ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2021-2022 учебный год)

Задание 1

Задача 1

Сейчас Елене Ивановне и её сыну Стасу вместе 54 года. Возраст Елены Ивановны составляет 13/14 от числа лет Стаса тогда, когда возраст Елены Ивановны составит 11/12 от того числа лет, которое имел бы Стас в возрасте, в полтора раза большем числа лет Елены Ивановны в тот момент, когда она вдвое старше сына.
Сколько лет Стасу и сколько Елене Ивановне?

Решение

Пусть в тот момент, когда Елена Ивановна вдвое старше Стаса, его возраст равен x лет. Тогда получаем, что Елена Ивановна старше сына на x лет. Если сейчас Стасу y лет, то возраст Елены Ивановны – $x+y$ лет,

$$2y + x = 54$$

Возраст Стаса, в полтора раза больший числа лет Елены Ивановны в тот момент, когда она вдвое старше сына, равен $1{,}5 \cdot 2x = 3x$. В момент, когда возраст Елены Ивановны составит

$$\frac{11}{12} \cdot 3x = \frac{11}{4}x,$$

возраст Стаса будет равен

$$\frac{11}{4}x - x = \frac{7}{4}x.$$

Таким образом,

$$x + y = \frac{13}{14} \cdot \frac{7x}{4} = \frac{13}{8}x$$

Получаем,

$$y = \frac{5}{8}x, \qquad \frac{5}{4}x + x = 54, \qquad x = 24, \qquad y = 15.$$

Ответ: 15 и 39.

Задача 2

Даны четыре числа, из которых первые три образуют геометрическую прогрессию, а последние три являются последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма крайних чисел равна 35, а сумма средних равна 30. Найти эти числа.

Решение

Пусть a – первое число, q – знаменатель геометрической прогрессии, b – разность арифметической прогрессии. Тогда искомые числа равны

$$a, aq, aq^2, aq^2 + b,$$

причем

$$aq^2 = aq + b, a + aq^2 + b = 35, aq^2 + aq = 30.$$

Отсюда получаем

$$b = aq^2 - aq,$$
$$a(2q^2 - q + 1) = 35,$$
$$a(q^2 + q) = 30.$$

Таким образом,

$$\frac{2q^2 - q + 1}{q^2 + q} = \frac{35}{30},$$

$$5q^2 - 13q + 6 = 0,$$
$$q = 2 \text{ или } q = 0{,}6.$$

В первом случае

$$a = \frac{30}{q^2 + q} = 5, b = 10,$$

то есть искомые числа – 5, 10, 20, 30.

Во втором случае $a = 31{,}25$, искомые числа –

31,25; 18,75; 11,25; 3,75.

Ответ: 5, 10, 20, 30 или 31,25; 18,75; 11,25; 3,75.

Задача 3

Через $[x]$ обозначается целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Решите уравнение

$$x^3 - [x] = 7.$$

Решение

Пусть $[x] = y$, тогда $x = y + z$, где z - дробная часть числа x, $0 \leq z < 1$.

Подставляя в уравнение, получаем

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 - y = 7$$
$$(y + z)^3 - y = 7.$$

Так как $y \leq y + z < y + 1$,

$$y^3 \leq y + 7 < (y + 1)^3$$

Из первого неравенства получаем

$$y(y^2 - 1) \leq 7 \text{ или } (y - 1)y(y + 1) \leq 7.$$

Если $y < -1$ левая часть неравенства меньше нуля, при $y = -1$, $y = 0$ и $y = 1$ равна нулю, при $y = 2$ левая часть неравенства равна 6, при $y \geq 3$

$$(y - 1)y(y + 1) \geq 2 \cdot 3 \cdot 4 > 7.$$

Таким образом, первое неравенство справедливо при $y \leq 2$.

Второе неравенство перепишем в виде

$$y^3 + 3y^2 + 2y > 6$$

или $y(y + 1)(y + 2) > 6$.

Левая часть неравенства равна нулю при $y = 0$, $y = -1$ и $y = -2$, при $y \leq -3$ отрицательна. При $y = 1$ левая часть неравенства равна 6, при $y \geq 2$

$$y(y + 1)(y + 2) \geq 2 \cdot 3 \cdot 4 > 6.$$

Таким образом, второе неравенство справедливо для всех $y \geq 2$.

Обоим неравенствам удовлетворяет только $y = 2$. Но тогда

$$x^3 = 7 + y = 9, x = \sqrt[3]{9}.$$

Так как $8 < 9 < 27$, то $2 < \sqrt[3]{9} < 3$, то есть в самом деле $[x] = 2$.

Ответ: $x = \sqrt[3]{9}$.

Задача 4

Окружность касается основания равнобедренного треугольника, её центром является точка пересечения высот треугольника, а радиус в два раза меньше радиуса окружности, вписанной в треугольник. Найдите углы треугольника.

Решение

Пусть основание треугольника АС= a, боковая сторона - АВ= b. Обозначим через О точку пересечения высот, Н – точка касания окружностью основания, АН=a/2, ВН=h, ОН=r. Треугольник АОН подобен треугольнику ВАН,

$$\frac{OH}{AH} = \frac{AH}{BH},$$

или

$$\frac{r}{a/2} = \frac{a/2}{h},$$

$$r = \frac{a^2}{4h}.$$

Площадь треугольника равна $S = ah/2$.

