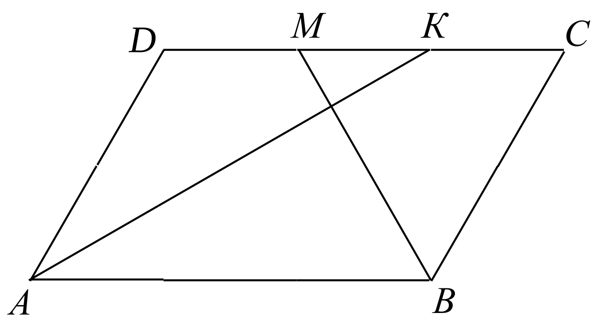
Тогда $AD = CB = MD = 2x$, $DC = AB = DM + MK + KC = 2x + x + 2x = 5x$. Тогда периметр параллелограмма $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(5x + 2x) = 14x$. В силу условия задачи $P_{ABCD} = 112$, следовательно, $14x = 112$, $x = 8$. Значит, $AD = CB = 2 \cdot 8 = 16$, $DC = AB = 5 \cdot 8 = 40$.

3 случай. Биссектрисы AM и BK пересекаются внутри параллелограмма. Тогда, так как в силу условия задачи $CK{:}KM{:}MD = 2{:}1{:}2$, то $CK = MD = 2x$, $KM = x$, следовательно, $CM = CK – KM = 2x – x = x$, $DK = DM – KM = 2x – x = x$, то есть $DK = KM = MC$.



Аналогично второму случаю устанавливаем, что $AD = DM = 2x$.

Тогда $AD = CB = DM = 2x$, $AB = CD = 3DK = 3x$. Тогда периметр параллелограмма $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(3x + 2x) = 10x$. В силу условия задачи $P_{ABCD} = 112$, следовательно, $10x = 112$, $x = 11{,}2$. Значит, $AD = CB = 2 \cdot 11{,}2 = 22{,}4$; $AB = CD = 3 \cdot 11{,}2 = 33{,}6$.



4 случай. Биссектрисы AK и BM пересекаются внутри параллелограмма. Тогда, так как в силу условия задачи $CK{:}KM{:}MD = 2{:}1{:}2$, то $CK = MD = 2x$, $KM = x$.

Аналогично первому случаю устанавливаем, что $AD = DK = DM + MK = 2x + x = 3x$.

Тогда $AD = CB = DK = 3x$, $AB = CD = DM + MK + KC = 2x + x + 2x = 5x$. Тогда периметр параллелограмма $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(5x + 3x) = 16x$. В силу условия задачи $P_{ABCD} = 112$, следовательно, $16x = 112$, $x = 7$. Значит, $AD = CB = 3\cdot 7 = 21$; $AB = CD = 5\cdot 7 = 35$.

Ответ. 14, 42, 14, 42 или 16, 40, 16, 40 или 22,4; 33,6; 22,4; 33,6 или 21, 35, 21, 35.

Задача 5

Имеется 9 монет, одна из которых фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивая монета легче настоящей. Внешне фальшивая монета ничем не отличается от настоящей. Укажите, как за два взвешивания на чашечных весах без гирь и стрелки найти фальшивую монету.

Решение

Разделим монеты на три группы по три монеты в каждой и занумеруем группы монет номерами 1, 2 и 3.

1-ое взвешивание. На одну чашу весов кладем монеты первой группы, на другую – монеты второй группы. Возможно три случая.

1 случай. Весы в равновесии, следовательно, среди монет первой и второй групп фальшивых. Тогда фальшивая монета находится среди монет третьей группы.

2 случай. Монеты первой группы легче, чем монеты второй группы. Тогда, так как фальшивая монета легче настоящей, то фальшивая монета находится среди монет первой группы.

3 случай. Монеты первой группы тяжелее, чем монеты второй группы. Тогда, так как фальшивая монета легче настоящей, то фальшивая монета находится среди монет второй группы.

Таким образом, за первое взвешивание мы определили группу из трех монет, одна из которых является фальшивой.

2-ое взвешивание. На одну чашу весов кладем одну из монет той группы, среди которых находится фальшивая, на другую чашу весов кладем другую монету этой же группы. Возможно два случая.

1 случай. Весы в равновесии, следовательно, обе монеты, находящиеся на чашах весов настоящие, а фальшивой является оставшаяся монета рассматриваемой группы..

2 случай. Весы не в равновесии, тогда фальшивой является более легкая из двух монет, находящихся на чашах весов.