7 класс **2022-2023 уч.г.**

Задание № 2

Задача 1

Каково наименьшее натуральное n, такое, что $n!$ делится на 2022^3 ?
($n!$ представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.)

Решение.

Разложим число 2022 на множители: $2022=2\cdot3\cdot337$. Докажем, что число 337 является простым. Так как $18^2 < 337 < 19^2$, то, для того, чтобы доказать, что число 337 является простым, достаточно показать, что оно не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих 18. Этими простыми числами являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Число 337 не делится на 2 и на 5, так как последняя цифра 7 на 2 и на 5 не делится. Сумма цифр числа 337 3+3+7=13, 13 не делится на 3, значит, 337 на 3 не делится. Разность сумм цифр числа 337, стоящих на четных и нечетных местах, $3-(3+7)=-7$ не делится на 11, значит, и число 337 на 11 не делится. Делимость на остальные простые числа проверяем непосредственным делением: $337=7\cdot48+1$, $337=13\cdot25+12$, $337=17\cdot19+14$. Таким образом, число 337 является простым, следовательно, разложение 2022 на простые множители имеет вид: $2022=2\cdot3\cdot337$.

Из разложения числа 2022 на простые множители $2022=2\cdot3\cdot337$, следует, что $2022^3 = 2^3\cdot3^3\cdot337^3$. Так как 337 – число простое, то при $n < 337$ в разложении $n!$ на простые множители множителя 337 встречаться не будет. При $337 \le n < 2\cdot337$ в разложении $n!$ на простые множители множитель 337 будет встречаться один раз. При $2\cdot337 \le n < 3\cdot337$ в разложении $n!$ на простые множители множитель 337 будет встречаться два раза. Тогда при $n < 3\cdot337$ $n!$ не делится на 337^3. Следовательно, $n!$ не делится и на 2022^3. При $n = 3\cdot337 = 1011$ в разложении $n! = 1011!$ на простые множители встречаются и 2^3 (в произведении есть множители 2 и 4), и 3^3 (в произведении есть множители 3 и 9), и 337^3 (в произведении есть множители 337, $2\cdot337 = 674$, $3\cdot337 = 1011$).

Следовательно, $1011!$ делится на $2022^3 = 2^3\cdot3^3\cdot337^3$.

Ответ. $n = 1011$.

Задача 2

Восстановите стертые цифры числа 843**6, зная, что оно делится без остатка на 468.

Решение.

1 способ. Разложим число 468 на простые множители: $468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$. Следовательно, число 843**6 делится нацело на 468 тогда и только тогда, когда оно делится на 4, на 9 и на 13. Обозначим стертые цифры x и y, $0 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$. Тогда получаем число $843xy6$.

По признаку делимости на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9, получаем, что сумма $8+4+3+x+y+6 = 21+x+y$ делится на 9. Число 21 при делении на 9 имеет остаток 3, значит, число $x+y$ при делении на 9 имеет остаток 6. Так как $0 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$, то $0 \le x+y \le 18$. Среди целых чисел от 0 до 18 только два числа 6 и 15 при делении на 9 имеют остаток 6, то есть $x + y = 6$ или $x + y = 15$.

По признаку делимости на 4: число делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, образованное двумя последними цифрами числа, делится на 4, получаем, что двузначное число $y6$ делится на 4. Среди двузначных чисел, оканчивающихся на 6, на 4 делятся 16, 36, 56, 76 и 96. Таким образом, $y = 1$ или $y = 3$ или $y = 5$ или $y = 7$ или $y = 9$.

Если $y = 1$, то в силу того, что $0 \le x \le 9$ и $x + y = 6$ или $x + y = 15$ получаем, что $x = 5$, тогда число имеет вид 843516. Разделим число 843516 на 13: $843516 = 13 \cdot 64885+11$, то есть 843516 не делится на 13, следовательно, не делится и на 468, то есть не является искомым.

