ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2021-2022 учебный год)

Задание 2
Задача 1

Три пункта A, B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной 1/3 AB; к отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC, а рядом с отрезком дороги CA расположен лес, занимающий прямоугольный участок длиной, равной AC, и шириной 4 км. Площадь леса на 40 км^2 больше суммы площадей квадратных полей. Найдите площадь леса.

Решение

Пусть AB=3x, BC=y, AC=z. Тогда площади полей составят x^2 и y^2, площадь леса - $4z$.

Так как точки A, B и C расположены на плоскости,

$$3x + y \geq z, 3x + z \geq y, z + y \geq 3x.$$

Если все эти неравенства строгие, точки A, B и C – вершины треугольника, в противном случае – лежат на одной прямой.

По условию,

$$x^2 + y^2 + 40 = 4z,$$

то есть

$$z = \frac{(x^2 + y^2)}{4} + 10.$$

Подставляя в неравенства, получаем

$$\begin{gathered} 12x + 4y \geq x^2 + y^2 + 40, \\ 12x + x^2 + y^2 + 40 \geq 4y, \\ 4y + x^2 + y^2 + 40 \geq 12x, \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} (x - 6)^2 + (y - 2)^2 \leq 0, \\ (x + 6)^2 + (y - 2)^2 \geq 0\ , \\ (x - 6)^2 + (y + 2)^2 \geq 0. \end{gathered}$$

Второе и третье неравенства справедливы при любых значениях x и y, а вот первое выполняется только при x=6, y=2. Таким образом, z=20 и площадь леса – 80 км^2.

Ответ: 80 км^2.

Задача 2

Найдите четыре целых числа a, b, c, d, образующих арифметическую прогрессию, если

$$d = a^2 + b^2 + c^2.$$

Решение

Пусть $x > 0$ – разность прогрессии, так что $a = b - x$, $c = b + x$, $d = 2x + b$. Запишем уравнение:

$$2x + b = (b - x)^2 + b^2 + (b + x)^2,$$

или

$$2x + b = 3b^2 + 2x^2,$$

$$b(1 - 3b) = 2x(x - 1).$$

При $x = 1$ равенству удовлетворяет только $b = 0$, так что искомые числа –

$$-1, 0, 1, 2.$$

Предположим, $x > 1$. Тогда правая часть равенства положительна. Левая часть равенства больше нуля только при $0 < b < 1/3$. Но промежуток $(0; 1/3)$ не содержит целых чисел.

Ответ: -1, 0, 1, 2.

Задача 3

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - x + 3y - 1 = 0, \\ 4x^2 + 7xy - 2y^2 - 3x + 3y - 13 = 0 \end{cases}$$

Решение

Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x:

$$2x^2 + (3y - 1)x - 2y^2 + 3y - 1 = 0$$

$$D = (3y - 1)^2 - 8(-2y^2 + 3y - 1) = 25y^2 - 30y + 9 = (5y - 3)^2,$$

$$x = \frac{y - 1}{2} \text{ или } x = 1 - 2y.$$

В первом случае, подставляя во второе уравнение, получаем

$$(y - 1)^2 + (7y - 3)\frac{(y - 1)}{2} - 2y^2 + 3y - 13 = 0,$$

$$5y^2 - 8y - 21 = 0,$$

$y = 3$ или $y = -1{,}4$.

Соответственно, $x = 1$ или $x = -1{,}2$.

Во втором случае получаем

$$4(1-2y)^2+(7y-3)(1-2y)-2y^2+3y-13=0,$$

$$-12=0,$$

решений нет.

Ответ: (1,3), $(-1{,}2; = -1{,}4)$.

Задача 4

Найдите такие значения x, при которых неравенство

$$-2ax^2+11ax+1-14a>0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $-1<a<1/9$.

Решение

Перепишем неравенство в виде

$$a(-2x^2+11x-14)+1>0.$$

Обозначим

$$f(a)=a(-2x^2+11x-14)+1,$$

то есть имеем неравенство $f(a)>0$.

При любом фиксированном x

$f(a)$ - линейная функция, возрастающая, если $-2x^2+11x-14>0$ и убывающая, если $-2x^2+11x-14<0$.

Если $-2x^2+11x-14=0$, то есть $x=2$ или $x=3{,}5$, неравенство выполнено для всех a.

Пусть $-2x^2+11x-14>0$, то есть $2<x<3{,}5$.

Так как функция $f(a)$ возрастает, $f(a)>f(-1)$ для всех $a>-1$, то есть неравенство выполнено при $-1<a<1/9$, если $f(-1)\geq 0$, то есть

$$2x^2-11x+15\geq 0,\ x\leq 2{,}5 \text{ или } x\geq 3.$$

Таким образом, $2<x\leq 2{,}5$ или $3\leq x<3{,}5$.

Пусть $-2x^2+11x-14<0$, то есть $x<2$ или $x>3{,}5$. Так как функция $f(a)$ убывает, $f(a)>f(1/9)$ для всех $a<1/9$, то есть неравенство выполнено при $-1<a<1/9$, если

$f(1/9)\geq 0$, то есть

$$-2x^2+11x-5\geq 0,\ 0{,}5\leq x\leq 5.$$

Таким образом, $0{,}5\leq x<2$ или $3{,}5<x\leq 5$.

Объединяя все случаи, получаем

$$0{,}5\leq x\leq 2{,}5,\ 3\leq x\leq 5.$$

Ответ: $0{,}5\leq x\leq 2{,}5$, $3\leq x\leq 5$.

Задача 5

Используя свойства скалярного произведения векторов, докажите, что медианы треугольника ABC, проведенные к сторонам AC и BC, перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$AC^2 + BC^2 = 5AB^2$$

Решение

Пусть BM и AN – медианы, проведенные к сторонам AC и BC соответственно. Введем векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$. Тогда

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AN} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Получаем, следовательно,

$$\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AN}\right) = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{b}\right) - \frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2 - \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{4}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2 - \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{5}{4}\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Далее, $|\vec{c}|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, поэтому

$$\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AN}\right) = -\frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2 - \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{5}{8}\left(|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(-5|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2\right).$$

Таким образом, $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AN}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда $|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 = 5|\vec{c}|^2$, что и следовало доказать.