

Задание № 3.**Задача 1**

Четверо товарищей купили вместе лодку. Первый внес половину суммы, внесенной остальными; второй – треть суммы, внесенной остальными; третий – четверть суммы, внесенной остальными, а четвертый внес 2600 руб. Сколько стоит лодка и сколько денег внес каждый из товарищей?

Решение.

Пусть стоимость лодки x руб., первый товарищ внес y руб., второй – a руб., третий – c руб.

Если первый товарищ внес y руб., то остальные товарищи внесли $(x - y)$ руб., по условию задачи $y = \frac{1}{2}(x - y)$, откуда $2y = x - y$, $3y = x$, $y = \frac{1}{3}x$.

Если второй товарищ внес a руб., то остальные товарищи внесли $(x - a)$ руб., по условию задачи $a = \frac{1}{3}(x - a)$, откуда $3a = x - a$, $4a = x$, $a = \frac{1}{4}x$.

Если третий товарищ внес c руб., то остальные товарищи внесли $(x - c)$ руб., по условию задачи $c = \frac{1}{4}(x - c)$, откуда $4c = x - c$, $5c = x$, $c = \frac{1}{5}x$.

Таким образом, получили, что первый товарищ внес $\frac{1}{3}x$ руб., второй – $\frac{1}{4}x$ руб., третий – $\frac{1}{5}x$ руб., а четвертый – 2600 руб. Тогда стоимость лодки равна $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + 2600\right)$ руб., что составляет x руб. Получили уравнение:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + 2600 = x;$$

$$20x + 15x + 12x + 60 \cdot 2600 = 60x;$$

$$13x = 60 \cdot 2600;$$

$$x = 12000.$$

Значит, лодка стоит 12000 руб., первый товарищ внес $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \cdot 12000 = 4000$ (руб.), второй – $\frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \cdot 12000 = 3000$ (руб.), третий – $\frac{1}{5}x = \frac{1}{5} \cdot 12000 = 2400$ (руб.).

Ответ. Лодка стоит 12000 руб., первый товарищ внес 4000 руб., второй – 3000 руб., третий – 2400 руб., четвертый – 2600 руб.

Задача 2

Слова РИК, ОКРИК, СТАРИК соответственно означают квадрат, куб и четвертую степень одного натурального числа (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры). Какое слово соответствует числу 960591623950?

Решение.

Нам нужно найти число, квадрат которого будет трехзначным, куб – пятизначным, четвертая степень – шестизначным. Так как $17^4 = 83521$ – пятизначное, $18^4 = 104976$ – шестизначное, $31^4 = 923521$ – шестизначное, $32^4 = 1048576$ – семизначное, то условию задачи могут удовлетворять натуральные числа от 18 до 31 включительно.

Слова РИК, ОКРИК, СТАРИК имеют три последние одинаковые буквы, одинаковым буквам по условию задачи соответствуют одинаковые цифры, следовательно, нам нужно число, квадрат, куб и четвертая степень которого на конце имеют три одинаковые цифры. Так как квадрат и куб числа, оканчивающегося на 2, 3, 4, 7, 8 и 9, имеют на конце разные цифры, числа 18, 19, 22, 23, 24, 27, 28 и 29 условию задачи не удовлетворяют. Числа 20 и 30 также не удовлетворяют условию задачи, так как квадрат оканчивается двумя нулями, а по условию задачи все цифры у квадрата числа должны быть разные. $21^2 = 441$, $26^2 = 676$, следовательно, 21 и 26 также не удовлетворяют условию задачи.

У нас осталось два числа, которые могут удовлетворять условию задачи: 25 и 31. Так как все буквы слова СТАРИК различные, а $31^4 = 923521$ имеет одинаковые цифры, то 31 условию задачи не удовлетворяет.

$25^2 = 625$, $25^3 = 15625$, $25^4 = 390625$. Все цифры у квадрата и четвертой степени 25 различны, что соответствует различным буквам в словах РИК, СТАРИК, вторая и последняя цифры куба числа 25 совпадают, что соответствует совпадающим буквам слова ОКРИК. Последние три цифры квадрата, куба и четвертой степени числа 25 совпадают, что соответствует совпадающим последним трем буквам слов РИК, ОКРИК, СТАРИК. Первая цифра куба числа 25 и первые три цифры четвертой степени числа 25 различны и не совпадают с последними тремя цифрами квадрата, куба и четвертой степени 25. Таким образом, 25 – единственное число, удовлетворяющее условию задачи.

