8 класс **2022-2023 уч.г.**

Задание № 2

Задача 1

Найдите две последние цифры числа 8^{2022}.

Решение.

<u>1 способ.</u> Рассмотрим натуральные степени числа 8 и запишем их две последние цифры:

$8^1 = 08$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = \ldots 96$, $8^5 = \ldots 68$, $8^6 = \ldots 44$,

$8^7 = \ldots 52$, $8^8 = \ldots 16$, $8^9 = \ldots 28$, $8^{10} = \ldots 24$, $8^{11} = \ldots 92$, $8^{12} = \ldots 36$,

$8^{13} = \ldots 88$, $8^{14} = \ldots 04$, $8^{15} = \ldots 32$, $8^{16} = \ldots 56$, $8^{17} = \ldots 48$, $8^{18} = \ldots 84$,

$8^{19} = \ldots 72$, $8^{20} = \ldots 76$, $8^{21} = \ldots 08$, ….

Таким образом, две последние цифры натуральных степеней числа 8 повторяются с периодом 20. Так как $2022 = 20\cdot 101 + 2$, то две последние цифры числа 8^{2022} совпадают с двумя последними цифрами числа 8^2, то есть равны 64.

<u>2 способ.</u> Представим числа в следующем виде:

$$8^{2022} = (2^3)^{2022} = 2^{6066} = 2^{6064+2} = 2^{6064}\cdot 2^2 = (2^4)^{1516}\cdot 4 = 4\cdot 16^{1516}.$$

Рассмотрим натуральные степени числа 8 и запишем их две последние цифры:

$16^1 = 16$, $16^2 = 256$, $16^3 = \ldots 96$, $16^4 = \ldots 36$, $16^5 = \ldots 76$, $16^6 = \ldots 16$, …

Таким образом, две последние цифры натуральных степеней числа 16 повторяются с периодом 5. Так как $1516 = 5\cdot 303 + 1$, то две последние цифры числа 16^{1516} совпадают с двумя последними цифрами числа 16^1, то есть равны 16, следовательно, последние две цифры 8^{2022} совпадают с двумя последними цифрами произведения $4\cdot 16$, то есть равны 64.

Ответ. 64.

Задача 2

Решите уравнение $|6x+21|-|98-8x^2|=0$.

Решение.

1 способ.

$$|6x+21|-|98-8x^2|=0;$$

$$|6x+21|=|98-8x^2|.$$

Модули двух чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа равны или противоположны.

1) $6x + 21 = 98 - 8x^2$	или	2) $6x + 21 = 8x^2 - 98$;
$3(2x + 7) - 2(7 - 2x)(7 + 2x) = 0$;		$3(2x + 7) - 2(2x - 7)(2x + 7) = 0$;
$(2x + 7)(3 - 2(7 - 2x)) = 0$;		$(2x + 7)(3 - 2(2x - 7)) = 0$;
$(2x + 7)(4x - 11) = 0$;		$(2x + 7)(17 - 4x) = 0$;
$2x + 7 = 0$ или $4x - 11 = 0$;		$2x + 7 = 0$ или $17 - 4x = 0$;
$2x = -7$; $4x = 11$;		$2x = -7$; $4x = 17$;
$x = -3{,}5$. $x = 2{,}75$.		$x = -3{,}5$. $x = 4{,}25$.

2 способ.

$$|6x+21|-|98-8x^2|=0;$$

$$|3(2x+7)|-|-2(4x^2-49)|=0;$$

$$|3(2x+7)|-|2(2x-7)(2x+7)|=0;$$

$$3|2x+7|-2|2x-7|\cdot|2x+7|=0;$$

$$|2x+7|\cdot\left(3-2|2x-7|\right)=0;$$

$|2x+7|=0$ или $3-2|2x-7|=0$;

$2x + 7 = 0$; $|2x-7|=1{,}5$;

$2x = -7$; $2x - 7 = 1{,}5$ или $2x - 7 = -1{,}5$;

$x = -3{,}5$. $2x = 8{,}5$; $2x = 5{,}5$;

$x = 4{,}25$. $x = 2{,}75$.

3 способ.

