Задание № 3.

Задача 1

Является ли простым число $3^{2023} + 4$? Ответ обосновать.

Решение.

Докажем, что число $3^{2023} + 4$ делится на 7, используя сравнения. $3 \equiv 3 \pmod 7$, тогда, возведя обе части сравнения в третью степень, получим, $3^3 \equiv 27 \equiv -1 \pmod 7$. Разделим 2023 на 3 с остатком: $2023 = 3 \cdot 674 + 1$. Возведем обе части сравнения $3^3 \equiv -1 \pmod 7$ в степень 674, получим

$$(3^3)^{674} \equiv (-1)^{674} \pmod 7,$$

$$3^{2022} \equiv 1 \pmod 7.$$

Умножим обе части последнего сравнения на 3, получим

$$3 \cdot 3^{2022} \equiv 3 \pmod 7,$$

$$3^{2023} \equiv 3 \pmod 7.$$

Прибавим к каждой части последнего сравнения 4, получим

$$3^{2023} + 4 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7.$$

Таким образом, получили, что число $3^{2023} + 4$ делится нацело на 7, а так как $3^{2023} + 4 > 7$, то число $3^{2023} + 4$ является составным.

Ответ. Число $3^{2023} + 4$ не является простым, так как оно больше 7 и делится нацело на 7.

Задача 2

Для каждого целого n найдите наибольший общий делитель чисел $133n + 16$ и $57n + 7$.

Решение.

Покажем, что при любом целом n наибольший общий делитель $133n + 16$ и $57n + 7$ равен 1. Если числа $133n + 16$ и $57n + 7$ имеют общий делитель, то и число $7 \cdot (57n + 7) - 3 \cdot (133n + 16)$ будет делиться на общий делитель чисел $133n + 16$ и $57n + 7$. Но $7 \cdot (57n + 7) - 3 \cdot (133n + 16) = 399n + 49 - 399n - 48 = 1$, следовательно, при любом целом n наибольший общий делитель $133n + 16$ и $57n + 7$ равен 1, **что и требовалось доказать.**

Задача 3

Решите систему уравнений $\begin{cases} xy^2 - 18 = 2y^2 - 3x, \\ 3xy - 24 = 6y - 5x. \end{cases}$

Решение.

Преобразуем систему уравнений.

$$\begin{cases} xy^2 - 18 = 2y^2 - 3x, \\ 3xy - 24 = 6y - 5x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy^2 - 2y^2 + 3x - 6 = 18 - 6, \\ 3xy - 6y + 5x - 10 = 24 - 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2(x-2) + 3(x-2) = 12, \\ 3y(x-2) + 5(x-2) = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y^2+3)(x-2) = 12, \\ (3y+5)(x-2) = 14. \end{cases}$$

Воспользуемся методом подстановки. Так как при любом действительном y выражение $y^2 + 3$ принимает положительные значения, то выразим $x - 2$ из первого уравнения системы и подставим во второе уравнение.

$$(y^2 + 3)(x - 2) = 12;$$

$$x - 2 = \frac{12}{y^2+3}.$$

$$(3y+5)(x-2) = 14;$$

$$\frac{12(3y+5)}{y^2+3} = 14;$$

$$6(3y + 5) = 7(y^2 + 3);$$

$$7y^2 - 18y - 9 = 0;$$

$$y^2 + 4y + 8 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+63}}{7} = \frac{9 \pm 12}{7};$$

$$y_1 = \frac{9+12}{7} = 3; \quad y_2 = \frac{9-12}{7} = -\frac{3}{7}.$$

Из равенства $x - 2 = \dfrac{12}{y^2+3}$ выразим x: $x = \dfrac{12}{y^2+3} + 2.$

Для $y = 3$ $x = \dfrac{12}{y^2+3} + 2 = \dfrac{12}{3^2+3} + 2 = 1 + 2 = 3.$

Для $y = -\dfrac{3}{7}$ $x = \dfrac{12}{y^2+3} + 2 = \dfrac{12}{\left(-\dfrac{3}{7}\right)^2+3} + 2 = \dfrac{12\cdot 49}{9+147} + 2 = \dfrac{49}{13} + 2 = \dfrac{75}{13}$.

