РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЯ 4 ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2021-2022 учебный год)

Задача 1

Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых встречается цифра 7, или тех, в записи которых её нет?

Решение

Количество шестизначных чисел, в записи которых нет цифры 7, равно $8 \cdot 9^5$ (первая цифра – любая, кроме 0 и 7, остальные цифры – любые кроме 7). Пятизначных чисел без семерки - $8 \cdot 9^4$, четырехзначных - $8 \cdot 9^3$, трехзначных - $8 \cdot 9^2$, двузначных - $8 \cdot 9$, однозначных - 8. Таким образом, чисел, не превосходящих миллион, в записи которых нет цифры 7,

$$8 \cdot 9^5 + 8 \cdot 9^4 + 8 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + 8 + 1 = 8 \cdot \frac{9^6 - 1}{9 - 1} + 1 = 9^6 = 531441.$$

Чисел, в записи которых есть 7,

$$10^6 - 9^6 = 468559$$

Ответ: чисел, в записи которых нет цифры 7, больше.

Задача 2

Группа студентов, состоящая из 25 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 94, причём «троек» больше, чем «пятерок», но меньше, чем «четвёрок». Кроме того, число «четвёрок» делится на 3, а число «пятёрок» - чётное. Определить, сколько каких оценок получили студенты группы.

Решение

Пусть получено *x* двоек, *y* троек, 3z четвёрок и 2t пятёрок.
По условию,

$$x + y + 3z + 2t = 25,$$
$$2x + 3y + 12z + 10t = 94,$$
$$2t < y < 3z.$$

Выразим из первого уравнения *x* и подставим во второе уравнение:

$$x = 25 - y - 3z - 2t,$$
$$y + 6z + 6t = 44$$
$$y + 3z + 2t \leq 24$$

Так как $t \geq 1$, $y \geq 3$. Кроме того, из уравнения видно, что y должно давать остаток 2 при делении на 6. Учитывая последнее неравенство, получаем, что y может быть равно 8 или 14.
Если $y = 8$, то

$$z + t = 6$$
$$3z + 2t \leq 16$$
$$t < 4, z \geq 3$$

При $z = 3$ $t = 3$, $3z + 2t = 15$, то есть $x = 2$.
При $z = 4$ $t = 2$, $3z + 2t = 16$, $x = 1$
При $z = 5$ $t = 1$, $3z + 2t = 17 > 16$.
Если $y = 14$, то

$$z + t = 5$$
$$3z + 2t \leq 10$$
$$t < 7, z \geq 5$$

Эта система в натуральных числах решений не имеет.
Ответ: 2 двойки, 8 троек, 9 четверок, 6 пятерок
или 1 двойка, 8 троек, 12 четверок, 4 пятерки.

Задача 3

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}.$$

Решение

Обозначим

$$x + 2y = z^3, x - y + 2 = t^3.$$

Сложив эти равенства, получим

$$2x + y + 2 = z^3 + t^3.$$

Таким образом, система примет вид

$$\begin{cases} z + t = 3 \\ z^3 + t^3 = 9 \end{cases}$$

Так как $z^3 + t^3 = (z + t)(z^2 + t^2 - zt) = (z + t)^3 - 3zt(z + t)$, получаем

$$\begin{cases} z + t = 3 \\ zt = 2 \end{cases}$$

Таким образом, по теореме Виета, z и t – корни квадратного уравнения

$$u^2 - 3u + 2 = 0,$$

то есть 1 и 2.
Если $z = 1, t = 2$, то

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$x = 13/3, \ \ y = -5/3.$$

Если $z = 2, t = 1$, то

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$x = 2, \ \ y = 3.$$

Ответ: $x = 13/3, \ \ y = -5/3$ или $x = 2, \ \ y = 3$.

