РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 5 ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2021-2022 учебный год)

Задача 1

Вместо звездочек подставьте цифры так, чтобы семизначное число 50*0*05 делилось на 19.

Решение.

Пусть a и b – пропущенные цифры, то есть искомое число – 50a0b05.
Получаем

$$50a0b05 = 5000000 + a \cdot 10000 + b \cdot 100 + 5.$$

Поделим числа 5000000, 10000,100 на 19 с остатком.

$$5000000 = 263157 \cdot 19 + 17, 10000 = 526 \cdot 19 + 6, 100 = 19 \cdot 5 + 5.$$

Таким образом, число $6a + 5b + 4$ должно делиться на 19. Так как a и b не больше 9, это число не больше, чем 103, то есть может равняться 19, 38, 57, 76, 95.

Рассмотрим эти случаи.

$6a + 5b + 4 = 19$, $6a + 5b = 15$, a делится на 5, поэтому $a = 0$, $b = 3$.
$6a + 5b + 4 = 38$, $6a + 5b = 34$, b - четное число, подходят $a = 4$, $b = 2$.
$6a + 5b + 4 = 57$, $6a + 5b = 53$, b - нечетное число, подходят $a = 8$, $b = 1$ и $a = 3$, $b = 7$.
$6a + 5b + 4 = 76$, $6a + 5b = 72$, b делится на 6, подходят $a = 7$, $b = 6$.
$6a + 5b + 4 = 95$, $6a + 5b = 91$, b - нечетное число, так как $a \leq 9$, $5b \geq 37$, то есть может быть только $b = 9$. Но тогда $6a = 46$.

Ответ: 5000305, 5040205, 5080105, 5030705.

Задача 2

На полке помещается 30 томов собрания сочинений Диккенса. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

Решение

Всего существует 30! способов расставить книги. Способов расставить книги так, что первый и второй тома стоят рядом, и сначала идет первый том - 29! (первый и второй том считаем как одну книгу). Столько же способов расставить книги так, что первый и второй том стоят рядом, и сначала идет второй том. Способов расставить книги, чтобы первый и второй тома не стояли рядом

$$30! - 2 \cdot 29! = 29! \cdot 28.$$

Ответ: $29! \cdot 28$

Задача 3

Мастер, работая вместе с учеником, помог выполнить часть задания, а затем прекратил свою работу. Оставшуюся часть задания ученик закончил один. В результате время, затраченное на выполнение задания, оказалось в три раза меньше времени, необходимого ученику для выполнения этого задания им одним. Во сколько раз мастер затратил бы больше времени, выполняя один все задание по сравнению с тем временем, которое он затратил на помощь ученику?

Решение

Пусть мастеру на выполнение всей работы потребовалось бы x часов, а его ученику – y часов. Тогда доля работы, которую выполняет за час мастер, равна $1/x$, а ученик за час выполняет $1/y$ часть работы. Пусть мастер и ученик совместно работали *t* часов, и *u* часов ученик работал один. Тогда

$$t\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + u\frac{1}{y} = 1,$$

$$3(t + u) = y.$$

Нам надо найти x/t.

Из первого равенства получаем

$$\frac{t}{x} = 1 - (u + t)\frac{1}{y}.$$

Используя второе равенство, находим

$$\frac{t}{x} = 1 - \frac{y}{3}\frac{1}{y} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{x}{t} = 3/2.$$

Ответ: в полтора раза.

Задача 4

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y + 1 \ge 0 \\ 3y + 6 \ge 2|x| \end{cases}.$$

