Задание № 5

Задача 1

Расстояние между поселками, находящимися на берегу реки, лодка прошла по течению реки за 3 ч со скоростью 20 км/ч. На обратный пусть она затратила 5 ч. Найдите скорость течения реки и скорость лодки в стоячей воде (собственную скорость лодки).

Решение

Так как расстояние между поселками лодка прошла по течению реки за 3 ч со скоростью 20 км/ч, то это расстояние равно $3 \cdot 20 = 60$(км). На обратный путь лодка затратила 5 ч, следовательно, скорость лодки против течения реки равна $60:5 = 12$(км/ч).

Пусть собственная скорость лодки равна x км/ч, а скорость течения реки – y км/ч. Тогда скорость лодки по течению реки равна $(x + y)$ км/ч, а против течения реки – $(x – y)$ км/ч. По условию задачи $x + y = 20$, а $x – y = 12$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 32, \\ y = 20 - x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16, \\ y = 4. \end{cases}$$

Таким образом, получили, что собственная скорость лодки равна 16 км/ч, а скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ. Собственная скорость лодки равна 16 км/ч, а скорость течения реки равна 4 км/ч.

Задача 2

Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{a+35}{3ax-7}+5=0.$

Решение

Запишем уравнение в виде $\frac{a+35}{3ax-7}=\frac{-5}{1}$. В такой записи уравнение с параметром представляет собой равенство двух отношений, то есть пропорцию. Задача качественно изменится, если один из членов пропорции станет равным нулю.

I. $a + 35 = 0$, $a = –35$.

При $a = –35$ уравнение примет вид $\frac{0}{-105x-7}=-5$. Полученное уравнение решений не имеет.

II. $a + 35 \neq 0$, $a \neq –35$.

При $a \neq –35$ три из четырех членов пропорции отличны от нуля, следовательно, в силу равенства двух отношений, и четвертый член пропорции отличен от нуля, поэтому исходное уравнение равносильно следующему (то есть оба уравнения имеют одно и то же множество решений):

$$a + 35 = –5(3ax – 7);$$
$$a + 35 = –15ax + 35;$$
$$15ax = –a.$$

Получили линейное уравнение с параметром, которое качественно изменяется при $a = 0$.

II.1. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$. Решением этого уравнения является любое действительное число.

II.2. Если $a \neq 0$ и $a \neq –35$, то уравнение $15ax = –a$, а, следовательно, и исходное уравнение, имеет единственный корень, равный $x=-\frac{a}{15a}=-\frac{1}{15}$.

Ответ. При $a = –35$ уравнение корней не имеет;

при $a = 0$ корнем уравнения является любое действительное число;

при $a \neq 0$ и $a \neq –35$ $x = -\frac{1}{15}$.

Задача 3

Известно, что $a + b + c = 0$. Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 2(ab + ac + bc)^2 = 2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2.$$

Решение

Чтобы доказать равенство четырех выражений, достаточно доказать, что первое выражение равно второму, второе равно третьему, третье равно четвертому, а четвертое равно первому или доказать, что одно из этих выражений равно каждому из остальных.

Так как по условию $a + b + c = 0$, то и $(a + b + c)^2 = 0$.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

значит, $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0$, следовательно,

$$a^2 + b^2 + c^2 = -(2ab + 2ac + 2bc).$$

Из равенства двух выражений следует равенство квадратов этих выражений, то есть $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (-(2ab + 2ac + 2bc))^2$. Возведем в квадрат левую и правую части равенства. Учитывая, что $a + b + c = 0$, получим

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2,$$

$$(-(2ab + 2ac + 2bc))^2 = 4(ab + ac + bc)^2 =$$

$$= 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2) =$$

$$= 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c)) = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Таким образом,

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

или

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

и равенство первого и второго выражений доказано.

Преобразуем теперь третье выражение, учитывая, что $a + b + c = 0$, получим

$$2(ab + ac + bc)^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2) =$$

$$= 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c)) = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

и равенство второго и третьего выражений доказано.