Если $y = 3$, то в силу того, что $0 \le x \le 9$ и $x + y = 6$ или $x + y = 15$ получаем, что $x = 3$, тогда число имеет вид 843336. Разделим число 843336 на 13: $843336 = 13 \cdot 64872$, то есть 843336 делится на 13. Так как число 843336 делится на 4, на 9 и на 13, то оно делится и на 468, следовательно, является искомым.

Проверим, нет ли других чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Если $y = 5$, то в силу того, что $0 \le x \le 9$ и $x + y = 6$ или $x + y = 15$ получаем, что $x = 1$, тогда число имеет вид 843156. Разделим число 843156 на 13: $843156 = 13 \cdot 64858+2$, то есть 843156 не делится на 13, следовательно, не делится и на 468, то есть не является искомым.

Если $y = 7$, то в силу того, что $0 \le x \le 9$ и $x + y = 6$ или $x + y = 15$ получаем, что $x = 8$, тогда число имеет вид 843876. Разделим число 843876 на 13: $843876 = 13 \cdot 64913+7$, то есть 843876 не делится на 13, следовательно, не делится и на 468, то есть не является искомым.

Если $y = 9$, то в силу того, что $0 \le x \le 9$ и $x + y = 6$ или $x + y = 15$ получаем, что $x = 6$, тогда число имеет вид 843696. Разделим число 843696 на 13: $843696 = 13 \cdot 64899 + 9$, то есть 843696 не делится на 13, следовательно, не делится и на 468, то есть не является искомым.

Таким образом, условию задачи удовлетворяет единственное число 843336, то есть, стерты были две цифры 3.

2 способ. Среди чисел от 843006 до 843996 найдем те, которые делятся без остатка на 468. Так как $468 \cdot 1801 = 842868 < 843006$, а $468 \cdot 1804 = 844272 > 843996$, то только два числа среди чисел от 843006 до 843996 найдем те, которые делятся без остатка на 468: $843336 = 468 \cdot 1802$, $843804 = 468 \cdot 1803$. Из чисел 843336 и 843804 на 6 оканчивается только одно число 843336, следовательно, были стерты две цифры 3.

Ответ. 843336.

Задача 3

Двое рабочих вышли одновременно из одного и того же дома и пошли на один и тот же завод. У первого из них шаг был на 10% короче, чем у второго, но зато он делал на 10% шагов больше, чем второй. Кто из этих рабочих раньше придет на завод?

Решение.

Так как путь от дома до завода у обоих рабочих одинаковый, то раньше придет тот рабочий, у которого скорость больше.

Пусть длина шага второго рабочего x м и он делает n шагов в минуту. Тогда скорость второго рабочего равна $(x \cdot n)$ м/мин. Так как у первого рабочего длина шага на 10% меньше, чем у второго, то длина шага первого рабочего равна $0,9x$ м; в то же время первый рабочий за минуту делает на 10% шагов больше, чем второй, то есть первый рабочий за минуту делает $1,1n$ шагов в минуту. Тогда скорость первого рабочего равна $0,9x \cdot 1,1n = 0,99xn$(м/мин). Так как $0,99xn < xn$, то скорость второго рабочего больше, чем скорость первого рабочего, следовательно, второй рабочий раньше придет на завод.

Ответ. Второй рабочий.

Задача 4

Докажите, что любое натуральное число, большее 7, можно представить в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое слагаемое в которой равно 3 или 5.

Решение.

1 способ.

Любое натуральное число при делении на 3 имеет остаток 0, 1 или 2, то есть, любое натуральное число можно представить в виде:

$n = 3m$, если n делится нацело на 3 (m число натуральное);

$n = 3m + 1$, если n при делении на 3 имеет остаток 1 (m число целое неотрицательное);

$n = 3m + 2$, если n при делении на 3 имеет остаток 2 (m число целое неотрицательное).

Если $n = 3m$, что число n представимо в виде суммы m слагаемых, каждое из которых равно 3.