Задача 4

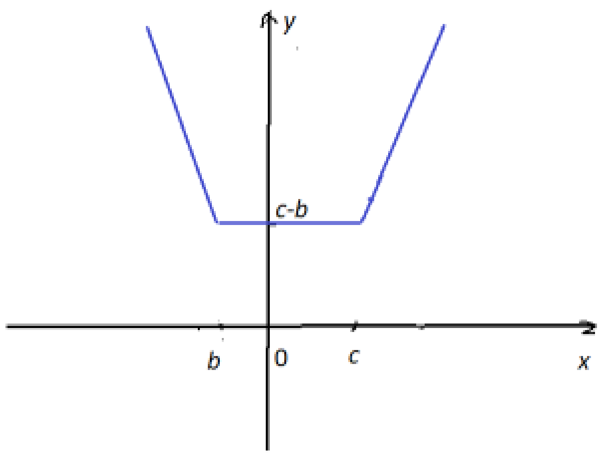
Найти все *a,* при которых функция $f(x) = |x - a + 1| + |x + 3a|$ является четной.

Решение

Пусть b – меньшее из чисел $a - 1$, $-3a$, а с – большее из этих двух чисел. Тогда

$$f(x) = |x - b| + |x - c|$$

Раскроем модули.
При $x < b$ $f(x) = b - x + c - x = b + c - 2x$;
при $b \le x \le c$ $f(x) = x - b + c - x = c - b$,
при $x > c$ $f(x) = x - b + x - c = 2x - b - c$.
Функция $f(x)$ четная, если её график симметричен относительно оси 0у. Для этого достаточно потребовать, чтобы точки b и c на числовой оси находились на равном расстоянии от нуля, то есть $b + c = 0$.



Получаем

$$a - 1 - 3a = 0, a = -1/2.$$

$$f(x) = |x + 3/2| + |x - 3/2|$$

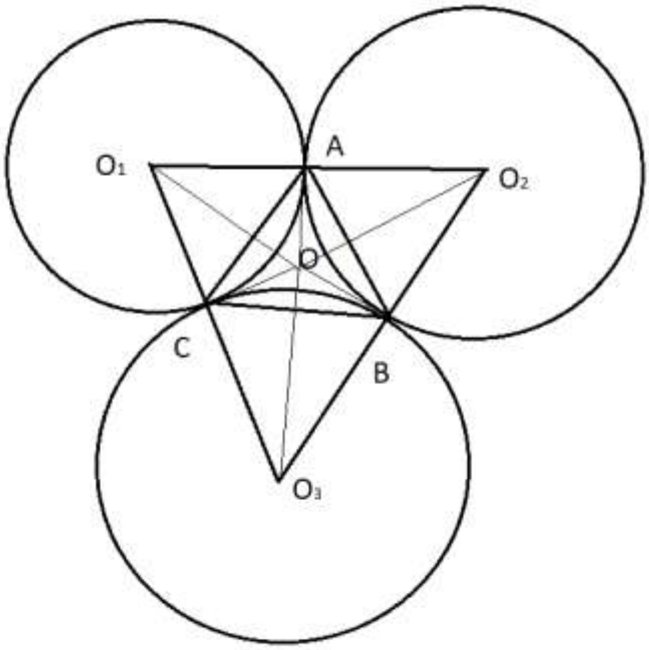
Ответ: $a = -1/2$

Задача 5

Три окружности радиусов 15, 16 и 18 касаются внешне попарно друг друга. Найти радиус окружности, проходящей через точки касания.

Решение

Пусть *A*, *B*, *C* – точки касания. Эти точки лежат на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$, образованного центрами окружностей. Треугольники O_1AC, O_2AB, O_3BC равнобедренные, поэтому биссектрисы треугольника $O_1O_2O_3$ являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника *ABC*. Следовательно, центр O окружности, описанной около треугольника *ABC*, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$.



Далее, пусть угол O_1AO равен α Тогда

$$\angle O_1CO = \alpha, \angle O_3CO = \angle O_3BO = \pi - \alpha, \angle O_2AO = \angle O_2BO = \alpha.$$

Так как $\angle O_2AO$ смежный к углу O_1AO и равен ему, $\alpha = \pi/2$.

Таким образом, окружность, описанная около треугольника *ABC*, вписана в треугольник $O_1O_2O_3$.

Стороны этого треугольника равны 31, 33 и 34, полупериметр $p = 49$, площадь

$$S = \sqrt{49 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 15} = 84\sqrt{30},$$

радиус вписанной окружности

$$\frac{S}{p} = \frac{12\sqrt{30}}{7}.$$

Ответ: $12\sqrt{30}/7$.