Значит, система имеет два решения: (3; 3) и $\left(\dfrac{75}{13}; -\dfrac{3}{7}\right)$.

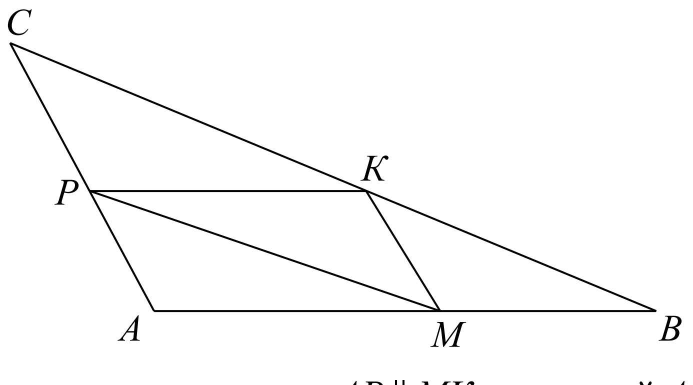
Ответ. (3; 3), $\left(\dfrac{75}{13}; -\dfrac{3}{7}\right)$.

Задача 4

Точки *M*, *K* и *P* лежат на сторонах соответственно *AB*, *BC* и *AC* треугольника *ABC*, причем *AMKP* – параллелограмм, площадь которого составляет $\dfrac{4}{9}$ площади треугольника *ABC*. Найдите диагональ *MP* параллелограмма *AMKP*, если $AB = 21$, $AC = 12$, $\angle BAC = 120°$.

Решение.

Пусть $AM = x$, $AP = y$. Тогда $S_{AMKP} = AM\cdot AP\cdot\sin\angle PAM = x\cdot y\cdot\sin 120°$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC = \dfrac{1}{2}\cdot 21\cdot 12\cdot \sin 120° = 126\cdot \sin 120°$.



Так как $S_{AMKP} = \dfrac{4}{9} S_{ABC}$, то

$$x\cdot y\cdot\sin 120° = \frac{4}{9}\cdot 126\cdot \sin 120°;$$

$$x\cdot y = 56.$$

Так как *AMKP* – параллелограмм, то $AP \parallel MK$, следовательно, $\angle KMB = \angle CAB$ как соответственные при $AP \parallel MK$ и секущей *AB*.

Рассмотрим ΔABC и ΔMBK. $\angle B$ – общий, $\angle CAB = \angle KMB$ по доказанному, значит, $\Delta ABC \sim \Delta MBK$ по двум углам, следовательно, $\dfrac{AB}{MB} = \dfrac{AC}{KM}$. $AB = 21$, $AC = 12$, $MK = AP = y$ как противоположные стороны параллелограмма *AMKP*, $MB = AB - AM = 21 - x$, тогда $\dfrac{21}{21-x} = \dfrac{12}{y}$, откуда $y = \dfrac{12\cdot(21-x)}{21} = \dfrac{4\cdot(21-x)}{7}$.

Так как $x\cdot y = 56$, $y = \dfrac{4\cdot(21-x)}{7}$, то $x\cdot\dfrac{4\cdot(21-x)}{7} = 56$, $x\cdot(21 - x) = 7\cdot 14$, $x^2 - 21x + 7\cdot 14 = 0$, $x_1 = 7$, $x_2 = 14$.

Для $x = 7$ $y = \frac{4 \cdot (21 - x)}{7} = \frac{4 \cdot (21 - 7)}{7} = 8$; для $x = 14$ $y = \frac{4 \cdot (21 - x)}{7} =$
$= \frac{4 \cdot (21 - 14)}{7} = 4$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют два случая:
<u>1 случай</u>: $AM = 7$, $AP = 8$.
<u>2 случай</u>: $AM = 14$, $AP = 4$.