Если $n = 3m + 1$, то, в силу того, что $n > 7$, $m \geq 3$, тогда $n = 3m + 1 =$ $= 3\cdot(m - 3) + 3\cdot 3 + 1 = 3\cdot(m - 3) + 10 = 3\cdot(m - 3) + 5\cdot 2$, то есть n представимо в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5.

Если $n = 3m + 2$, то, в силу того, что $n > 7$, $m \geq 2$, тогда $n = 3m + 2 =$ $= 3\cdot(m - 1) + 3 + 2 = 3\cdot(m - 1) + 5$, то есть n представимо в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5.

Таким образом, получили, что любое натуральное число, большее 7, можно представить в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5, **что и требовалось доказать.**

2 способ.

Воспользуемся методом математической индукции, который опирается на принцип математической индукции:

Пусть задана бесконечная совокупность утверждений, все утверждения в которой пронумерованы:

$$D(1),\ D(2),\ \ldots,\ D(n),\ \ldots,$$

где $D(1)$ – первое утверждение совокупности, $D(2)$ – второе утверждение совокупности, …, $D(n)$ – утверждение совокупности с номером n, ….

Если выполняются следующие условия:

1) первое утверждение совокупности $D(1)$ верно;
2) из того, что верно утверждение совокупности $D(n)$ с номером n следует, что верно утверждение совокупности $D(n + 1)$ с номером $n + 1$;

тогда справедливы все утверждения совокупности $D(1)$, $D(2)$, …, $D(n)$, ….

Для того, чтобы применить метод математической индукции к решению задачи, нужно:

1. База индукции: в данной задаче сначала нужно убедиться, что первые несколько натуральных чисел, больших 7, можно представить в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5.
2. Индуктивный переход: предположить, что натуральное число $n > 7$ можно представить в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5 и используя это предположение доказать, что следующее за n натуральное число $n + 1$ так же можно представить в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5.
3. На основании принципа математической индукции сделать вывод, что любое натуральное число, большее 7, можно представить в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5.

1. База индукции. Рассмотрим сначала натуральные числа от 8 до 10: $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$.

2. Предположим, что число $n > 7$ представимо в виде $n = 3 \cdot m + 5 \cdot p$, где m и p – целые неотрицательные числа. Докажем, что данное утверждение справедливо для $n + 1$. Рассмотрим число $n + 1$:

если $p \geq 1$, то $n + 1 = 3 \cdot m + 5 \cdot p + 1 = 3 \cdot m + 5 \cdot (p - 1) + 5 + 1 = 3 \cdot m + 5 \cdot (p - 1) + 6 =$ $= 3 \cdot m + 5 \cdot (p - 1) + 3 \cdot 2 = 3 \cdot (m + 2) + 5 \cdot (p - 1)$, то есть $n + 1$ представимо в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5;

если $p = 0$, то из того, что $n > 7$ следует, что $m \geq 3$, тогда $n + 1 = 3 \cdot m + 1 = 3 \cdot (m - 3) + 3 \cdot 3 + 1 = 3 \cdot (m - 3) + 10 = 3 \cdot (m - 3) + 5 \cdot 2$, то есть $n + 1$ представимо в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5.

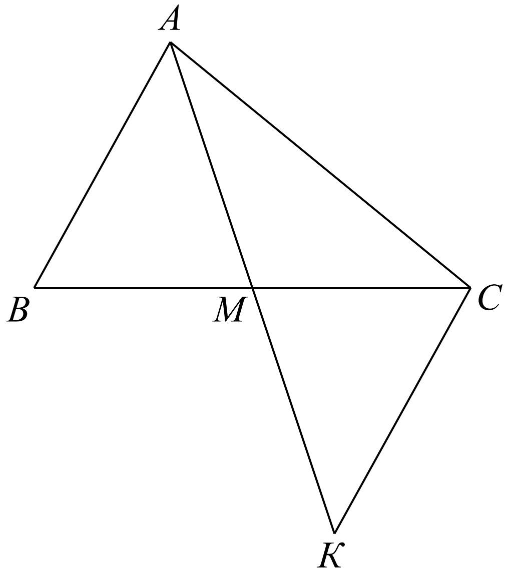
3. Следовательно, согласно принципу математической индукции, любое натуральное число, большее 7, можно представить в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых равно 3 или 5, **что и требовалось доказать.**

