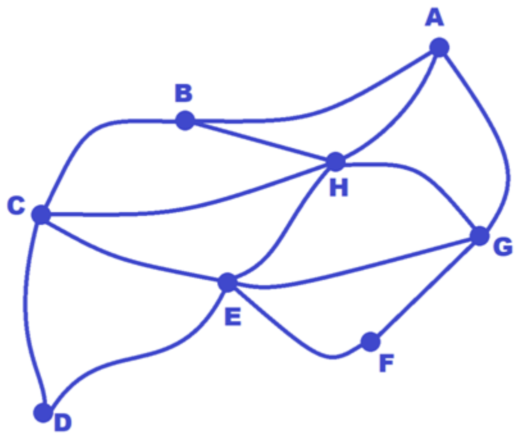
5 класс

1) На доске написано число 456. По очереди в класс заходят шесть учеников и каждому разрешается либо заменить имеющееся число на удвоенное, либо стереть у него первую цифру. Можно ли в результате из числа 456 получить 16? Если да, приведите пример последовательности действий. Если нет, докажите почему.

Решение: Да, можно. Например: $456 - 912 - 12 - 24 - 48 - 8 - 16$.

2) В компании из четырех человек ни у каких трех не совпадают или имена, или фамилии, или отчества. Может ли у любых двух человек совпадать или имя, или фамилия, или отчество? Приведите пример или докажите, что это невозможно.

Решение: Да, может. Например: Иванов Петр Васильевич, Сидоров Павел Васильевич, Иванов Павел Сергеевич, Сидоров Петр Сергеевич



3) В одном туристическом маршруте 8 городов соединены дорогами, как показано на рисунке. Вася хочет совершить велопробег по всем дорогам. Можно ли построить маршрут, в котором Вася проедет по каждой дороге ровно один раз? Если да, приведите пример, записав порядок объезда городов (напр. ABHE…); если нет – объясните, почему это невозможно и какую дорогу между двумя городами следует удалить, чтобы Вася смог проехать по каждой дороге ровно один раз и приведите пример.

Решение: А) Заметим, что граф на данном рисунке не является Эйлеровым, поскольку количество вершин с нечетной кратностью больше двух, значит объехать все города, проезжая по каждой дороге один раз, нельзя. Школьник, разумеется, может привести развернутое объяснение про нечетность степеней вершин и почему должно быть не более двух вершин с нечетной степенью.

В) Можно, удалив дорогу HE, AB, AH, BH. Других случаев быть не может. Если удалена дорога HE проходим от A до B, например, маршрутом AGFEGHABHCEDCB. Если удалена дорога AB проходим от H до E, например, HAGFEDCBHCEGHE.

4) Футбольный мяч состоит из пятиугольных и шестиугольных лоскутков. Суммарное количество вершин всех многоугольников равно 180. Найдите количество пятиугольных и шестиугольных лоскутков, учитывая, что пятиугольники граничат только с шестиугольниками, а шестиугольники с тремя пятиугольниками. Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть x – количество шестиугольников, тогда количество пятиугольников $\dfrac{180-6x}{5}$.

Поскольку шестиугольник граничит с тремя пятиугольниками, а пятиугольник с пятью шестиугольниками, составим и решим уравнение:

$$3x = 5\cdot\frac{180-6x}{5}$$

откуда $x = 20$. Значит количество шестиугольников равно 20, а пятиугольников – 12.

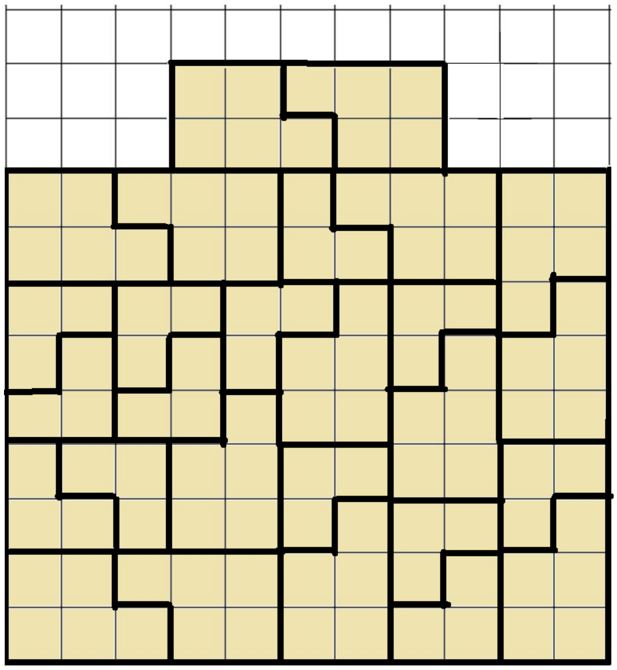
Ответ: 12 – пятиугольников и 20 шестиугольников.