Найдем диагональ MP параллелограмма $AMKP$ из ΔAMP по теореме косинусов: $MP^2 = AP^2 + AM^2 - 2 \cdot AM \cdot AP \cdot \cos\angle MAP$, $\cos\angle MAP = \cos 120° = -\frac{1}{2}$.

<u>1 случай</u>: $MP^2 = AP^2 + AM^2 - 2 \cdot AM \cdot AP \cdot \cos\angle MAP = 64 + 49 + 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 169$, $MP = 13$.

<u>2 случай</u>: $MP^2 = AP^2 + AM^2 - 2 \cdot AM \cdot AP \cdot \cos\angle MAP = 16 + 196 + 2 \cdot 4 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 268$, $MP = \sqrt{268} = \sqrt{4 \cdot 67} = 2\sqrt{67}$.

Ответ. $MP = 13$ или $MP = 2\sqrt{67}$.

Задача 5

Автобус двигался в пункт *A*. В полдень в 210 км от пункта *A*, куда направлялся автобус, он догнал группу туристов, которые шли по той же дороге со скоростью 5 км/ч. Через 3 ч он встретил мотоциклиста, ехавшего со скоростью 30 км/ч. Второй автобус, ехавший следом за первым с такой же скоростью, догнал туристов в 2 часа дня, а мотоциклиста встретил за 36 мин до того, как проехал столб 80-го километра. На сколько километров второй автобус отставал от первого?

Решение.

Пусть скорость автобуса равна x км/ч. Так как автобусы и туристы двигаются в одном направлении, и второй автобус догнал туристов через 2 часа после первого, то за это время второй автобус прошел $2x$ км, что равно расстоянию между автобусами плюс путь, который прошли туристы за 2 часа, то есть 10 км, следовательно, расстояние между автобусами равно $(2x - 10)$ км.

В момент времени встречи первого автобуса с мотоциклистом первый автобус находился на расстоянии $(210 - 3x)$ км от пункта A, а расстояние между мотоциклистом и вторым автобусом в момент времени встречи мотоциклиста и первого автобуса равно $(2x - 10)$ км. Так как автобусы и мотоциклист двигаются в разных направлениях, то скорость сближения мотоциклиста и автобуса равна $(x + 30)$ км/ч, поэтому от момента встречи первого автобуса и мотоциклиста до момента встречи второго автобуса и мотоциклиста прошло $\frac{2x-10}{x+30}$ ч.

С другой стороны, в момент встречи первого автобуса и мотоциклиста второй автобус находился на расстоянии $(200-x)$ км от пункта A и на расстоянии $(120-x)$ км от столба 80-го километра. На путь до столба 80-го километра от момента времени встречи первого автобуса и мотоциклиста второму автобусу потребуется $\frac{120-x}{x}$ ч, что на 36 минут или 0,6 ч больше, чем до встречи с мотоциклистом.

Получаем уравнение:

$$\frac{2x-10}{x+30} = \frac{120-x}{x} - \frac{3}{5};$$

$$5x \cdot (2x - 10) = 5(x + 30)(120 - x) - 3x \cdot (x + 30);$$

$$10x^2 - 50x = 600x - 5x^2 + 18000 - 150x - 3x^2 - 90x;$$

$$18x^2 - 410x - 18000 = 0;$$

$$9x^2 - 205x - 9000 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{205 \pm \sqrt{205^2 + 4 \cdot 9 \cdot 9000}}{18} = \frac{205 \pm 605}{18}.$$

Так как x км/ч – скорость автобуса, то $x > 0$, следовательно, $x = \frac{205+605}{18} = \frac{810}{18} = 45$ (км/ч), то есть скорость автобуса равна 45 км/ч, значит, расстояние между автобусами равно $2x - 10 = 2 \cdot 45 - 10 = 80$ (км).

Ответ. На 80 км.