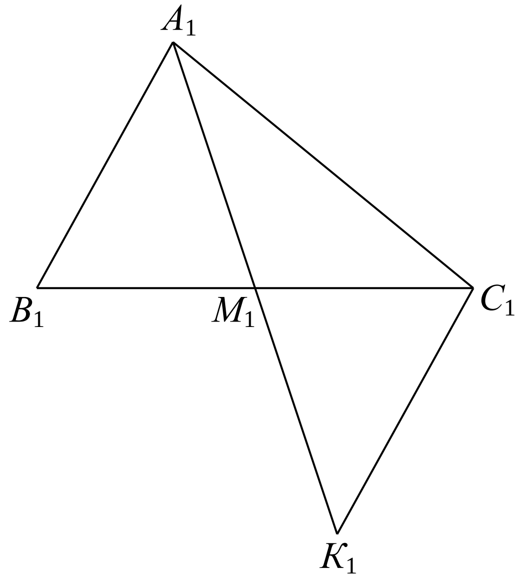
Задача 5

AM – медиана треугольника ABC, A_1M_1 – медиана треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что если $AM = A_1M_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$ и $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Решение.

1 способ. Очень часто при решении задач, в которых речь идет о медиане треугольника, бывает полезным следующее дополнительное построение: продлить медиану треугольника за середину стороны и от середины стороны на продолжении медианы отложить отрезок, равный медиане треугольника.





На луче AM отметим точку K так, чтобы точка M лежала между точками A и K и $AM = MK$. Соединим точки K и C. На луче A_1M_1 отметим точку K_1 так, чтобы точка M_1 лежала между точками A_1 и K_1 и $A_1M_1 = M_1K_1$. Соединим точки K_1 и C_1.

Рассмотрим треугольники ABM и KMC. Так как AM – медиана ΔABC, то M – середина BC, значит, $BM = MC$, $AM = MK$ по построению, $\angle BMA = \angle KMC$ как вертикальные. Следовательно, $\Delta ABM = \Delta KMC$ по двум сторонам и углу между ними, откуда $\angle BAM = \angle MKC$.

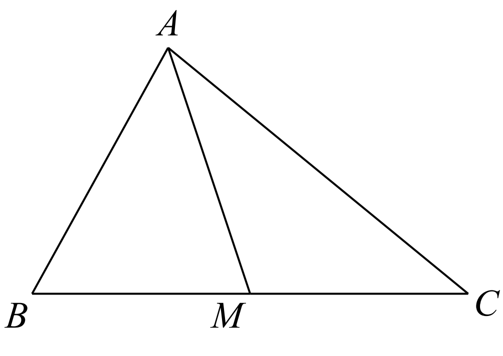
Рассмотрим треугольники $A_1B_1M_1$ и $K_1M_1C_1$. Так как A_1M_1 – медиана $\Delta A_1B_1C_1$, то M_1 – середина B_1C_1, значит, $B_1M_1 = M_1C_1$, $A_1M_1 = M_1K_1$ по построению, $\angle B_1M_1A_1 = \angle K_1M_1C_1$ как вертикальные. Следовательно, $\Delta A_1B_1M_1 = \Delta K_1M_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, откуда $\angle B_1A_1M_1 = \angle M_1K_1C_1$.

