Задание № 1.

Задача 1

Какое из чисел больше: 63^{10} или 9^{21}? Ответ обосновать.

Решение.

1 способ. $63^{10} < 64^{10} = (8^2)^{10} = 8^{20} < 9^{20} < 9^{21}$.

2 способ. $63^{10} = (7\cdot 9)^{10} < (9\cdot 9)^{10} = (9^2)^{10} = 9^{20} < 9^{21}$.

Ответ. 9^{21}.

Задача 2

Найдите натуральные числа x, y, z такие, что $x \le y \le z$ и

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Решение.

Так как $x \le y \le z$ и x, y и z числа натуральные, следовательно, положительные, то $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{z}$, значит, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$. Так как $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, то $\frac{3}{x} \ge 1$, следовательно, $x \le 3$. Возможны случаи: 1) $x = 1$; 2) $x = 2$; 3) $x = 3$.

1) $x = 1$. Тогда равенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ принимает вид $1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ или $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, что невозможно, так как y и z числа положительные, следовательно, и число $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ является положительным.

2) $x = 2$. Тогда равенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ принимает вид $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ или $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Так как $\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$, откуда $\frac{2}{y}\ge\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}\ge\frac{1}{4}$, $y\le 4$. В силу того, что $x = 2$ и $x \le y$, возможны случаи: 2.1) $y = 2$; 2.2) $y = 3$; 2.3) $y = 4$.

2.1) Если $y = 2$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{z}=0$, что невозможно.

2.2) Если $y = 3$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, $z = 6$. Получили решение $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$.

2.3) Если $y = 4$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, $z = 4$. Получили решение $x = 2$, $y = 4$, $z = 4$.

3) $x = 3$. Тогда равенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ принимает вид $\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ или $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$. Так как $\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$, откуда $\frac{2}{y}\ge\frac{2}{3}$, $\frac{1}{y}\ge\frac{1}{3}$, $y\le 3$. В силу того, что $x = 3$ и $x \le y$, $y = 3$. Тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$, $z = 3$. Получили решение $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.

Ответ. $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$ или $x = 2$, $y = 4$, $z = 4$ или $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.

Задача 3

Найдите площадь треугольника, стороны которого лежат на прямых $x - 5 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$, $5x - 4y + 7 = 0$?

Решение.

Найдем сначала координаты точек пересечения прямых. Пусть A – точка пересечения прямых $x - 5 = 0$ и $x - 4y + 11 = 0$, тогда координаты точки A удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x-5=0, \\ x-4y+11=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5, \\ 5-4y+11=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5, \\ 4y=16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$$

Значит, $A(5;\,4)$.

Пусть B – точка пересечения прямых $x-4y+11=0$ и $5x-4y+7=0$, тогда координаты точки B удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x-4y+11=0, \\ 5x-4y+7=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+4y=11, \\ 5x-4y=-7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x=4, \\ 4y=11+x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ 4y=11+1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ 4y=12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$$

Значит, $B(1;\,3)$.

Пусть C – точка пересечения прямых $x-5=0$ и $5x-4y+7=0$, тогда координаты точки C удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x-5=0, \\ 5x-4y+7=0; \end{cases}$$

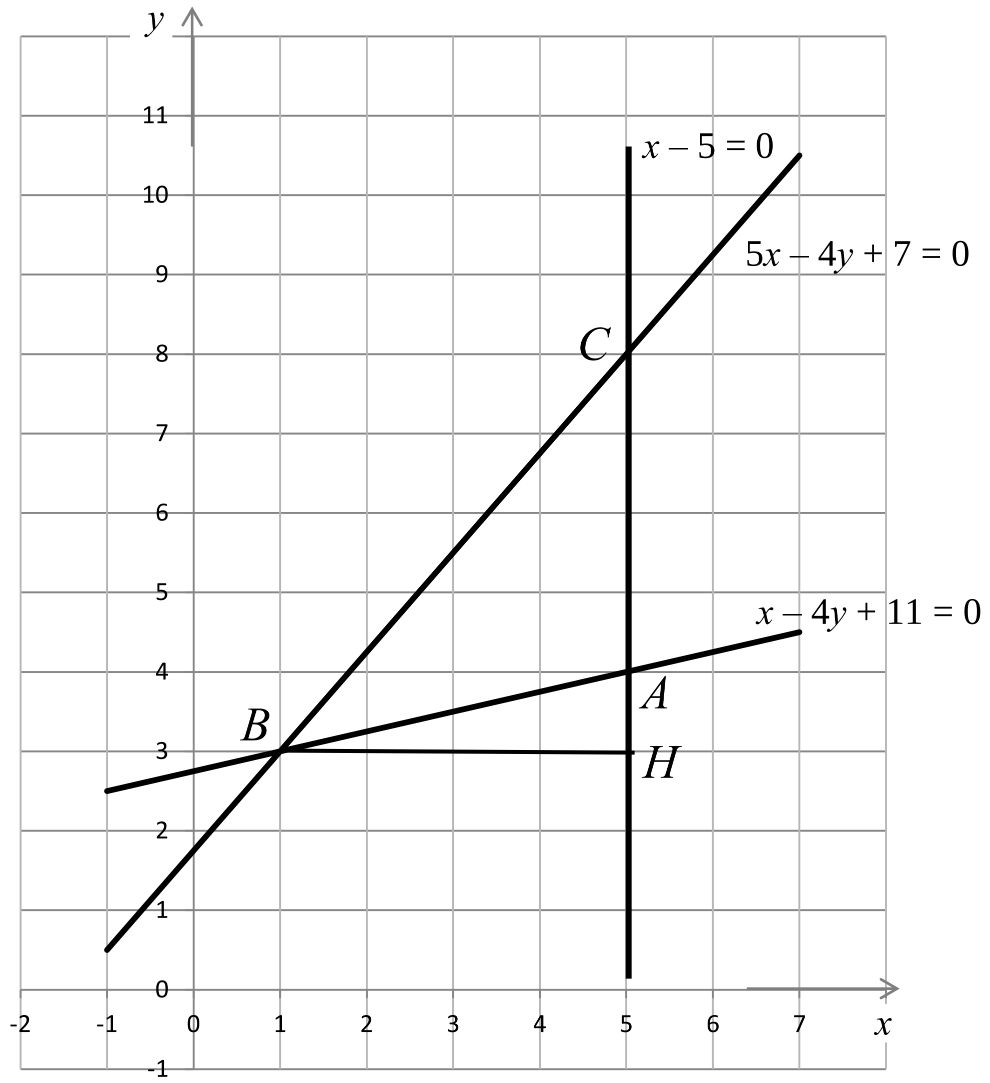
$$\begin{cases} x=5, \\ 5\cdot 5-4y+7=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ 4y = 32; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 8. \end{cases}$$

