Задание № 4

Задача 1

В двузначном числе число десятков в 2 раза больше числа единиц. Если цифры переставить, то полученное число будет меньше данного на 18. Найдите оба двузначных числа.

Решение

1 способ. Выпишем все двузначные числа, число десятков в которых в два раза больше числа единиц: 21, 42, 63, 84. Для каждого из этих чисел найдем разность между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке:

$$21–12=9,\ 42–24=18,\ 63–36=27,\ 84–48=36.$$

Из четырех чисел, удовлетворяющих первому условию задачи, второму условию удовлетворяет только одно: 42, которое на 18 больше числа 24, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

2 способ. Пусть $\overline{ab}$ – искомое число, тогда $a = 2b$ в силу того, что число десятков в два раза больше числа единиц, и $\overline{ab}-\overline{ba}=18$, так как при перестановке цифр числа местами полученное число меньше искомого на 18. Учитывая, что $\overline{ab}=10a+b$ и $a = 2b$, получаем уравнение

$$(10\cdot 2b + b) – (10b + 2b) = 18,$$
$$21b – 12b = 18,$$
$$9b = 18,$$
$$b = 2.$$

Таким образом, получаем, что $b = 2$, тогда $a = 2b = 2\cdot 2 = 4$. Значит, $\overline{ab}=42,\ \overline{ba}=24$.

Ответ. 42 и 24.

Задача 2

Для каждого значения параметра *a* решите уравнение $a(1-4x)=a^2x-4$.

Решение

В данном уравнении присутствуют две переменные *a* и *x*, но у этих переменных разный смысл: *x* – неизвестная, *a* – постоянная (которая получила название параметр). Специфика задач с параметром состоит в следующем: рассматривается не одно уравнение, а целое семейство уравнений одновременно, в котором каждое уравнение семейства получается при конкретном значении параметра. Так как параметр может принимать бесконечное множество различных значений, то выписать все уравнения семейства мы не сможем. Однако каждое уравнение семейства должно быть решено.

Чтобы решить каждое из уравнений заданного семейства поступают следующим образом: все множество допустимых значений параметра (тех значений, при которых уравнение имеет смысл) разбивают на подмножества и решают задачу на каждом из подмножеств. Чтобы множество допустимых значений параметра разбить на подмножества, нужно найти те значения параметра, при которых или при переходе через которые происходит качественное изменение задачи.

Допустимыми значениями параметра являются любые действительные числа. Преобразуем заданное уравнение.

$$a(1-4x)=a^2x-4;$$
$$a-4ax=a^2x-4;$$
$$a+4=a^2x+4ax;$$
$$(a^2+4a)x=a+4;$$
$$a(a+4)x=a+4.$$

После преобразований мы получили линейное уравнение с параметром. Качественное изменение линейного уравнения с параметром происходит при тех значениях параметра, при которых коэффициент при неизвестной становится равным нулю. Таким образом, допустимые значения параметра разбиваются на три подмножества.

1) $a + 4 = 0$, $a = –4$. При этом значении параметра уравнение принимает вид: $0\cdot x = 0$. Решением такого уравнения будут любые действительные значения x.

2) $a = 0$. При этом значении параметра уравнение принимает вид: $0\cdot x = 4$. Полученное уравнение решений не имеет.

3) $a(a + 4) \neq 0$, $a \neq –4$ и $a \neq 0$. При этих значениях параметра коэффициент при неизвестной отличен от нуля, следовательно, для решения уравнения обе части уравнения на этот коэффициент нужно разделить:

$$x=\frac{a+4}{a(a+4)};$$
$$x=\frac{1}{a}.$$

Ответ. При $a = –4$ x – любое действительное число;

при $a = 0$ уравнение корней не имеет;

при $a \neq –4$ и $a \neq 0$ $x=\frac{1}{a}$.

Задача 3

Разложите на множители многочлен $(a+b+c)^3-b^3-c^3-a^3$.