Преобразуем теперь четвертое выражение.

$$2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2 = \frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2).$$

Учитывая, что $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$ и
$2(ab + ac + bc)^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$, получим

$$2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)=$$

$$=\frac{1}{2}(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=$$

$$=2(ab+ac+bc)^2$$

и равенство третьего и четвертого выражений доказано.

$$2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)=$$

$$=\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4+a^4+b^4+c^4)=a^4+b^4+c^4$$

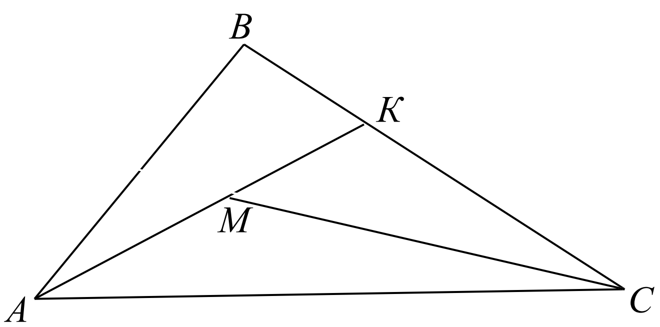
и равенство четвертого и первого выражений доказано.

Таким образом, мы доказали, что первое выражение равно второму, второе выражение равно третьему, третье выражение равно четвертому, а четвертое выражение равно первому, следовательно, мы **доказали, что все четыре выражения равны между собой**.

Задача 4

Внутри треугольника ABC взята точка M так, что $\angle BCM + \angle BAM > \angle MAC$. Докажите, что $AC > MC$.

Решение



Пусть AM пересекает сторону BC в точке K.

$\angle AMC$ – внешний угол ΔCMK, следовательно, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle AMC = \angle MCK + \angle MKC = \angle BCM + \angle MKC$.

$\angle MKC$ – внешний угол ΔABK, следовательно, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle MKC = \angle ABK + \angle BAK = \angle ABK + \angle BAM$.

Тогда получаем, что $\angle AMC = \angle BCM + \angle MKC = \angle BCM + \angle ABK + \angle BAM > \angle BCM + \angle BAM > \angle MAC$, то есть в ΔAMC $\angle AMC > \angle MAC$, следовательно, в силу того, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, $AC > MC$, **что и требовалось доказать**.

Задача 5

В велогонках приняли участие пятеро школьников. После гонок пятеро болельщиков заявили:

- Коля занял 1-е место, а Ваня – 4-е;
- Серёжа занял 2-е место, а Ваня – 4-е;
- Серёжа занял 2-е место, а Коля – 3-е;
- Толя занял 1-е место, а Надя – 2-е;
- Надя заняла 3-е место, а Толя – 5-е.

Зная, что одно из показаний каждого болельщика верное, а другое – неверное, найдите правильное распределение мест.

Решение

Если предположить, что верно первое утверждение первого болельщика, то 1-е место занял Коля, тогда в силу условия задачи второе утверждение первого болельщика, а, следовательно, и второе утверждение второго болельщика о том, что Ваня занял 4-е место, не верно, значит верно первое утверждение второго болельщика о том, что 2-е место занял Сергей. В этом случае получаем, что оба утверждения четвертого болельщика о том, что 1-е место занял Толя, а 2-е место заняла Надя, не верны, что противоречит условию задачи. Значит, наше предположение не верно, то есть первое утверждение первого болельщика не верно.

Тогда в силу условия задачи верно второе утверждение первого болельщика о том, что **4-е место занял Ваня**, значит верно и второе утверждение второго болельщика, а поэтому первое утверждение второго болельщика не верно, то есть Сергей не занял 2-е место, следовательно, не верно и первое утверждение третьего болельщика, а тогда в силу условия задачи верно второе утверждение третьего болельщика, то есть **3-е место занял Коля**. Тогда первое утверждение пятого болельщика о том, что 3-е место заняла Надя, не верно, следовательно, верно второе утверждение пятого болельщика, то есть **5-е место занял Толя**. В этом случае не верно первое утверждение четвертого болельщика, а поэтому верно второе утверждение четвертого болельщика, то есть **2-е место заняла Надя**. В этом случае выполняется условие задачи о том, что у каждого из пяти болельщиков одно утверждение верно, а другое нет. Из перечисленных болельщиками участников остался Сергей, который занял 1-е место, так как все остальные места заняли другие из перечисленных участников.

Ответ. 1-е место – Сережа, 2-е место – Надя, 3-е место – Коля, 4-е место – Ваня, 5-е место – Толя.