Задание № 5

Задача 1

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби: $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+1}$.

Решение.

Избавиться от иррациональности в знаменателе – это значит преобразовать дробь к равной ей дроби, у которой знаменатель является числом целым.

В знаменателе дроби есть два слагаемых, содержащих квадратные корни. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на такое выражение, чтобы в знаменателе можно было воспользоваться формулой разности квадратов. Умножим сначала числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{7}+\sqrt{3}-1$. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-1}{7-(3-2\sqrt{3}+1)}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+3}.$$

После всех преобразований мы получаем дробь, в знаменателе которой остался один квадратный корень. Умножим теперь числитель и знаменатель дроби на $2\sqrt{3}-3$, чтобы воспользовавшись еще раз формулой разности квадратов, получить в знаменателе целое число. Получим

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+3}=\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)}=\frac{2\sqrt{21}-3\sqrt{7}+6-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3}{12-9}=$$

$$=\frac{2\sqrt{21}-3\sqrt{7}-5\sqrt{3}+9}{3}.$$

Таким образом, получили, что $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{21}-3\sqrt{7}-5\sqrt{3}+9}{3}$.

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{21}-3\sqrt{7}-5\sqrt{3}+9}{3}$.

Задача 2

При каких значениях параметра a решением системы $\begin{cases} x^2 - x(4a+1) + 3a^2 + 3a < 0, \\ x > 4 \end{cases}$ является промежуток длины 2?

Решение

Найдем корни квадратного трехчлена и разложим квадратный трехчлен на множители. Для нахождения корней квадратного трехчлена воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета. Так как $3a(a + 1) = 3a^2 + 3a$, $3a + (a + 1) = 4a + 1$, то числа $3a$ и $a + 1$ являются корнями квадратного трехчлена $x^2 - x(4a+1) + 3a^2 + 3a$, следовательно, $x^2 - x(4a+1) + 3a^2 + 3a = (x - 3a)(x - a - 1)$. Тогда система неравенств примет вид:

$$\begin{cases} (x - 3a)(x - a - 1) < 0, \\ x > 4. \end{cases}$$

Решением квадратного неравенства является интервал, концами которого будут корни квадратного трехчлена. Если корни квадратного трехчлена совпадают, то квадратное неравенство решений не имеет, следовательно, система неравенств решений не имеет и условие задачи выполняться не будет.

Возможны два случая.

I. $3a < a + 1$, $a < 0{,}5$. Тогда система неравенств примет вид

$$\begin{cases} 3a < x < a + 1, \\ x > 4. \end{cases}$$

Так как $a < 0{,}5$, то $a + 1 < 1{,}5 < 4$, следовательно, система решений не имеет и значений параметра $a < 0{,}5$, удовлетворяющих условию задачи, нет.

II. $a + 1 < 3a$, $a > 0{,}5$. Тогда система неравенств примет вид

$$\begin{cases} a + 1 < x < 3a, \\ x > 4. \end{cases}$$

II.1. Если $3a \le 4$, то есть $0{,}5 < a \le \frac{4}{3}$, то система неравенств решений не имеет и условие задачи выполняться не будет.

II.2. Если $a + 1 < 4 < 3a$, $\frac{4}{3} < a < 3$, то решением системы неравенств является промежуток $(4; 3a)$, длина которого равна $3a - 4$. Найдем значение параметра, при котором выражение $3a - 4$ равно 2:

$$3a - 4 = 2,$$

$$3a = 6,$$
$$a = 2.$$

Так как $\frac{4}{3} < 2 < 3$,, то $a = 2$ удовлетворяет условию задачи.

II.3. Если $a + 1 \geq 4$, $a \geq 3$, то решением системы неравенств является промежуток $(a + 1; 3a)$, длина которого равна $3a - (a + 1) = 2a - 1$. Найдем значение параметра, при котором выражение $2a - 1$ станет равным 2:

$$2a - 1 = 2,$$
$$a = 1{,}5.$$

Так как $1{,}5 < 3$, то $a = 1{,}5$ условию задачи не удовлетворяет.

Ответ. $a = 2$.

Задача 3

Найти координаты точек пересечения графика квадратичной функции с осями координат, если сумма коэффициентов соответствующего ей квадратного трехчлена равна –2, а наибольшее значение, равное 0,25, достигается при $x = 2{,}5$.

Решение

Найдем сначала уравнение квадратичной функции, удовлетворяющей условиям задачи. Так как сумма коэффициентов соответствующего функции квадратного трехчлена равна –2, то $y(1) = -2$. В силу того, что наибольшее значение функции, равное 0,25, достигается при $x = 2{,}5$, вершина параболы имеет координаты $(2{,}5; 0{,}25)$, а ветви параболы направлены вниз. Тогда уравнение параболы можно записать в виде $y = a(x - 2{,}5)^2 + 0{,}25$. Значение a найдем из условия $y(1) = -2$. Получим

$$-2 = a(1 - 2{,}5)^2 + 0{,}25;$$
$$2{,}25a = -2{,}25;$$
$$a = -1.$$

Таким образом, уравнение искомой квадратичной функции имеет вид: $y = -(x - 2{,}5)^2 + 0{,}25$.