Найдем нули выражений, стоящих под знаком модуля.

1) $6x + 21 = 0$; $6x = -21$; $x = -3{,}5$.
2) $98 - 8x^2 = 0$; $2(7 - 2x)(7 + 2x) = 0$; $7 - 2x = 0$ или $7 + 2x = 0$; $2x = 7$ или $2x = -7$; $x = 3{,}5$ или $x = -3{,}5$.

Получили два значения переменной x: $x = 3{,}5$ или $x = -3{,}5$. Они разбивают числовую ось на три промежутка. Определим знаки выражений, стоящих под знаком модуля, на каждом из полученных промежутков.

$6x + 21$	$-$		$+$		$+$	
$98 - 8x^2$	$-$	$-3{,}5$	$+$	$3{,}5$	$-$	x

Решим уравнение на каждом из полученных промежутков.

1. $\begin{cases} x < -3{,}5; \\ -6x - 21 + 98 - 8x^2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -3{,}5; \\ -3(2x + 7) + 2(7 - 2x)\cdot(7 + 2x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -3{,}5; \\ (2x + 7)\cdot(-3 + 2(7 - 2x)) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -3{,}5; \\ (2x + 7)\cdot(11 - 4x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -3{,}5; \\ x = -3{,}5;\ x = 2{,}75; \end{cases}$

*с*истема не имеет решений.

2. $\begin{cases} -3{,}5 \le x \le 3{,}5; \\ 6x + 21 - (98 - 8x^2) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -3{,}5 \le x \le 3{,}5; \\ 3(2x + 7) - 2(7 - 2x)\cdot(7 + 2x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -3{,}5 \le x \le 3{,}5; \\ (2x + 7)\cdot(3 - 2(7 - 2x)) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -3{,}5 \le x \le 3{,}5; \\ (2x + 7)\cdot(4x - 11) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -3{,}5 \le x \le 3{,}5; \\ x = -3{,}5;\ x = 2{,}75; \end{cases}$

$x = -3{,}5$; $x = 2{,}75$.

3. $\begin{cases} x > 3{,}5; \\ 6x + 21 + 98 - 8x^2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 3{,}5; \\ 3(2x + 7) + 2(7 - 2x)\cdot(7 + 2x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 3{,}5; \\ (2x + 7)\cdot(3 + 2(7 - 2x)) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 3{,}5; \\ (2x + 7)\cdot(17 - 4x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 3{,}5; \\ x = -3{,}5;\ x = 4{,}25; \end{cases}$

$x = 4{,}25$.

Ответ. $x = -3{,}5$; $x = 2{,}75$; $x = 4{,}25$.

Задача 3

Решите в целых числах уравнение $2x^2+8y^2=17xy+517$.

Решение.

<u>1 способ.</u> Преобразуем уравнение таким образом, чтобы в левой части стояло произведение двух целых множителей, а в правой – целое число.

$$2x^2+8y^2=17xy+517;$$

$$2x^2-xy+8y^2-16xy=517;$$

$$x(2x-y)-8y(2x-y)=517;$$

$$(2x-y)\cdot(x-8y)=517.$$

Так как x и y числа целые, то $2x-y$ и $x-8y$ числа целые. Тогда равенство $(2x-y)\cdot(x-8y)=517$ будет справедливо тогда и только тогда, когда $2x-y$ и $x-8y$ являются целыми делителями числа 517, произведение которых равно 517.

Разложим число 517 на простые множители: $517 = 11\cdot 47$. Значит, число 517 имеет 8 целых делителей: ±1; ±11; ±47; ±517.

Рассмотрим все возможные представления числа 517 в виде произведения двух целых множителей:

$$517 = 1\cdot 517 = 11\cdot 47 = -1\cdot(-517) = -11\cdot(-47).$$

С учетом порядка множителей получаем 8 систем уравнений.

1) $\begin{cases}2x-y=1,\\ x-8y=517;\end{cases}$

$\begin{cases}y=2x-1,\\ x-8(2x-1)=517;\end{cases}$

$\begin{cases}y=2x-1,\\ -15x=509;\end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как 509 на 15 не делится.

