

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЯ 3 ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2021-2022 учебный год)

Задача 1

Школьник Петя планирует посещать подготовительные курсы в университете. Доехать до университета можно либо на автобусе, и тогда из-за пробок можно опоздать в половине случаев, либо на метро, и тогда вероятность опоздания равна одной четвертой. Петя собирается использовать следующую стратегию. Если в какой-то день он приедет на занятия вовремя, то в следующий раз воспользуется тем же транспортом, а если опоздает, то в следующий раз обязательно поменяет вид транспорта. Сколько шансов у Пети приехать в университет вовремя, когда он поедет туда в третий раз, если с вероятностью 0,6 в первый раз он поедет на автобусе.

Решение

Вероятность того, что во второй день Петя поедет на автобусе, равна вероятности то, что в первый день он поехал на автобусе и не опоздал ($0,6 \cdot 0,5$) или поехал на метро и опоздал ($0,4 \cdot 0,25$), то есть

$$0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,25 = 0,4.$$

Аналогично, вероятность того, что Петя поедет на автобусе в третий день, равна вероятности того, что во второй день он ехал на автобусе и не опоздал ($0,4 \cdot 0,5$) или ехал на метро и опоздал ($0,6 \cdot 0,25$), то есть

$$0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,25 = 0,35.$$

Таким образом, вероятность опоздать на третий день равна

$$0,35 \cdot 0,5 + 0,65 \cdot 0,25 = \frac{7}{20} \cdot \frac{1}{2} + \frac{13}{20} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{80},$$

а вероятность приехать вовремя – $53/80 = 0,665$.

Ответ: $53/80$.

Задача 2

Ученик должен был умножить двузначное число на трехзначное и разделить их произведение на пятизначное число. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом числа за одно пятизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в два раза больше истинного. Найдите все три числа.

Решение

Обозначим двузначное число через n , трехзначное – через m , пятизначное через k , истинное частное через p . Тогда

$$nm = kp, 1000n + m = 2pk.$$

Из этих равенств получаем

$$1000n + m = 2mn.$$

Отсюда следует, что число m делится на 2 и на n , можно записать

$$m = an, 1000 + a = 2an.$$

Число a четное и является делителем числа 1000. Таким образом, так как $1000 = 2^3 5^3$,

$$a = 2^s 5^l, \text{ где } 1 \leq s \leq 3, 0 \leq l \leq 2.$$

Получаем

$$2^3 5^3 + 2^s 5^l = 2^{s+1} 5^l n, 2^{3-s} 5^{3-l} + 1 = 2n,$$

Поскольку $2n$ – четное число, число $2^{3-s} 5^{3-l}$ должно быть нечетным, то есть $s = 3$ (степень двойки равна нулю),

$$5^{3-l} + 1 = 2n.$$

Если $l = 0$, $2n = 126$, $n = 63$, $a = 8$, $m = 504$, $nm = kp = 31752$. В этом случае может быть $k = 31752$ (при $p = 1$), $k = 15876$ (при $p = 2$) или $k = 10584$ (при $p = 3$).

Если $l = 1$, $2n = 26$, $n = 13$, $a = 40$, $m = 520$, $nm = kp = 6760$.

Если $l = 2$, $2n = 6$, n – не двузначное число.

Ответ: 63, 504, 31752 или 63, 504, 15876 или 63, 504, 10584.

Задача 3

1 марта 2018 года в банк положили 100 тыс. руб. под 10% годовых сроком на 4 года. Через два года планировалось снять со счета целое число тысяч рублей с таким расчётом, чтобы к 1 марта 2022 года на счету оказалось не менее 130 тыс. руб. Какая наибольшая сумма могла быть снята со счёта 1 марта 2020 года?

Решение

К 1 марта 2020 года на счету будет $100 \cdot (1 + 0,1)^2 = 121$ тысяча рублей.