Решение

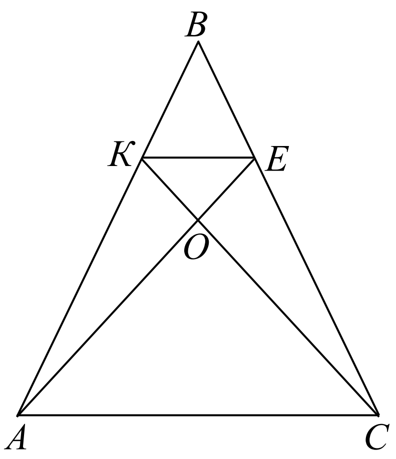
$$(a+b+c)^3-b^3-c^3-a^3=\left((a+b+c)^3-b^3\right)-\left(c^3+a^3\right)=$$
$$=\left((a+b+c)-b\right)\left((a+b+c)^2+(a+b+c)b+b^2\right)-\left(c+a\right)\left(c^2-ac+a^2\right)=$$
$$=(a+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+ab+b^2+bc+b^2)-(a+c)(c^2-ac+a^2)=$$
$$=(a+c)(a^2+3b^2+c^2+3ab+2ac+3bc-(c^2-ac+a^2))=$$
$$=(a+c)(a^2+3b^2+c^2+3ab+2ac+3bc-c^2+ac-a^2)=$$
$$=(a+c)(3b^2+3ab+3ac+3bc)=3(a+c)((b^2+ab)+(ac+bc))=$$
$$=3(a+c)(b(b+a)+c(a+b))=3(a+c)(a+b)(b+c).$$

Ответ. $(a+b+c)^3-b^3-c^3-a^3=3(a+c)(a+b)(b+c)$.

Задача 4

Дан равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*. Точки *K* и *E* лежат соответственно на сторонах *AB* и *BC*, *AK* = *CE*. *CK* пересекает *AE* в точке *O*. Докажите, что треугольник *KOE* равнобедренный.

Решение



Так как ΔABC – равнобедренный с основанием *AC*, то *AB* = *BC* как боковые стороны равнобедренного треугольника (по определению).

AB = *BC*, *AK* = *EC* по условию, *AB* = *AK* + *KB*, *BC* = *BE* + *EC*, значит, *BK* = *BE*, следовательно, ΔBKE – равнобедренный с основанием *KE*, $\angle BKE = \angle BEK$ по свойству равнобедренного треугольника.

Рассмотрим ΔBKC и ΔBEA. *AB* = *BC* по условию, *BE* = *BK* по доказанному, $\angle B$ – общий, значит, $\Delta BKC = \Delta BEA$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle BKC = \angle BEA$.

Так как $\angle BKE = \angle BEK$, $\angle BKC = \angle BEA$ по доказанному, то $\angle OKE = \angle BKC - \angle BKE = \angle BEA - \angle BEK = \angle KEO$, следовательно, ΔKOE – равнобедренный с основанием *KE* по признаку, **что и требовалось доказать.**

Задача 5

Имеется 16 монет, среди которых есть одна фальшивая. Масса фальшивой монеты отличается от массы настоящей, но неизвестно, легче фальшивая монета настоящей или тяжелее. Как за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету и определить, легче или тяжелее фальшивая монета по сравнению с настоящей?

Решение

1 способ. 16 монет разделим на две части: 8 монет и 8 монет.

1 взвешивание. На каждую чашу весов кладем по 8 монет. Так как среди 16 монет есть ровно одна фальшивая, масса которой отличается от массы настоящей, а массы настоящих монет равны, то одна из двух групп монет окажется тяжелее другой.

2 взвешивание. Берем группу из 8 монет, которая тяжелее и разделим ее на две части: 4 монеты и 4 монеты. На каждую чашу весов кладем по 4 монеты из более тяжелой группы.

2.1. Если одна из двух групп окажется тяжелее другой, то фальшивая монета тяжелее настоящей и она находится среди более тяжелой группы из 4 монет.

3 взвешивание. Более тяжелую группу из 4 монет делим на две части: 2 монеты и 2 монеты. На каждую чашу весов кладем по 2 монеты из более тяжелой группы второго взвешивания. Фальшивая монета будет среди двух более тяжелых монет.

4 взвешивание. Берем две более тяжелые монеты из третьего взвешивания и кладем их на чаши весов (одну на одну, другую на другую). Та монета, которая окажется тяжелее при 4 взвешивании и есть фальшивая.

2.2. При втором взвешивании по 4 монеты из тяжелой группы первого взвешивания весы находятся в равновесии, следовательно, все 8 монет являются настоящими, а фальшивая монета легче настоящей и находится среди тех 8 монет первого взвешивания, которые были легче.

3 взвешивание. Берем 8 монет более легкой группы первого взвешивания и делим ее на три части: 3 монеты, 3 монеты и 2 монеты. На каждую чашу весов кладем по три монеты из более легкой группы первого взвешивания.

3.1. Если весы окажутся в равновесии, то фальшивой монеты на весах нет, следовательно, она среди двух оставшихся монет более легкой группы первого взвешивания.

4 взвешивание. Берем две оставшихся монеты более легкой группы первого взвешивания и кладем их на чаши весов (одну на одну, другую на другую). Та монета, которая окажется легче, и есть фальшивая.

3.2. Если весы покажут, что одна из двух групп по 3 монеты легче, чем другая, значит, фальшивая монета среди тех трех монет, лежащих на чашах весов, которые легче.