5) $\begin{cases}2x-y=-1,\\ x-8y=-517;\end{cases}$

$\begin{cases}y=2x+1,\\ x-8(2x+1)=-517;\end{cases}$

$\begin{cases}y=2x+1,\\ -15x=-509;\end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как 509 на 15 не делится.

2) $\begin{cases}2x-y=517,\\ x-8y=1;\end{cases}$

$\begin{cases}y=2x-517,\\ x-8(2x-517)=1;\end{cases}$

$\begin{cases}y=2x-517,\\ -15x=-4135;\end{cases}$

Система не имеет решений в целых

6) $\begin{cases}2x-y=-517,\\ x-8y=-1;\end{cases}$

$\begin{cases}y=2x+517,\\ x-8(2x+517)=-1;\end{cases}$

$\begin{cases}y=2x+517,\\ -15x=4135;\end{cases}$

Система не имеет решений в целых

числах, так как 4135 на 15 не делится.

3) $\begin{cases} 2x-y=11, \\ x-8y=47; \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x-11, \\ x-8(2x-11)=47; \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x-11, \\ -15x=-41; \end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как 41 на 15 не делится.

4) $\begin{cases} 2x-y=47, \\ x-8y=11; \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x-47, \\ x-8(2x-47)=11; \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x-47, \\ -15x=-365; \end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как 365 на 15 не делится.

числах, так как 4135 на 15 не делится.

7) $\begin{cases} 2x-y=-11, \\ x-8y=-47; \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x+11, \\ x-8(2x+11)=-47; \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x+11, \\ -15x=41; \end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как 41 на 15 не делится.

8) $\begin{cases} 2x-y=-47, \\ x-8y=-11; \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x+47, \\ x-8(2x+47)=-11; \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x+47, \\ -15x=365; \end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как 365 на 15 не делится.

2 способ.

Один из способов доказательства отсутствия решений уравнений в целых числах – использование сравнений.

Пусть m – натуральное число, причем $m > 1$. Пусть a и b – целые числа.

Определение. Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если разность $(a - b)$ делится на m без остатка (нацело), или, целые числа a и b имеют одинаковый остаток при делении на m. Обозначают следующим образом:

$$a \equiv b \pmod m.$$

Сравнения обладают следующими свойствами:

1°. $a \equiv a \pmod m$.

2°. Если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.

3°. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то

$a + c \equiv b + d \pmod m$, $a - c \equiv b - d \pmod m$, $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$.

4°. Если $a \equiv b \pmod m$ и n – число натуральное, то $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Доказательство свойств сравнений.

1°. Так как $a - a = 0$, $0 \vdots m$, значит, $a \equiv a \pmod m$.

2°. Так как $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $(a-b) \vdots m$ и $(b-c) \vdots m$. Рассмотрим разность $a - c$ и прибавим и вычтем b:

$$a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c).$$

Так как $(a-b)\vdots m$ и $(b-c)\vdots m$, то $(a-c)\vdots m$, следовательно, $a \equiv c \pmod{m}$.

3°. Так как $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $(a-b)\vdots m$ и $(c-d)\vdots m$. Рассмотрим разности $(a+c)-(b+d)$, $(a-c)-(b-d)$, $(a\cdot c)-(b\cdot d)$:

$$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d);$$

$$(a-c)-(b-d)=(a-b)-(c-d);$$

$$a\cdot c-b\cdot d=a\cdot c-a\cdot d+a\cdot d-b\cdot d=(a\cdot c-a\cdot d)+(a\cdot d-b\cdot d)=a\cdot(c-d)+(a-b)\cdot d.$$

Так как $(a-b)\vdots m$ и $(c-d)\vdots m$, то $((a+c)-(b+d))\vdots m$, $((a-c)-(b-d))\vdots m$, $(a\cdot c-b\cdot d)\vdots m$, следовательно, $a+c \equiv b+d \pmod{m}$, $a-c \equiv b-d \pmod{m}$, $a\cdot c \equiv b\cdot d \pmod{m}$. Таким образом, сравнения по одному модулю можно складывать, вычитать и умножать.

4°. Свойство 4° непосредственно следует из свойства 3°, если сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ умножить на себя n раз.