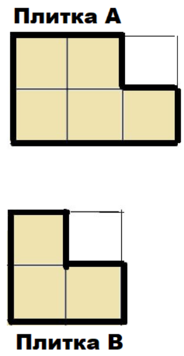
5) Веранда дома имеет вид, указанный на рисунке (закрашено серым). В распоряжении строителей есть плитки видов A и B. Переворачивать плитки на обратную сторону нельзя.

A) Можно ли замостить всю веранду без пропусков и без наложений только плиткой A? Если да, приведите пример замощения, если нет – докажите почему.
B) Можно ли замостить плитками A и B всю веранду без пропусков и без наложений? Если да, приведите пример замощения, если нет – докажите почему.
<u>Решение:</u>

A) нет, так как число клеток – 109 не делится на 5.

B) да, например, см. рисунок





6 класс

1) На доске записана сумма пяти чисел, которая равна 361. Петя знает, что если первое число увеличить в 3 раза, второе увеличить на 2, третье разделить на 3, четвертое уменьшить на 15, а пятое увеличить в 2 раза и после увеличения прибавить к нему 4, получим пять одинаковых значений. Чему равны исходные числа? Ответ обоснуйте.

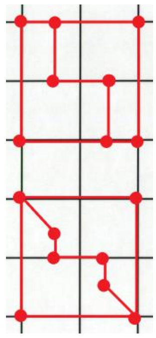
Решение: Пусть число, которое получилось в результате операций – x .Тогда, совершая обратные операции к числу х, получим исходные числа, которые в сумме дадут 361:

$$\frac{x}{3}+x-2+3x+x+15+\frac{x-4}{2}=361.$$

Откуда $x = 60$. А исходные числа, соответственно равны 20, 58, 180, 75, 28.

Ответ: 20, 58, 180, 75, 28.

2) Длина и ширина некоторой комнаты выражаются целыми числами. Можно ли замостить пол такой комнаты шестиугольниками одинаковой формы и размера? А одинаковыми семиугольниками? Ответ объясните.



Решение: Каждый квадрат 1x1 нужно разрезать на два одинаковых 6 или 7 угольника, а потом из таких квадратов собирать весь пол. (см. примеры на рисунке).

3) Школьнику Васе нравятся числа, которые оканчиваются на «3». Он решил перемножить все числа, которые оканчиваются на 3, но устал их перемножать и теперь хочет узнать, на какую цифру будет заканчиваться число $3 \cdot 13 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 2013 \cdot 2023$? Ответ объясните.

Решение. Всего чисел с тройкой в окончании 203.

$$3^1 = 3, \qquad 3^2 = 9, \qquad 3^3 = 27, \qquad 3^4 = 81, \qquad 3^5 = 243$$

$$3^{203} = 3^{200} \cdot 27 = (3^4)^{50} \cdot 27 = \cdots 7$$

Ответ: оканчивается на 7.

4) Докажите, что среди любых 52 чисел найдутся хотя бы два, разность квадратов которых делится на 100.

Решение: Заметим, что остатки от деления на 100 можно записать в следующем виде:

-50,-49,-48,...,-1,0,1,...50. А значит, среди 52 чисел будут хотя бы два, у которых совпадают модули остатков, то есть эти числа могут быть представлены в виде

$a = 100k + p, b = 100m - p$ или $c = 100t + p, d = 100l + p$. На примере первого случая, получаем:

$a^2 = 10000k^2 + 200kp + p^2,\ b^2 = 10000m^2 - 200mp + p^2$, а значит, их разность делится на 100.

5) Известно, что $9a + 1$ нацело делится на b, $9b + 1$нацело делится на a. Найдите $a и b$, учитывая, что a и b–простые числа. Ответ обоснуйте. (Простым числом называется натуральное число, которые делится на 1 и на само себя).

Решение: Пусть $a < b$.Заметим, что $9a + 9b + 1$нацело делится на ab, тогда $9a + 9b + 1 \geq ab$. Выполнение данного неравенства очевидно для $a \leq 9$, $9a + (9 - a)b + 1 \geq 0$. В случае еслиa $\geq$

9, то $(a-9)^2 \le (a-9)(b-9) \le 82$, откуда получаем, что $a \le 17$. Значит возможные значения, которые принимает $a = \{2,3,5,7,11,13,17\}$и соответственно

$$9a+1 = \{19,28,46,64,100,118,154\}$$

1) 19 делится только на 19, поэтому b=19 является решением.

2) Если a=3, то 9b+1 не делится на a.

3) Если a=5, то проверяем b=23, получаем, что не подходит

4) Если a=7, то 9a+1=64, поскольку a<b, то вариант не подходит

5) Аналогично не подходит a=11 и a=17

6) При a=13 b=59, проверяя, получим, что не подходит.