Составим таблицу соответствия между цифрами и буквами.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А	О	И	С		К	Р			Т

Числу 960591623950 соответствует слово ТРАКТОРИСТКА.

Ответ. ТРАКТОРИСТКА.

Задача 3

В бассейн проведены 3 трубы. Одна из них может заполнить бассейн за 6 ч, вторая – за 8 ч, а третья – за сутки. За сколько часов наполнится бассейн при одновременной работе все трех труб?

Решение.

Так как первая труба заполняет бассейн за 6 ч, то за 1 ч она заполняет $\frac{1}{6}$ часть бассейна; вторая труба заполняет бассейн за 8 ч, значит, за 1 ч она заполняет $\frac{1}{8}$ часть бассейна; третья труба заполняет бассейн за сутки, то есть за 24 ч, следовательно, за 1 ч она заполняет $\frac{1}{24}$ часть бассейна.

Все три трубы, работая одновременно, заполнят за 1 ч $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{4+3+1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ часть бассейна, следовательно, весь бассейн они заполнят за 3 ч.

Ответ. За 3 часа.

Задача 4

Не пользуясь калькулятором, сравните $\frac{2022}{2023}$ и $2 - \frac{2023}{2022}$. Укажите какое-нибудь число, заключенное между ними.

Решение.

$\frac{2022}{2023} = 1 - \frac{1}{2023}$, $2 - \frac{2023}{2022} = 1 + \frac{2022}{2022} - \frac{2023}{2022} = 1 - \frac{1}{2022}$. Сравним дроби $\frac{1}{2023}$ и $\frac{1}{2022}$. Если дроби положительные и числители дробей равны, то больше та дробь, у которой знаменатель меньше, то есть $\frac{1}{2022} > \frac{1}{2023}$, значит,

$1 - \frac{1}{2023} > 1 - \frac{1}{2022}$, следовательно, $\frac{2022}{2023} > 2 - \frac{2023}{2022}$.

Укажем число, заключенное между $\frac{2022}{2023}$ и $2 - \frac{2023}{2022}$.

$$\frac{1}{2022} = \frac{2}{4044} > \frac{2}{4045} > \frac{2}{4046} = \frac{1}{2023},$$

следовательно,

$$1 - \frac{1}{2023} > 1 - \frac{2}{4045} = \frac{4043}{4045} > 1 - \frac{1}{2022}.$$

Ответ. $\frac{2022}{2023} > 2 - \frac{2023}{2022}$, $\frac{4043}{4045}$ заключено между $\frac{2022}{2023}$ и $2 - \frac{2023}{2022}$.

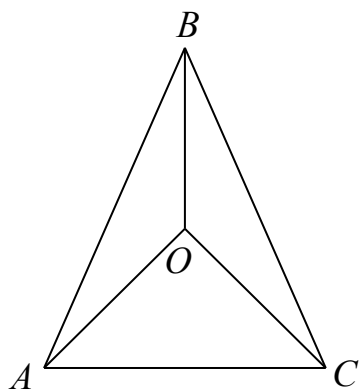
Задача 5

В треугольнике ABC выбрана точка O так, что $\triangle ABO = \triangle CBO$, $OA = OC$, $\angle AOC = 140^\circ$. Докажите, что BO – биссектриса угла ABC и найдите угол AOB .

Решение.

Так как $\triangle ABO = \triangle CBO$ и $OA = OC$, то $\angle ABO = \angle CBO$ так как в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.

Так как $\angle ABO = \angle CBO$, то BO – биссектриса $\angle ABC$ по определению, **что и требовалось доказать.**



Так как $\triangle ABO = \triangle CBO$, $OA = OC$, OB – общая сторона, то $AB = BC$ по определению равных треугольников, следовательно, $\angle AOB = \angle BOC$ так как в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.

$\angle AOB + \angle BOC + \angle AOC = 360^\circ$. Так как $\angle AOB = \angle BOC$ и $\angle AOC = 140^\circ$, то

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - \angle AOC) = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - 140^\circ) = 110^\circ.$$

Ответ. $\angle AOB = 110^\circ$.