Задание № 4

Задача 1

Решить уравнение $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6.$

Решение

Преобразуем уравнение.

$$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6;$$
$$(36x^2+84x+49)(3x^2+7x+4)=6;$$
$$(12(3x^2+7x+4)+1)(3x^2+7x+4)=6.$$

Обозначим, $u=3x^2+7x+4$. Тогда уравнение примет вид

$$(12u+1)\cdot u=6;$$
$$12u^2+u-6=0.$$

Решим квадратное уравнение.

$$D = 1^2 - 4\cdot 12\cdot(-6) = 1 + 288 = 289,$$

$$u_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{289}}{24}=\frac{-1\pm 17}{24},$$

$$u_1=\frac{-1-17}{24}=-\frac{18}{24}=-\frac{3}{4};\quad u_2=\frac{-1+17}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

Вернемся к замене. Получим два квадратных уравнения относительно переменной x:

1) $3x^2+7x+4=-\dfrac{3}{4}$;

$12x^2 + 28x + 19 = 0;$

$\dfrac{D}{4}=14^2-19\cdot 12=196-228<0$

нет действительных корней.

2) $3x^2+7x+4=\dfrac{2}{3}$;

$9x^2 + 21x + 10 = 0;$

$D = 21^2 - 4\cdot 9\cdot 10 = 441 - 360 = 81,$

$$x_{1,2}=\frac{-21\pm\sqrt{81}}{18}=\frac{-21\pm 9}{18},$$

$$x_1=\frac{-21-9}{18}=-\frac{30}{18}=-\frac{5}{3};\quad x_2=\frac{-21+9}{18}=-\frac{12}{18}=-\frac{2}{3}.$$

Ответ. $-\dfrac{5}{3};\ -\dfrac{2}{3}.$

Задача 2

Избавиться от иррациональности в знаменателе $\dfrac{2}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{63}}$ и сравнить значение выражения с числом $\dfrac{2}{9}$.

Решение

Преобразуем сначала каждое слагаемое, стоящее в знаменателе дроби.

$\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{7+4-4\sqrt{7}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot 2+2^2}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}=\left|\sqrt{7}-2\right|=\sqrt{7}-2$,

так как $\sqrt{7}>2$, следовательно, $\sqrt{7}-2>0$.

$\sqrt{63}=\sqrt{9\cdot 7}=\sqrt{3^2\cdot 7}=3\sqrt{7}$. Тогда

$$\frac{2}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{63}}=\frac{2}{\sqrt{7}-2+3\sqrt{7}}=\frac{2}{4\sqrt{7}-2}=\frac{2}{2(2\sqrt{7}-1)}=\frac{1}{2\sqrt{7}-1}=$$
$$=\frac{2\sqrt{7}+1}{(2\sqrt{7}-1)(2\sqrt{7}+1)}=\frac{2\sqrt{7}+1}{4\cdot 7-1}=\frac{2\sqrt{7}+1}{27},$$

то есть $\dfrac{2}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{63}}=\dfrac{2\sqrt{7}+1}{27}$.

Сравним $\dfrac{2\sqrt{7}+1}{27}$ и $\dfrac{2}{9}$. Для этого разность этих чисел сравним с 0.

$\dfrac{2\sqrt{7}+1}{27}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{2\sqrt{7}+1}{27}-\dfrac{6}{27}=\dfrac{2\sqrt{7}-5}{27}=\dfrac{\sqrt{2^2\cdot 7}-\sqrt{5^2}}{27}=\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{25}}{27}>0$, так как $28>25$, следовательно, $\sqrt{28}-\sqrt{25}>0$, значит, $\dfrac{2}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{63}}=\dfrac{2\sqrt{7}+1}{27}>\dfrac{2}{9}$.

Ответ. $\dfrac{2}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{63}}=\dfrac{2\sqrt{7}+1}{27}>\dfrac{2}{9}$.

Задача 3

Найти значения параметра a, при которых уравнение $a(4a-2)x^2+(2a-1)x-10a+5=0$ имеет единственное решение.

Решение

Рассмотрим сначала значения параметра, при которых задача качественно меняется: $a(4a-2)=0$, $a=0$ или $a=0{,}5$.

При $a=0$ уравнение примет вид:

$$-x+5=0,$$

которое имеет единственный корень $x = 5$, то есть $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

При $a = 0{,}5$ уравнение примет вид:

$$0\cdot x=0,$$

которому удовлетворяет любое действительное значение x, то есть уравнение имеет бесконечно много решений, значит, $a = 0{,}5$ условию задачи не удовлетворяет.

