РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 2 ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2022-2023 учебный год)

Задача 1

Остаток от деления числа 260 на некоторое число a оказался в три раза меньше частного. Найдите a.

Решение

Пусть m – остаток от деления на a, $0 < m < a$, $3m$ – частное. Тогда

$$260 = 3am + m = m(3a + 1).$$

Таким образом, m – делитель числа 260 и число $260/m$ делится на 3 с остатком 1.

Рассмотрим возможные значения m, учитывая, что $260 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13$.

Так как $m < a$, $260 = 3am + m > 3m^2$, значит $m < 10$.

$m = 1$. $3a + 1 = 260$ – решений в натуральных числах нет

$m = 2$. $3a + 1 = 130$; $a = 43$.

$$260 = 43 \cdot 6 + 2.$$

$m = 4$. $3a + 1 = 65$ – решений в натуральных числах нет

$m = 5$. $3a + 1 = 52$; $a = 17$.

$$260 = 17 \cdot 15 + 5.$$

Других делителей числа 260, меньших 10, нет.

Ответ: 43; 17.

Задача 2

Нарисуйте эскиз графика функции $y = ax^2 + b|x| + c$, если

а) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$;

б) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.

Решение

Раскроем модуль.

$y = ax^2 + bx + c$, если $x \geq 0$,

$y = ax^2 - bx + c$, если $x < 0$.

Так как $x^2 = |x|^2$, функция четная, её график симметричен относительно оси ординат. Таким образом, достаточно построить график в полуплоскости $x \geq 0$ и отразить его относительно оси 0y.

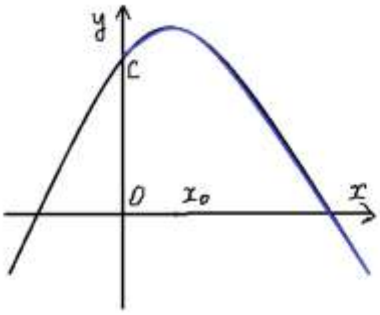
Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, координаты вершины –

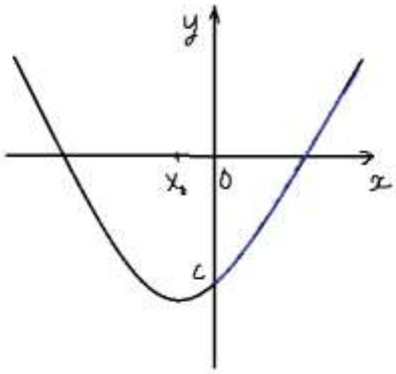
$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = y(x_0) = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}; D = b^2 - 4ac.$$

Пересечение с осью 0y – точка $(0, c)$.

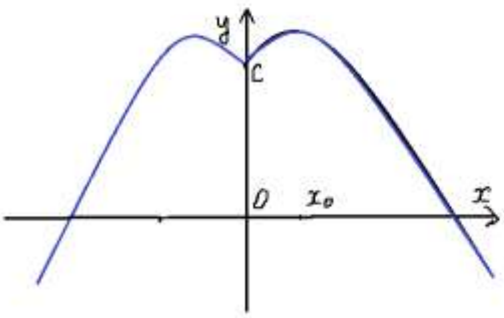
а) Ветви параболы направлены вниз, $x_0 > 0$, $D > 0$.

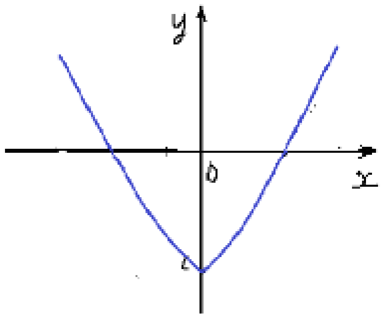
б) Ветви параболы направлены вверх, $x_0 < 0$, $D > 0$.





