ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2022-2023 учебный год)

<u>Задание 3</u>

Задача 1

Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второе уменьшить на 4, то получим новую геометрическую прогрессию. Если же третий член новой прогрессии уменьшить на 9, то получим арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

Решение.

Пусть b – первое число, q – знаменатель прогрессии. То есть исходные числа –

$$b, \qquad bq, \qquad bq^2.$$

Так как числа

$$b, \qquad bq-4, \qquad bq^2$$

образуют геометрическую прогрессию,

$$\frac{bq-4}{b}=\frac{bq^2}{bq-4},$$

или $(bq-4)^2=b^2q^2$. Таким образом,

$$bq-4=bq \text{ или } \; bq-4=-bq,$$

$$bq=2. \tag{1}$$

Числа

$$b, \qquad bq-4, \qquad bq^2-9$$

образуют арифметическую прогрессию, то есть

$$bq-4-b=bq^2-9-(bq-4),$$

$$bq^2-2bq+b-1=0,$$

$$2q+b=5. \tag{2}$$

Решая систему (1), (2), находим

$$b=1, \qquad q=2$$

или

$$b=4, \qquad q=\frac{1}{2}.$$

Искомые числа –

$$1,\ 2,\ 4 \text{ или } 4,\ 2,\ 1.$$

Ответ: 1, 2, 4 или 4, 2, 1.

Задача 2

Решите уравнение

$$\sqrt{x+4+2\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+12-6\sqrt{x+3}}=6$$

Решение.

Обозначим $\sqrt{x+3}=t\geq 0$. Тогда $x=t^2-3$ и уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2+1+2t}+\sqrt{t^2+9-6t}=6,$$

$$|t+1|+|t-3|=6.$$

Если $0\leq t<3$,

$$t+1+3-t=6,\ 4=6,\text{ решений нет.}$$

Если $t\geq 3$,

$$t+1+t-3=6,\ 2t=8,\ t=4.$$

Таким образом, $x=16-3=13$.

Ответ: $x=13$.

Задача 3

Из сосуда, наполненного 96-процентным раствором кислоты, отлили 2,5 литра, затем долили 2,5 литра 80-процентным раствором той же кислоты. Затем ещё раз отлили 2,5 литра и снова долили 2,5 литра 80-процентного раствора кислоты. После этого в сосуде получился 89-процентный раствор кислоты. Определите объём сосуда.

Решение.

Пусть объём сосуда - x литров. Тогда изначально в сосуде находилось $0{,}96x$ литров чистой кислоты. После того, как первый раз отлили 2,5 литра и долили 2,5 литра 80-процентного раствора, количество кислоты в сосуде стало равно

$$0{,}96(x-2{,}5)+0{,}8\cdot 2{,}5=0{,}96x-0{,}4,$$

а концентрация кислоты в растворе стала равна $(0{,}96-0{,}4/x)\cdot 100\%$.

После второй операции количество кислоты стало равно

$$\left(0{,}96-\frac{0{,}4}{x}\right)(x-2{,}5)+0{,}8\cdot 2{,}5=0{,}96x-0{,}8+\frac{1}{x},$$

а концентрация кислоты –

$$\left(0{,}96-\frac{0{,}8}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cdot 100\%.$$

По условию,

$$0{,}96-\frac{0{,}8}{x}+\frac{1}{x^2}=0{,}89,$$

$$0{,}07x^2-0{,}8x+1=0,$$

$$x_1=\frac{10}{7},\qquad x_2=10.$$

Первый корень – посторонний, так как согласно условию - $x>2{,}5$.

Ответ: 10 литров.

Задача 4

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2|2|x|-a^2|-x+a=0$$

имеет ровно три корня.

Решение.