Воспользуемся сравнениями и их свойствами для решения задачи 3. Будем рассматривать сравнения по модулю 3.

$2 \equiv -1 \pmod{3}$, $8 \equiv -1 \pmod{3}$, $17 \equiv -1 \pmod{3}$, $517 \equiv 1 \pmod{3}$. Рассмотрим все возможные случаи для x и y.

<u>*1 случай.*</u> $x \equiv 0 \pmod{3}$, $y \equiv 0 \pmod{3}$. Тогда $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $xy \equiv 0 \pmod{3}$, следовательно, $2x^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $8y^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $17xy \equiv 0 \pmod{3}$, $2x^2+8y^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $17xy+517 \equiv 1 \pmod{3}$, тогда $2x^2+8y^2 \neq 17xy+517$.

<u>*2 случай.*</u> $x \equiv 0 \pmod{3}$, $y \equiv 1 \pmod{3}$. Тогда $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $xy \equiv 0 \pmod{3}$, следовательно, $2x^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $8y^2 \equiv -1 \pmod{3}$, $17xy \equiv 0 \pmod{3}$, $2x^2+8y^2 \equiv -1 \pmod{3}$, $17xy+517 \equiv 1 \pmod{3}$, тогда $2x^2+8y^2 \neq 17xy+517$.

<u>*3 случай.*</u> $x \equiv 1 \pmod{3}$, $y \equiv 0 \pmod{3}$. Повторяя рассуждения 2 случая, получим, что $2x^2+8y^2 \equiv -1 \pmod{3}$, $17xy+517 \equiv 1 \pmod{3}$, тогда $2x^2+8y^2 \neq 17xy+517$.

<u>*4 случай.*</u> $x \equiv 0 \pmod{3}$, $y \equiv -1 \pmod{3}$. Тогда $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $xy \equiv 0 \pmod{3}$, следовательно, $2x^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $8y^2 \equiv -1 \pmod{3}$, $17xy \equiv 0 \pmod{3}$, $2x^2+8y^2 \equiv -1 \pmod{3}$, $17xy+517 \equiv 1 \pmod{3}$, тогда $2x^2+8y^2 \neq 17xy+517$.

<u>*5 случай.*</u> $x \equiv -1 \pmod{3}$, $y \equiv 0 \pmod{3}$. Повторяя рассуждения 4 случая, получим, что $2x^2+8y^2 \equiv -1 \pmod{3}$, $17xy+517 \equiv 1 \pmod{3}$, тогда $2x^2+8y^2 \neq 17xy+517$.

<u>*6 случай.*</u> $x \equiv 1 \pmod{3}$, $y \equiv 1 \pmod{3}$. Тогда $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $xy \equiv 1 \pmod{3}$, следовательно, $2x^2 \equiv -1 \pmod{3}$, $8y^2 \equiv -1 \pmod{3}$, $17xy \equiv -1 \pmod{3}$, $2x^2+8y^2 \equiv -2 \equiv 1 \pmod{3}$, $17xy+517 \equiv 0 \pmod{3}$, тогда $2x^2+8y^2 \neq 17xy+517$.

7 случай. $x \equiv 1 \pmod 3$, $y \equiv -1 \pmod 3$. Тогда $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, $y^2 \equiv 1 \pmod 3$, $xy \equiv -1 \pmod 3$, следовательно, $2x^2 \equiv -1 \pmod 3$, $8y^2 \equiv -1 \pmod 3$, $17xy \equiv 1 \pmod 3$, $2x^2 + 8y^2 \equiv -2 \equiv 1 \pmod 3$, $17xy + 517 \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$, тогда $2x^2 + 8y^2 \neq 17xy + 517$.

8 случай. $x \equiv -1 \pmod 3$, $y \equiv 1 \pmod 3$. Повторяя рассуждения 7 случая, получим, что $2x^2 + 8y^2 \equiv 1 \pmod 3$, $17xy + 517 \equiv -1 \pmod 3$, тогда $2x^2 + 8y^2 \neq 17xy + 517$.