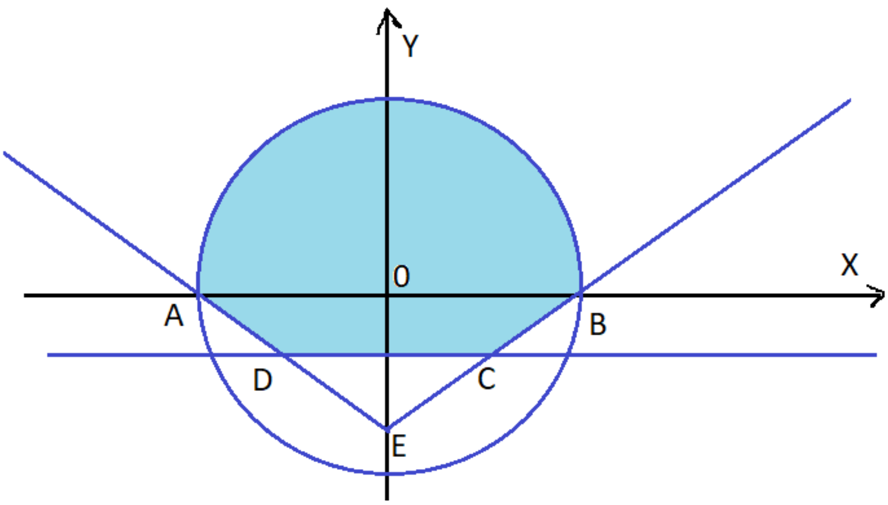
Решение

Рассмотрим первое неравенство. Равенство $x^2 + y^2 = 9$ задаёт на плоскости окружность радиуса 3 с центром вначале координат. Эта окружность делит плоскость на две части, в одной неравенство выполняется, а в другой – нет. Чтобы определить нужную часть, подставим в неравенство точку (0,0). В этой точке неравенство справедливо, значит, нам подходит область внутри окружности.

Рассмотрим второе неравенство. Равенство $y + 1 = 0$ задаёт прямую, параллельную оси $0x$, и делящую плоскость на две полуплоскости. Возьмем опять начало координат в качестве контрольной точки и убедимся, что нам подходит верхняя полуплоскость.

Рассмотрим третье неравенство. Заменим неравенство равенством и раскроем модуль. При $x < 0$ получим уравнение прямой $3y + 2x + 6 = 0$, при $x \ge 0$ – уравнение прямой $3y - 2x + 6 = 0$. Из двух частей плоскости, на которые делит итоговая ломаная координатную плоскость, выбираем ту, где выполняется третье неравенство системы.

Таким образом, фигура, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств, состоит из полукруга и трапеции *ABCD*.



Длина отрезка *AB* равна 6, высота трапеции равна 1. Отрезок *CD* – средняя линия в треугольнике *ABE*, его длина поэтому равна 3. Таким образом, площадь трапеции –

$$\frac{1}{2}(3+6)=\frac{9}{2}.$$

Площадь полукруга равна

$$\frac{1}{2}\pi\cdot 3^2=\frac{9}{2}\pi.$$

Ответ: $4{,}5(\pi+1)$.

Задача 5

Найдите прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются целыми числами и удвоенная площадь которого равна его утроенному периметру.

Решение

Пусть стороны треугольника равны a, b, c. Тогда

$$a^2+b^2=c^2,$$
$$ab=3(a+b+c).$$

Прибавим к первому равенству второе, умноженное на 2.

$$(a+b)^2=c^2+6(a+b)+6c,$$
$$(a+b-c)(a+b+c)=6(a+b+c).$$

Таким образом, $a+b-c=6$.

Подставим $c=a+b-6$ во второе уравнение:

$$ab=3(a+b+a+b-6)=6(a+b-3).$$
$$ab-6a-6b+18=0,$$
$$a(b-6)-6(b-6)=18,$$
$$(a-6)(b-6)=18.$$

Числа a и b либо оба больше 6, либо оба меньше шести. Во втором случае запишем последнее равенство как

$$(6-a)(6-b)=18.$$

При этом оба сомножителя меньше, чем 6.

Число 18 можно разложить на множители так: 1 и 18, 2 и 9, 3 и 6. Во всех ситуациях только один из множителей меньше 6, поэтому используем равенство

$$(a-6)(b-6)=18.$$

$a-6=1$, $b-6=18$, то есть $a=7$, $b=24$, $c=7+24-6=25$.

$a-6=2$, $b-6=9$, то есть $a=8$, $b=15$, $c=8+15-6=17$.

$a-6=3$, $b-6=6$, то есть $a=9$, $b=12$, $c=9+12-6=15$.

Ответ: стороны треугольника 7, 24, 25, или 8, 15, 17, или 9, 12, 15.