Первый способ. Раскроем модули. Пусть $|x|<a^2/2$. Тогда

$$2a^2-4|x|-x+a=0.$$

Получаем две возможности:

$$-\frac{a^2}{2}<x<0,\qquad 3x+2a^2+a=0,\qquad x_1=-\frac{2a^2+a}{3},$$

$$0\le x<\frac{a^2}{2},\qquad -5x+2a^2+a=0,\qquad x_2=\frac{2a^2+a}{5}.$$

Пусть $|x|\ge a^2/2$. Тогда

$$-2a^2+4|x|-x+a=0,$$

$$x\le-\frac{a^2}{2},\qquad -5x-2a^2+a=0,\qquad x_3=-\frac{2a^2-a}{5},$$

$$x\ge\frac{a^2}{2},\qquad 3x-2a^2+a=0,\qquad x_4=\frac{2a^2-a}{3}.$$

Найдём, при каких значениях a уравнение будет иметь указанные корни.

x_1:

$$-\frac{a^2}{2}<-\frac{2a^2+a}{3}<0,$$

$$a^2+2a<0,\ 2a^2+a>0,$$

$$-2<a<-\frac{1}{2}.$$

x_2:

$$0\le\frac{2a^2+a}{5}<\frac{a^2}{2},$$

$$2a^2+a\ge0,\ a^2-2a>0,$$

$$a\le-\frac{1}{2}\ \text{или}\ a>2.$$

x_3:

$$-\frac{2a^2-a}{5}\le-\frac{a^2}{2},$$

$$a^2+2a\le0,$$

$$-2\le a\le0.$$

x_4:

$$\frac{2a^2-a}{3}\ge\frac{a^2}{2},$$

$$a^2-2a\ge0,$$

$$a\le0\ \text{или}\ a\ge2.$$

Таким образом, при $a<-2$ уравнение имеет два корня:

$$x_2=(2a^2+a)/5\ \text{ и } x_4=(2a^2-a)/3.$$

При $-2<a<-1/2$ уравнение имеет корни

$$x_1=-(2a^2+a)/3,\ x_2,\ x_3=-(2a^2-a)/5,\ x_4.$$

При $-1/2<a<0$ уравнение имеет корни x_3, x_4.

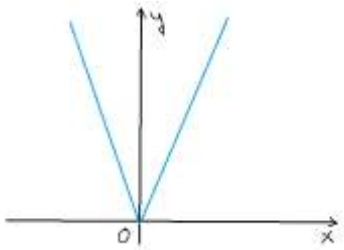
При $0<a<2$ корней нет.

При $a > 2$ уравнение имеет корни x_2, x_4.
Если $a = -2$, корнями уравнения будут $x_2 = 6/5$, $x_3 = -2$, $x_4 = 10/3$.
Если $a = -1/2$, корни уравнения $x_2 = 0$, $x_3 = -1/5$, $x_4 = 1/3$.
Если $a = 0$, то корень уравнения - $x_3 = x_4 = 0$.
Если $a = 2$, корень уравнения x_4=2.
Так как корни по-разному расположены относительно точек $\pm a^2/2$, при $a \neq 0$ все корни различны. Таким образом, уравнение имеет ровно три корня, если $a = -2$ или $a = -1/2$.

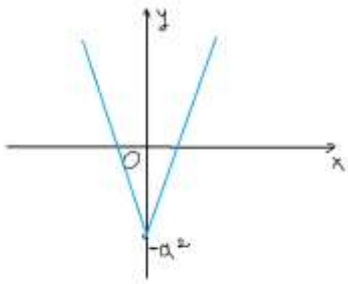
Второй способ (графический). Рассмотрим графики функций

$$y = 2|2|x| - a^2| \text{ и } y = x - a.$$

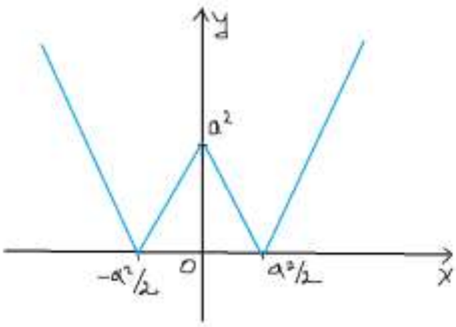
Пусть $a \neq 0$. График первой функции можно построить последовательно –
$y = 2|x|$,