Пусть со счета сняли x тысяч рублей. Тогда к 1 марта 2022 года на счету окажется

$(121 - x)(1 + 0,1)^2 = 1,21 \cdot (121 - x)$ тысяч рублей.

По условию,

$$1,21 \cdot (121 - x) \geq 130,$$

$$x \leq 121 - \frac{130}{1,21},$$

$$\frac{130}{1,21} = \frac{13000}{121} = 100 \frac{90}{121},$$

$$x \leq 20 \frac{31}{121}.$$

Наибольшее целое число, удовлетворяющее этому условию, равно 20.

Ответ: 20 тысяч рублей.

Задача 4

Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 14x - 10a + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + a^2 - 16x - 12a + 100} + \sqrt{x^2 + a^2 + 4x - 20a + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

Решение

Во втором уравнении выделим полные квадраты под знаками корня.

$$\sqrt{(x-8)^2 + (a-6)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (a-10)^2} = 2\sqrt{29}$$

Выражение в левой части можно интерпретировать как сумма расстояний на плоскости $(x|0a)$ от точки M с координатами (x,a) до точек $A(8,6)$ и $B(-2,10)$.

Расстояние между точками A и B равно

$$\sqrt{(8+2)^2 + (6-10)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}.$$

Таким образом, $|MA| + |MB| = |AB|$, следовательно, точка M лежит на отрезке AB :

$$\frac{x-8}{-2-8} = \frac{a-6}{10-6}.$$

Получаем $a = 9,2 - 0,4x$. При этом $-2 \leq x \leq 8$, $6 \leq a \leq 10$.

Подставим в первое уравнение:

$$x^2 + (a-5)^2 - 14x + 33 = 0,$$

$$x^2 + (4,2 - 0,4x)^2 - 14x + 33 = 0,$$

$$1,16x^2 - 17,36x + 50,64 = 0,$$

$$29x^2 - 434x + 1266 = 0.$$

Решая это уравнение, находим $x = (217 \pm 5\sqrt{415})/29$.

Так как $20 < \sqrt{415} < 21$,

$$\frac{217 + 5\sqrt{415}}{29} > \frac{217 + 100}{29} > 10,$$

$$0 < \frac{217 - 105}{29} < \frac{217 - 5\sqrt{415}}{29} < \frac{217 - 100}{29} < 5$$

Таким образом, подходит значение $x = (217 - 5\sqrt{415})/29$

При этом $a = (180 + 2\sqrt{415})/29$.

Ответ: При $a = (180 + 2\sqrt{415})/29$ $x = (217 - 5\sqrt{415})/29$, при других значениях a решений нет.

Задача 5

Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность радиуса $r = 1/4$ и около которой описана окружность радиуса $R = \sqrt{17}$. Найдите площадь трапеции.

Решение

Пусть в трапеции $ABCD$ $BC = a$, $AD = b$, $AB = CD = c$, $\angle BAD = \alpha$. Так как в трапецию вписана окружность, $a + b = 2c$, высота трапеции $h = 2r = 1/2$.

Таким образом, площадь трапеции

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h = \frac{1}{2}c.$$

Опустим высоту BH .

$$AH = \frac{b - a}{2}, \quad HD = AD - AH = b - \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2} = c.$$

Из треугольника ABH находим

$$\sin \alpha = \frac{h}{c} = \frac{1}{2c}.$$

Треугольник ABD вписан в ту же окружность, что и трапеция, по теореме синусов

$$BD = 2R \sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{c}.$$

С другой стороны, по теореме Пифагора для треугольника BHD ,

$$BD^2 = h^2 + c^2 = \frac{1}{4} + c^2.$$

Для определения c получаем уравнение

$$\frac{1}{4} + c^2 = \frac{17}{c^2}$$

или

$$c^4 + \frac{c^2}{4} - 17 = 0.$$

Решая это уравнение, находим $c = 2$, следовательно, $S = 1$.

Ответ: 1.