Значит, $C(5; 8)$.

Построим в системе координат треугольник ABC.



Проведем высоту BH. Точка H имеет координаты (5; 3). Тогда $AC = 8 - 4 = 4$, $BH = 5 - 1 = 4$. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

Ответ. $S_{ABC} = 8$.

Задача 4

Цена билета для входа в художественный музей была 800 руб. После снижения её количество посетителей увеличилось на треть, а денежный сбор за билеты увеличился на одну пятую. На сколько рублей снизили цену на билеты?

Решение.

Пусть x человек – количество посетителей художественного музея до снижения цены на входной билет, а y руб. – величина, на которую снизили цену входного билета. Тогда денежный сбор за билеты до снижения цены составлял $800x$ руб. После снижения цены входного билета количество посетителей художественного музея составило $\frac{4}{3}x$ человек, а денежный сбор за билеты стал равен $\frac{4}{3}x\cdot(800-y)$ руб. или $1{,}2\cdot 800x$ руб. Получаем уравнение

$$\frac{4}{3}x\cdot(800-y) = 1{,}2\cdot 800x;$$

$$\frac{4}{3}\cdot(800-y) = \frac{6}{5}\cdot 800;$$

$$10\cdot(800-y) = 9\cdot 800;$$

$$10y = 10\cdot 800 - 9\cdot 800;$$

$$10y = 800;$$

$$y = 80.$$

Значит, цену на входной билет в художественный музей снизили на 80 руб.

Ответ. На 80 руб.

Задача 5

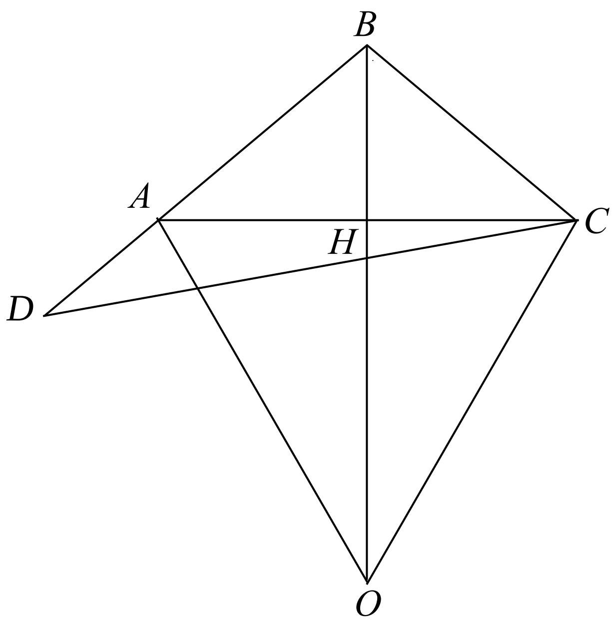
В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $\angle B = 100°$. На продолжении стороны AB за точку A отмечена такая точка D, что $BD = AC$. Найдите величину угла ACD.

Решение.

Так как ΔABC – равнобедренный, $AB = AC$, то $\angle BAC = \angle BCA$ как углы при основании равнобедренного треугольника. По теореме о сумме углов треугольника $\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 180°$, тогда

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}\cdot(180° - \angle ABC) = \frac{1}{2}\cdot(180° - 100°) = 40°.$$

Проведем медиану BH ΔABC. По свойству медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, BH будет также биссектрисой и высотой ΔABC. Значит, $\angle ABH = \angle CBH = \frac{1}{2}\cdot\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 100° = 50°$.



Проведем луч AO так, чтобы $\angle OAC = 60°$ и точки B и O лежали по разные стороны относительно прямой AC. Обозначим за точку O точку пересечения AO и BH. Соединим точки C и O.

В ΔAOC OH является медианой и высотой, следовательно, ΔAOC равнобедренный, $AO = CO$, $\angle OCA = \angle OAC = 60°$. Тогда $\angle AOC = 180° - \angle OCA - \angle OAC = 180° - 60° - 60° = 60°$. Значит, ΔAOC – равносторонний, $AO = CO = AC = BD$.

Рассмотрим ΔBOC и ΔCDB. BC– общая сторона, $DB = CO$, $\angle OCB = \angle ACB + \angle ACO = 40° + 60° = 100° = \angle DBC$. Значит, $\Delta BOC = \Delta CDB$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle DCB = \angle OBC = 50°$.

Тогда $\angle ACD = \angle DCB - \angle ACB = 50° - 40° = 10°$.

Ответ. $\angle ACD = 10°$.