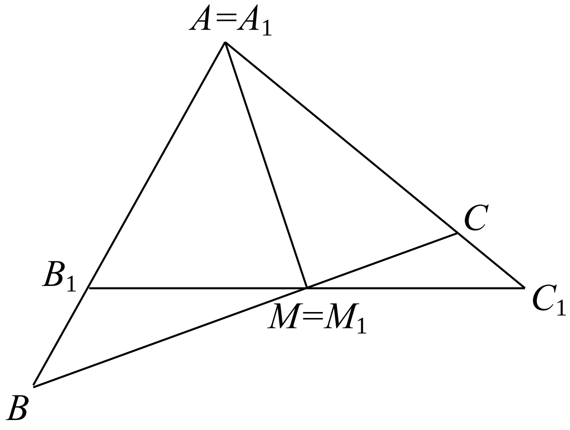
Рассмотрим треугольники ACK и $A_1C_1K_1$. $\angle KAC = \angle K_1A_1C_1$ по условию; так как $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$ по условию, $\angle BAM = \angle MKC$, $\angle B_1A_1M_1 = \angle M_1K_1C_1$ по доказанному, то $\angle AKC = \angle A_1K_1C_1$; $AK = AM + MK = 2AM = 2A_1M_1 = A_1M_1 + M_1K_1 = A_1K_1$. Следовательно, $\Delta ACK = \Delta A_1C_1K_1$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, откуда $AC = A_1C_1$.

Рассмотрим треугольники AMC и $A_1M_1C_1$. $AM = A_1M_1$, $\angle MAC = \angle M_1A_1C_1$ по условию; $AC = A_1C_1$ по доказанному. Следовательно, $\Delta AMC = \Delta A_1M_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, откуда $\angle ACM = \angle A_1C_1M_1$.

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. $\angle BAC = \angle BAM + \angle MAC = \angle B_1A_1M_1 + \angle M_1A_1C_1 = \angle B_1A_1C_1$ по условию, $AC = A_1C_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ по доказанному. Значит, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, **что и требовалось доказать.**

<u>2 способ.</u> Воспользуемся методом от противного. Предположим, что $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$, следовательно, их нельзя совместить при наложении. Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совпала с вершиной A_1, луч AM наложился на луч A_1M_1, точка B была с той же стороны, относительно луча A_1M_1, что и точка B_1. Так как $AM = A_1M_1$, то точка M при наложении совпадет с точкой M_1. Так как $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$ и $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1$,, то луч AB наложится на луч A_1B_1, а луч AC наложится на луч A_1C_1. Если точка B при наложении совпала бы с точкой B_1, то луч BC наложился бы на луч B_1C_1 и точка C совпала бы с точкой C_1, то есть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совпали бы при наложении, значит, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, что противоречит предположению. Следовательно, при наложении точка B не совпадет с точкой B_1. Аналогично, точка C не совпадет с точкой C_1.





Рассмотрим треугольники BB_1M и CC_1M. $BM = MC$, $B_1M = MC_1$ по условию, $\angle B_1MB = \angle C_1MC$ как вертикальные, следовательно, $\Delta BB_1M = \Delta CC_1M$ по двум сторонам и углу между ними, откуда $\angle BB_1M = \angle CC_1M$.

$\angle BB_1C_1$ и $\angle AB_1C_1$ – смежные, значит, $\angle BB_1C_1 + \angle AB_1C_1 = 180°$, $\angle A_1B_1C_1 = 180° - \angle BB_1C_1$.

Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle A_1B_1C_1 + \angle B_1C_1A_1 + \angle B_1A_1C_1 = 180°$. Так как $\angle A_1B_1C_1 = 180° - \angle BB_1C_1$, $\angle BB_1C_1 = \angle A_1C_1B_1$, то из равенства $\angle A_1B_1C_1 + \angle B_1C_1A_1 + \angle B_1A_1C_1 = 180°$ получаем $180° - \angle BB_1C_1 + \angle BB_1C_1 + \angle B_1A_1C_1 = 180°$, то есть $\angle B_1A_1C_1 = 0°$, что невозможно, так как $\angle B_1A_1C_1 > 0°$ как угол треугольника. Значит, наше предположение не верно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, **что и требовалось доказать.**