$y = 2|x| - a^2$,



$y = |2|x| - a^2|$,



$y = 2|2|x| - a^2|$

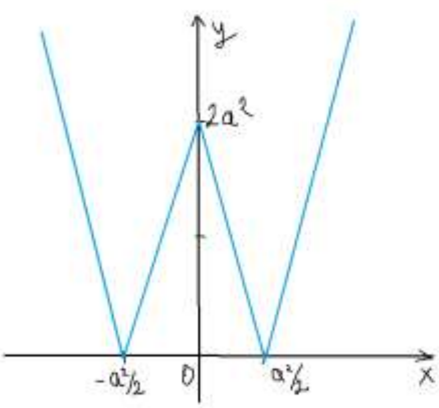
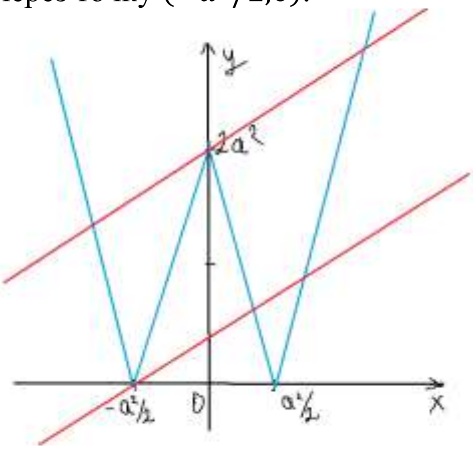


График функции $y = x - a$ – прямая, проходящая через точку $(0, -a)$, имеющая угловой коэффициент 1.
Прямая может пересекать график функции $y = 2|2|x| - a^2|$ в трех точках либо если пройдёт через точку $(0,2a^2)$, либо если пройдёт через точку $(-a^2/2,0)$.



В первом случае получаем $2a^2 = -a$, $a = -1/2$.
Во втором случае

$$-\frac{a^2}{2} - a = 0, \qquad a = -2$$

Ответ: $-1/2$, -2.

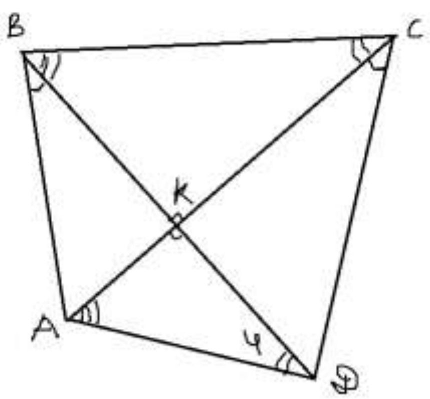
Задача 5

Вокруг четырехугольника *ABCD* с взаимно перпендикулярными диагоналями *AC* и *BD* описана окружность. Определить её радиус, если *AB*=3, $DC = \sqrt{7}$.

Решение.

Пусть K – точка пересечения диагоналей, угол *ADB* равен φ. Так как окружность, описанная вокруг четырехугольника, описана также вокруг треугольника *ABD*, по теореме синусов радиус окружности равен

$$R = \frac{AB}{2\sin\varphi} = \frac{3}{2\sin\varphi}.$$



Так как четырехугольник вписанный, $\angle ABK = \angle KCD$, треугольники *ABK* и *DCK* подобные,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AK}{KD} = \mathrm{tg}\varphi,$$

то есть $\mathrm{tg}\varphi = 3/\sqrt{7}$. По определению тангенса угла,

$$\frac{\sin^2\varphi}{1 - \sin^2\varphi} = \frac{9}{7}, \ \sin^2\varphi = \frac{9}{16}, \qquad \sin\varphi = \frac{3}{4}.$$

Таким образом,

$$R = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2.$$

Ответ: 2.