4 взвешивание. Берем более легкие три монеты третьего взвешивания и делим их на три части по одной монете в каждой. Две из трех монет кладем на чаши весов (одну на одну, другую на другую).

4.1. Если весы в равновесии, то фальшивой является третья оставшаяся монета более легкой группы третьего взвешивания.

4.2. Если весы покажут, что одна из двух монет легче другой, то более легкая монета на весах и есть фальшивая.

2 способ. 16 монет разделим на три части: 5 монет, 5 монет и 6 монет.

1 взвешивание. На каждую чашу весов кладем по 5 монет.

1.1. Весы находятся в равновесии, следовательно, так как среди монет только одна фальшивая, масса которой отличается от массы настоящей монеты, а массы настоящих монет одинаковые, то среди 10 монет, находящихся на чашах весов, фальшивой нет, все 10 монет настоящие, а фальшивая находится среди 6 оставшихся монет.

2 взвешивание. Берем 6 оставшихся монет и делим их на две части: 3 монеты и три монеты. Кладем по три монеты из оставшихся шести на чаши весов. Так как среди этих монет находится фальшивая, то весы не в равновесии.

3 взвешивание. Берем три более тяжелых монеты второго взвешивания (среди этих монет может быть фальшивая, которая тяжелее настоящей, или все эти монеты настоящие) и три настоящие монеты из 10 монет первого взвешивания. На одну чашу весов кладем три более тяжелых монеты второго взвешивания, на другую три настоящих монеты из 10 монет первого взвешивания.

3.1. Весы находятся в равновесии, следовательно, все монеты на чашах весов настоящие, а фальшивая находится среди трех более легких монет второго взвешивания, фальшивая монета легче настоящей.

4 взвешивание. Берем более легкие три монеты второго взвешивания и делим их на три части по одной монете в каждой. Две из трех монет кладем на чаши весов (одну на одну, другую на другую).

4.1. Если весы в равновесии, то фальшивой является третья оставшаяся монета более легкой группы второго взвешивания.

4.2. Если весы покажут, что одна из двух монет легче другой, то более легкая монета на весах и есть фальшивая.

3.2. Три более тяжелых монеты второго взвешивания тяжелее трех настоящих, следовательно, фальшивая монета среди трех более тяжелых монет второго взвешивания и она тяжелее настоящей.

4 взвешивание. Берем более тяжелые три монеты второго взвешивания и делим их на три части по одной монете в каждой. Две из трех монет кладем на чаши весов (одну на одну, другую на другую).

4.1. Если весы в равновесии, то фальшивой является третья оставшаяся монета более тяжелой группы второго взвешивания.

4.2. Если весы покажут, что одна из двух монет легче другой, то более тяжелая монета на весах и есть фальшивая.

1.2. Одна из двух групп по 5 монет из первого взвешивания тяжелее другой, следовательно, фальшивая монета находится на весах, а все 6 оставшихся монет являются настоящими.

2 взвешивание. На одну чащу весов кладем 5 более тяжелых монет первого взвешивания, на другую – 5 из 6 оставшихся настоящих монет.

2.1. Весы находятся в равновесии, следовательно, фальшивая монета находится среди 5 более легких монет первого взвешивания и она легче настоящей.

3 взвешивание. 5 более легких монет первого взвешивания делим на три части: 2 монеты, 2 монеты и 1 монета. На чаши весов кладем по 2 монеты.

3.1. Весы находятся в равновесии, следовательно, фальшивой является оставшаяся монета из 5 более легких монет первого взвешивания.

3.2. Одна из групп в 2 монеты легче другой, следовательно, фальшивая монета находится среди двух более легких монет третьего взвешивания.

4 взвешивание. На одну чашу весов кладем одну из двух более легких монет третьего взвешивания, на вторую – другую монету. Та монета, которая окажется легче, и является фальшивой.

2.2. 5 более тяжелых монет первого взвешивания тяжелее 5 настоящих монет, следовательно, фальшивая монета тяжелее настоящей и она находится среди 5 более тяжелых монет первого взвешивания.

3 взвешивание. 5 более тяжелых монет первого взвешивания делим на три части: 2 монеты, 2 монеты и 1 монета. На чаши весов кладем по 2 монеты.

3.1. Весы находятся в равновесии, следовательно, фальшивой является оставшаяся монета из 5 более тяжелых монет первого взвешивания.

3.2. Одна из групп в 2 монеты легче другой, следовательно, фальшивая монета находится среди двух более тяжелых монет третьего взвешивания.

4 взвешивание. На одну чашу весов кладем одну из двух более тяжелых монет третьего взвешивания, на вторую – другую монету. Та монета, которая окажется тяжелее, и является фальшивой.