Ответ: a=2 b=19.

7 класс

1) Про треугольники ABCи MNK известно, что в них равны два угла и две стороны. Всегда ли можно сказать, что треугольники ABCи MNK равны?

<u>Решение:</u> нет, треугольники не обязательно всегда равны - это могут подобные треугольники со сторонами 8, 12, 18 и 12, 18, 27.

Школьник может не знать, что такое подобные треугольники. В этом случае он должен построить два треугольника соответствующих условию и ***<u>обосновать</u>*** их построение.

2) 1-го января 2023 года Петя устроился на работу и стал получать зарплату в размере 50’000 рублей в месяц, начиная с 1-го февраля 2023 года. Петя мечтает купить квартиру в своём городе N. Квартиры в городе N на момент 1-го января 2023 года стоят 6’000’000 рублей и каждый год 31-го декабря поднимаются в цене на 10%. Сможет ли Петя купить себе квартиру через определенное количество лет, откладывая всю свою зарплату на покупку квартиры, учитывая, что зарплата Пети с 1 января каждого года также растет на 10%?

<u>Решение:</u>

Заметим, что спустя один год квартира будет стоить 6’000’000*1,1. После того, как пройдет еще один год стоимость будет 6’000’000*$1{,}1^2$, то есть через n лет стоимость квартиры будет составлять 6’000’000*$1{,}1^n$. За первый год Петя получит 600’000, за второй 600’000*1,1, за третий 600’000*$1{,}1^2$ и продолжая дальше, получаем, что за последний n-ый год он получит 600’000*$1{,}1^{n-1}$. Получаем, что в результате, если Петя сможет купить квартиру, должно выполняться равенство:

$$6000000 \cdot (1+0{,}1)^n = 600000 + 1{,}1 \cdot 600000 + \dots + 1{,}1^{n-1} \cdot 600000$$

$$10 \cdot (1+0{,}1)^n = 1 + 1{,}1 + \dots + \cdot\, 1{,}1^{n-1}$$

$$10 \cdot (1+0{,}1)^n = 10 \cdot (1+0{,}1)^n - 10$$

Нетрудно заметить, что равенства быть не может, значит Петя не сможет купить квартиру.

3) Иван определил между двумя числами a и b новую математическую операцию «решетка» следующим образом:

$a\#b = \frac{a*b-(a+b)}{a-2}$, если a≠2

$a\#b = 1$, если a=2. (например $4\#6 = \frac{4\cdot 6-(4+6)}{4-2} = \frac{24-10}{2} = 7$)

А) В каком случае $a\#b = b\#a$? Приведите примеры таких чисел.

В) Чему равно значение выражения: $\big(\big(\dots\big((2023\#2022)\#2021\big)\#\dots\big)\#2\big)\#1\big)$?

Решение:

А) Путем составления уравнения $\frac{a\cdot b-(a+b)}{a-2} = \frac{b\cdot a-(a+b)}{b-2}$, получаем, что равенство возможно тогда и только тогда, когда $a = b \neq 2$ или $ab = a + b$. Например $a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{3}$. Отсюда можно заметить, что $a\#2 = 2\#a = 1$.

В) $a\#2 = \frac{2a-a-2}{a-2} = 1$, причем совершенно не важно чему равно а. Отсюда получаем, что для данного выражения 1#1=1.

4) Докажите, что среди любых 27 чисел найдутся хотя бы два, разность квадратов которых делится на 100.

Решение: Аналогично задаче 4) для 6 класса, только необходимо рассмотреть остатки от деления на 50.

5) Известно, что $9a + 1$ нацело делится на b, $9b + 1$нацело делится на a. Найдите aиb, учитывая, что a и b–простые числа. Ответ обоснуйте. (Простым числом называется натуральное число, которые делится на 1 и на само себя).

Решение: Пусть $a < b$.Заметим, что $9a + 9b + 1$нацело делится на ab, тогда $9a + 9b + 1 \geq ab$. Выполнение данного неравенства очевидно для $a \leq 9$, $9a + (9 - a)b + 1 \geq 0$. В случае если$a \geq 9$, то $(a - 9)^2 \leq (a - 9)(b - 9) \leq 82$, откуда получаем, что $a \leq 17$. Значит возможные значения, которые принимает $a = \{2,3,5,7,11,13,17\}$и соответственно

$$9a + 1 = \{19,28,46,64,100,118,154\}$$

1) 19 делится только на 19, поэтому b=19 является решением.

2) Если a=3, то 9b+1 не делится на a.

3) Если a=5, то проверяем b=23, получаем, что не подходит

4) Если a=7, то 9a+1=64, поскольку a<b, то вариант не подходит

5) Аналогично не подходит a=11 и a=17

6) При a=13 b=59, проверяя, получим, что не подходит.

Ответ: a=2 b=19.