9 случай. $x \equiv -1 \pmod 3$, $y \equiv -1 \pmod 3$. Повторяя рассуждения 6 случая, получим, что $2x^2 + 8y^2 \equiv 1 \pmod 3$, $17xy + 517 \equiv 0 \pmod 3$, тогда $2x^2 + 8y^2 \neq 17xy + 517$.

Таким образом, получили, что перебрав все возможные остатки от деления на 3 чисел x и y, во всех случаях левая и правая части уравнения $2x^2 + 8y^2 = 17xy + 517$ имеют разные остатки от деления на 3, следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ. Уравнение не имеет решений в целых числах.

Задача 4

Имеется кусок сплава меди с оловом массой 15 кг, содержащий 40% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 30% меди?

Решение.

Найдем сначала, сколько килограммов меди содержится в 15 кг сплава меди с оловом, содержащий 40% меди: $15 \cdot 0{,}4 = 6$ (кг).

Найдем массу сплава меди с оловом, содержащего 6 кг меди, составляющей 30% сплава: $6:0{,}3 = 20$ (кг).

Найдем теперь количество чистого олова, которое нужно было добавить к 15 кг сплава меди с оловом, содержащего 40% меди, чтобы получить 20 кг сплава меди с оловом, содержащего 30% меди: $20 - 15 = 5$ (кг).

Ответ. 5 кг.

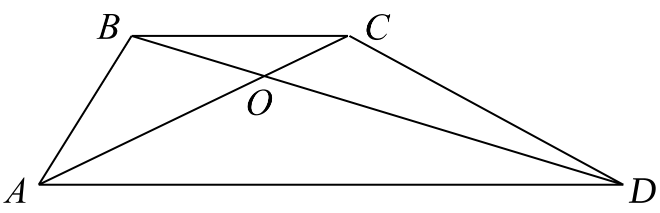
Задача 5

Докажите, что сумма диагоналей любой трапеции больше суммы ее оснований.

Решение.

Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC. Докажем, что $BC + AD < AC + BD$.

<u>1 способ.</u>



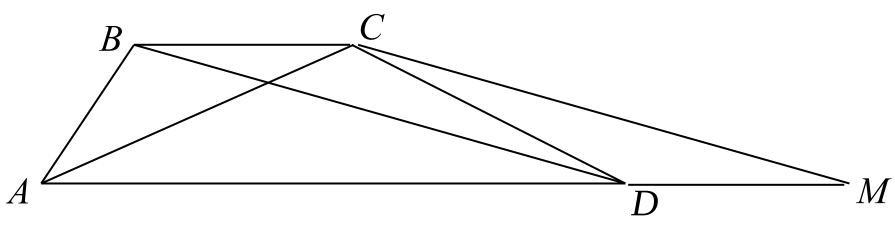
Рассмотрим ΔBOC. В силу неравенства треугольника $BC < BO + OC$.

Рассмотрим ΔAOD. В силу неравенства треугольника $AD < AO + OD$.

Сложим неравенства $BC < BO + OC$ и $AD < AO + OD$, получим $BC + AD < BO + OC + AO + OD$. Так как $AO + OC = AC$, $BO + OD = BD$, то $BC + AD < AC + BD$, **что и требовалось доказать.**

<u>2 способ.</u> При решении задач по теме «Трапеция» часто бывает удобно выполнить одно из следующих дополнительных построений:

Через вершину верхнего основания провести прямую, параллельную боковой стороне или диагонали, не проходящей через эту вершину.



Проведем через вершину C прямую CM, параллельную диагонали BD, точку пересечения прямых CM и AD обозначим M.

Рассмотрим четырехугольник $BCMD$. Заметим, что $BC \parallel MD$ как прямые, содержащие основания трапеции, $BD \parallel CM$ по построению. Следовательно, $BCMD$ – параллелограмм по определению, тогда $BC = MD$, $BD = CM$ по свойству параллелограмма.

Рассмотрим ΔACM. В силу неравенства треугольника $AM < AC + CM$.

Так как $BC = MD$, $BD = CM$, $AM = AD + DM = AD + BC$, то неравенство $AM < AC + CM$ примет вид: $BC + AD < AC + BD$, **что и требовалось доказать.**