Ответ:

а) 

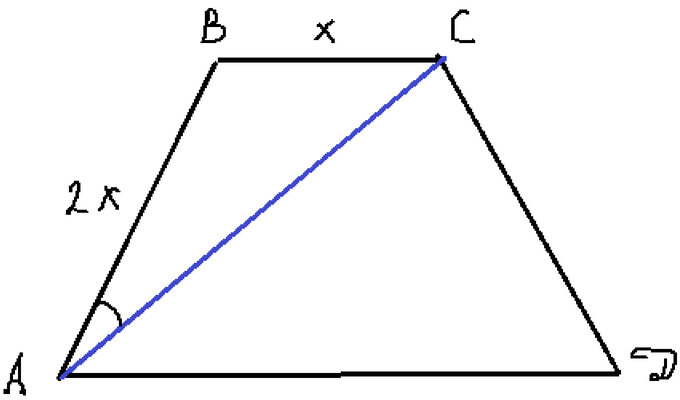
б) 

Задача 3

Дана трапеция ABCD с углом 60° при вершине A. Боковая сторона AB вдвое больше меньшего основания BC. Найдите тангенс угла BAC.

Решение.

Если $\angle BAD = 60^{\circ}$, то $\angle ABC = 120^{\circ}$.



Пусть $BC = x$, $AB = 2x$. Применим теорему косинусов к треугольнику ABC и стороне AC:

$$AC^2 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos 120^{\circ} = 7x^2.$$

Теперь запишем теорему косинусов для стороны BC:

$$x^2 = 4x^2 + 7x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{7}x \cdot \cos\angle BAC,$$

$$\cos\angle BAC = \frac{10x^2}{4\sqrt{7}x^2} = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

Тогда

$$\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \frac{25}{28}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \qquad \mathrm{tg}\angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Ответ: $\sqrt{3}/5$.

Задача 4

В школьном буфете продаются пирожки с картошкой и с капустой. К началу одной из перемен пирожков с картошкой было меньше, чем пирожков с капустой. Если бы пирожков с картошкой было бы в два раза больше, то всего пирожков было бы больше, чем 30. Если бы пирожков с капустой было бы в два раза больше, то всего пирожков было бы меньше, чем 33. Сколько пирожков с капустой и сколько с картошкой было в буфете?

Решение.

Пусть было x пирожков с картошкой и y – с капустой. Тогда, по условию,

$$x < y,$$

$$2x + y > 30,$$

$$x + 2y < 33.$$

Из второго неравенства получаем

$$-2x - y < -30,$$

Сложим с третьим: $y - x < 3$, то есть $y = x + 1$ или $y = x + 2$.

Пусть $y = x + 1$.

Тогда $3x + 1 > 30$, $3x > 29$, $x \geq 10$,

$3x + 2 < 33$, $3x < 31$, $x \leq 10$.

$x = 10$, $y = 11$.

Пусть $y = x + 2$. Тогда $3x + 2 > 30$, $3x > 28$, $x \geq 10$,

$3x + 4 < 33$, $3x < 29$, $x \leq 9$.

В этом случае решения не получаем.

Ответ: 10 пирожков с картошкой и 11 с капустой.

Задача 5

Найдите все значения параметра a, при которых уравнения

$$x^2 + (4a - 5)x + 1 = 0 \text{ и } 2x^2 + (3 - 8a)x + 1 = 0$$

имеют общий корень.

Решение.

Пусть x – общий корень уравнений. Тогда

$$x^2 + (4a - 5)x = 2x^2 + (3 - 8a)x,$$

$$(12a - 8)x = x^2,$$

$$x = 0 \text{ или } x = 12a - 8.$$

$x = 0$ не является корнем ни одного из уравнений.

Пусть $x = 12a - 8$. Тогда

$$(12a - 8)^2 + (4a - 5)(12a - 8) + 1 = 0,$$

$$192a^2 - 284a + 105 = 0,$$

$a_1 = 0{,}75$, уравнения принимают вид

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ и } 2x^2 - 3x + 1 = 0,$$

общий корень уравнений - $x = 1$.

$a_2 = 35/48$,

уравнения принимают вид

$$x^2 - \frac{25}{12}x + 1 = 0, \qquad 2x^2 - \frac{17}{6}x + 1 = 0,$$

общий корень уравнений - $x = 0{,}75$.

Ответ: $0{,}75$, $35/48$.