При $a \neq 0$ и $a \neq 0{,}5$ $a(4a-2)\neq 0$, следовательно, квадратное уравнение будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Найдем дискриминант квадратного трехчлена:

$$D=\left((2a-1)\right)^2-4\cdot a(4a-2)\cdot(5-10a)=(2a-1)^2+40a(2a-1)^2=(2a-1)^2(1+40a).$$

Тогда условию задачи будут удовлетворять значения параметра, которые являются решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a\neq 0, \\ a\neq 0{,}5, \\ (2a-1)^2(1+40a)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\neq 0, \\ a\neq 0{,}5, \\ a=0{,}5,\ a=-\dfrac{1}{40}; \end{cases}$$

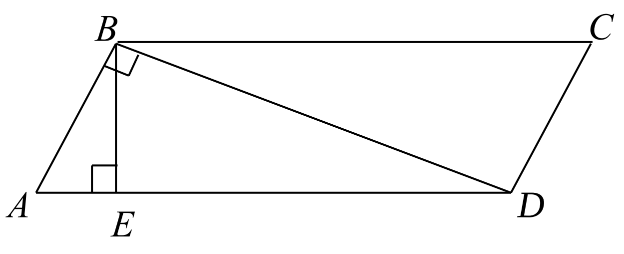
$$a=-\frac{1}{40}.$$

Ответ. При $a = 0$ или $a = -\dfrac{1}{40}$.

Задача 4

В параллелограмме $ABCD$ $BD\perp AB$, $AB : AD = 1 : 2$, BE – перпендикуляр к AD, $AE = 4$ см. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение



Рассмотрим ΔABD. Так как $BD\perp AB$, то $\angle ABD = 90°$, то есть ΔABD – прямоугольный, AB – катет, AD – гипотенуза. По условию $AB : AD = 1 : 2$, то есть $AD = 2AB$, значит, $\angle ADB = 30°$ по свойству прямоугольного треугольника, следовательно, $\angle BAD = 90° - \angle ADB = 90° - 30° = 60°$.

Рассмотрим ΔABE. Так как BE – перпендикуляр к AD, то $\angle AEB = 90°$, то есть ΔABE – прямоугольный. $\angle BAE = 60°$, следовательно, $\angle ABE = 90° –$ $– \angle BAE = 90° – 60° = 30°$. Тогда по свойству прямоугольного треугольника с углом в 30° $AB = 2AE = 2\cdot 4 = 8$(см), $AD = 2AB = 2\cdot 8 = 16$(см). По теореме Пифагора $AB^2 = AE^2 + BE^2$, $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см).

$S_{ABCD} = AD\cdot BE = 16\cdot 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$(см^2).

Ответ. $S_{ABCD} = 64\sqrt{3}$ см^2.

Задача 5

Найдите наименьшее натуральное число, половина которого – точный квадрат натурального числа, треть – точный куб натурального числа, а пятая часть – точная пятая степень натурального числа.

Решение

Пусть x – искомое натуральное число. Так как $\frac{x}{2} = a^2$, $\frac{x}{3} = c^3$, $\frac{x}{5} = y^5$, где a, c и y числа натуральные, то $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$ и $\frac{x}{5}$ являются натуральными числами, следовательно, x кратно 2, 3 и 5. По условию задачи нам нужно найти наименьшее из всех натуральных чисел, удовлетворяющих условию задачи, а 2, 3 и 5 являются простыми числами, следовательно, x не имеет других натуральных делителей, кроме 2, 3 и 5, то есть $x = 2^n\cdot 3^m\cdot 5^p$.

$\frac{x}{2} = a^2$, то есть $2^{n-1}\cdot 3^m\cdot 5^p = a^2$, где a – число натуральное, значит, $n–1$, m и p числа четные.

$\frac{x}{3} = c^3$, то есть $2^n\cdot 3^{m-1}\cdot 5^p = c^2$, где c – число натуральное, значит, n, $m–1$ и p кратны 3.

$\frac{x}{5} = y^5$, то есть $2^n\cdot 3^m\cdot 5^{p-1} = y^2$, где y – число натуральное, значит, n, m и $p–1$ кратны 5.

Наименьшее натуральное число n, кратное 3 и 5 и являющееся нечетным (так как $n–1$ четное) – 15, то есть $n = 15$.

Наименьшее натуральное число m, кратное 2 и 5 и имеющее при делении на 3 остаток 1 (так как $m–1$ кратно 3) – 10, то есть $m = 10$.

Наименьшее натуральное число p, кратное 2 и 3 и имеющее при делении на 5 остаток 1 (так как $p–1$ кратно 5) – 6, то есть $p = 6$.

Таким образом, наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию задачи, равно $x = 2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6} = 30233088000000$.

Ответ. $2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6} = 30233088000000$.