Найдем точку пересечения графика квадратичной функции с осью ординат. Так как все точки оси ординат имеют абсциссу, равную 0, а $y(0) = -(0 - 2{,}5)^2 + 0{,}25 = -6{,}25 + 0{,}25 = -6$, то точка пересечения графика квадратичной функции с осью ординат имеет координаты $(0; -6)$.

Найдем точки пересечения графика квадратичной функции с осью абсцисс. Так как все точки оси абсцисс имеют ординату, равную нулю, то абсциссы точек пересечения графика квадратичной функции с осью абсцисс являются корнями квадратного уравнения $-(x - 2{,}5)^2 + 0{,}25 = 0$. Решим уравнение:

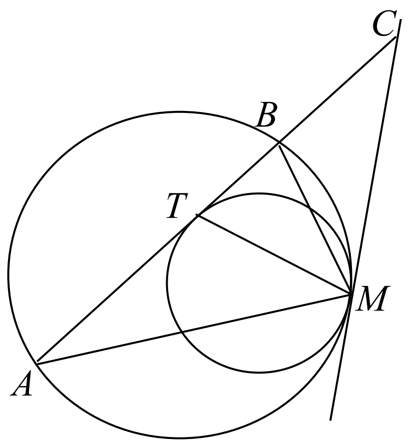
$$-(x-2{,}5)^2+0{,}25=0;$$
$$(x-2{,}5)^2=0{,}25;$$
$$x-2{,}5=\pm 0{,}5;$$
$$x=2{,}5\pm 0{,}5.$$

Следовательно, точки пересечения графика квадратичной функции с осью абсцисс имеют координаты $(3;\ 0)$ и $(2;\ 0)$.

Ответ. $(0;\ -6)$, $(3;\ 0)$, $(2;\ 0)$.

Задача 4

Две окружности касаются внутренним образом в точке M. AB – хорда большей окружности, которая касается меньшей окружности в точке T. Докажите, что MT – биссектриса угла AMB.



Решение

Проведем через точку M общую касательную к обеим окружностям, точку пересечения этой общей касательной с прямой AB обозначим C.

Из точки C к окружности меньшего радиуса проведены две касательные, Следовательно, $CM = CT$ как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки. Значит, ΔCTM – равнобедренный, $\angle CTM = \angle CMT$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

$\angle CTM$ – внешний угол ΔAMT, значит, $\angle CTM = \angle TAM + \angle AMT$ по свойству внешнего угла треугольника.

$\angle CMT = \angle CMB + \angle BMT$.

$\angle CMB = \frac{1}{2}\smile BM$ как угол между касательной и хордой, $\angle MAB = \frac{1}{2}\smile BM$ как вписанный, значит, $\angle CMB = \angle MAB$.

Так как $\angle CTM = \angle CMT$, $\angle CTM = \angle TAM + \angle AMT$, $\angle CMT = \angle CMB + \angle BMT$, $\angle CMB = \angle TAM$, то $\angle AMT = \angle BMT$, следовательно, MT – биссектриса $\angle AMB$, **что и требовалось доказать**.

Задача 5

В начале олимпиады ученик посмотрел на часы, это было между 10 и 11 часами утра. Окончив работу между 2 и 3 часами дня, он еще раз взглянул на часы и заметил, что за это время часовая и минутная стрелки циферблата точно поменялись местами. В какое время ученик окончил работу?

Решение

Пусть начало олимпиады было 10 часов x минут, а окончание олимпиады в 14 часов y минут. Тогда от начала олимпиады до 11 часов часовая стрелка прошла $\frac{55-y}{60}$ часть длины окружности циферблата, а минутная стрелка – $1-\frac{x}{60}$ часть длины окружности циферблата, а от 14 часов до конца олимпиады часовая стрелка прошла $\frac{10-x}{60}$ часть длины окружности циферблата, а минутная стрелка – $\frac{y}{60}$ часть длины окружности циферблата. Так как скорость движения минутной стрелки в 12 раз больше скорости движения часовой стрелки, то получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1-\frac{x}{60}=12\cdot\frac{55-y}{60}, \\ \frac{y}{60}=12\cdot\frac{x-10}{60}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60-x=660-12y, \\ y=12x-120; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=12y-600, \\ y=144y-7320; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=12y-600, \\ 143y=7320; \end{cases}$$

$$y=\frac{7320}{143}=51\frac{27}{143}.$$

Ответ. В 14 часов $51\frac{27}{143}$ минуты.