С другой стороны, пусть p - полупериметр, $p = (a + 2b)/2$, радиус вписанной в треугольник окружности равен, по условию, $2r$. Поэтому площадь треугольника составляет $2pr = (a + 2b)r$. Таким образом,

$$r = \frac{a^2}{4h} = \frac{S}{a + 2b} = \frac{ah}{2(a + 2b)}.$$

Получаем отсюда $a(a + 2b) = 2h^2$.

По теореме Пифагора для треугольника ABH, $h^2 = b^2 - a^2/4$,

$$a^2 + 2ab = 2b^2 - \frac{a^2}{2},$$

$$3a^2 + 4ab = 4b^2.$$

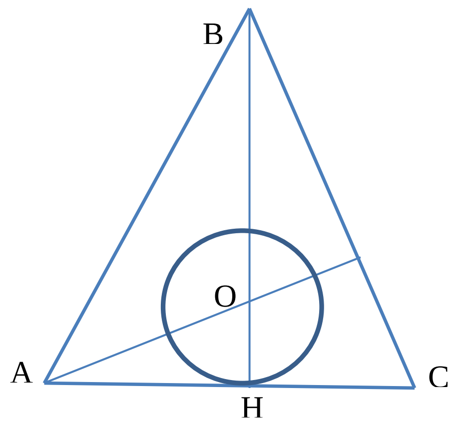
Обозначим $t = a/b$. Тогда

$$3t^2 + 4t - 4 = 0,\ t_1 = 2/3,\ t_2 = -2.$$

Подходит только первый корень.

$$\cos\angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{a}{2b} = \frac{t}{2} = 1/3.$$

Так как треугольник равнобедренный, $\angle BCA = \angle BAC$, $\angle ABC = 180^\circ - 2\angle BAC$.



Задача 5

Даны координаты трех вершин равнобедренной трапеции – A(1,-1), B(-2,3), C(-1,5). Найдите координаты четвертой вершины и длину средней линии трапеции.

Решение

Пусть $D(x,y)$ – четвертая вершина трапеции. Введём векторы

$$\overrightarrow{AB} = (-3{,}4),\ \overrightarrow{BC} = (1{,}2),\ \overrightarrow{DC} = (x + 1, y - 5) \text{ и } \overrightarrow{AD} = (x - 1, y + 1).$$

Найдём длины этих векторов:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5,\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5},\ \left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 5)^2},\ \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}\ .$$

Предположим, основания трапеции - стороны BC и AD. Тогда

$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD},\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right|,$$

то есть

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2},\ \ (x+1)^2+(y-5)^2=25.$$

Находим, что $y=2x-3$, $(x+1)^2+(2x-8)^2=25$,

$$5x^2-30x+40=0,$$

$x_1=2, x_2=4, y_1=1, y_2=5.$

Если координаты точки D равны (2,1), то ABCD – параллелограмм, длина средней линии равна длине оснований, то есть $\sqrt{5}$.

Если D(4,5), $\overrightarrow{AD}=(3,6)$, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, длина средней линии равна $2\sqrt{5}$.

Пусть теперь основания трапеции – стороны AB и CD. Тогда

$$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC},\ |\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|,$$

то есть

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-5}{4},\ \ (x-1)^2+(y+1)^2=5.$$

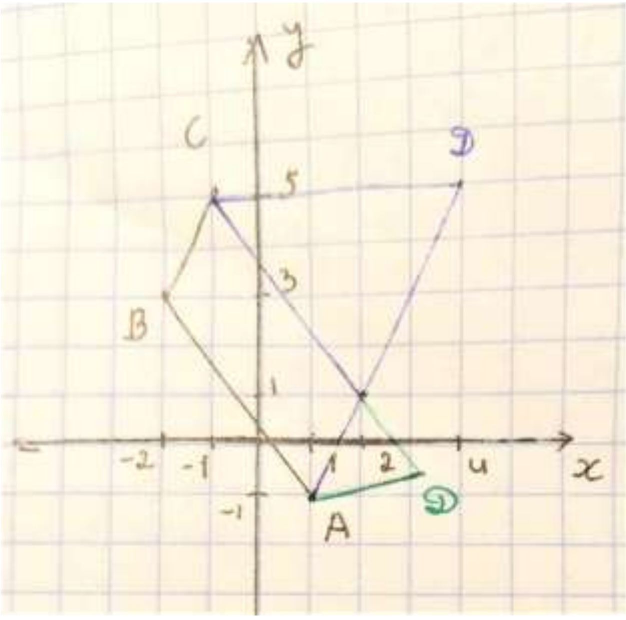
Получаем, что $y=(11-4x)/3$, $(x-1)^2+(4x-14)^2/9=5$,

$$25x^2-130x+160=0,$$

$x_1=2, x_2=3{,}2, y_1=1, y_2=-0{,}6.$

Точка (2,1) уже была рассмотрена. Пусть D(3,2; -0,6). Тогда

$\overrightarrow{DC}=(4{,}2,-5{,}6)$, $|\overrightarrow{DC}|=7$. Длина средней линии равна 6.



Ответ: (2,1) и $\sqrt{5}$, (4,5) и $2\sqrt{5}$, (3,2; -0,6) и 6.