Задание № 4

Задача 1

Найдите все двузначные числа, которые делятся на произведение своих цифр.

Решение.

Пусть x – число десятков двузначного числа, y – число единиц двузначного числа. Так как двузначное число должно делиться на произведение своих цифр, то произведение цифр двузначного числа отлично от нуля, следовательно, $y \neq 0$, $x \neq 0$, иначе число не является двузначным. Таким образом, $1 \leq x \leq 9$, $1 \leq y \leq 9$.

По условию задачи $\overline{xy} = 10x + y$ делится на xy, то есть $10x + y = xy \cdot n$, где n – число натуральное. Так как правая часть равенства $xy \cdot n$ делится на x, то и число $10x + y$ делится на x, а так как $10x$ делится на x и сумма $10x + y$ делится на x, то и второе слагаемое y делится на x, то есть y кратен x.

1) $x = 1$, $y = 1$. $10x + y = 11$, $xy = 1$, $11 \vdots 1$, следовательно, 11 удовлетворяет условию задачи;

2) $x = 1$, $y = 2$. $10x + y = 12$, $xy = 2$, $12 \vdots 2$, следовательно, 12 удовлетворяет условию задачи;

3) $x = 1$, $y = 3$. $10x + y = 13$, $xy = 3$, 13 не делится на 3, следовательно, 13 не удовлетворяет условию задачи;

4) $x = 1$, $y = 4$. $10x + y = 14$, $xy = 4$, 14 не делится на 4, следовательно, 14 не удовлетворяет условию задачи;

5) $x = 1$, $y = 5$. $10x + y = 15$, $xy = 5$, $15 \vdots 5$, следовательно, 15 удовлетворяет условию задачи;

6) $x = 1$, $y = 6$. $10x + y = 16$, $xy = 6$, 16 не делится на 6, следовательно, 16 не удовлетворяет условию задачи;

7) $x = 1$, $y = 7$. $10x + y = 17$, $xy = 7$, 17 не делится на 7, следовательно, 17 не удовлетворяет условию задачи;

8) $x = 1$, $y = 8$. $10x + y = 18$, $xy = 8$, 18 не делится на 8, следовательно, 18 не удовлетворяет условию задачи;

9) $x = 1$, $y = 9$. $10x + y = 19$, $xy = 9$, 19 не делится на 9, следовательно, 19 не удовлетворяет условию задачи;

10) $x = 2$, $y = 2$. $10x + y = 22$, $xy = 4$, 22 не делится на 4, следовательно, 22 не удовлетворяет условию задачи;

11) $x = 2$, $y = 4$. $10x + y = 24$, $xy = 8$, $24 \vdots 8$, следовательно, 24 удовлетворяет условию задачи;

12) $x = 2$, $y = 6$. $10x + y = 26$, $xy = 12$, 26 не делится на 12, следовательно, 26 не удовлетворяет условию задачи;

13) $x = 2$, $y = 8$. $10x + y = 28$, $xy = 16$, 28 не делится на 16, следовательно, 28 не удовлетворяет условию задачи;

14) $x = 3$, $y = 3$. $10x + y = 33$, $xy = 9$, 33 не делится на 9, следовательно, 33 не удовлетворяет условию задачи;

15) $x = 3$, $y = 6$. $10x + y = 36$, $xy = 18$, $36 \vdots 18$, следовательно, 36 удовлетворяет условию задачи;

16) $x = 3$, $y = 9$. $10x + y = 39$, $xy = 27$, 39 не делится на 27, следовательно, 39 не удовлетворяет условию задачи;

17) $x = 4$, $y = 4$. $10x + y = 44$, $xy = 16$, 44 не делится на 16, следовательно, 44 не удовлетворяет условию задачи;

18) $x = 4$, $y = 8$. $10x + y = 48$, $xy = 32$, 48 не делится на 32, следовательно, 48 не удовлетворяет условию задачи;

19) $x = 5$, $y = 5$. $10x + y = 55$, $xy = 25$, 55 не делится на 25, следовательно, 55 не удовлетворяет условию задачи;

20) $x = 6$, $y = 6$. $10x + y = 66$, $xy = 36$, 66 не делится на 36, следовательно, 66 не удовлетворяет условию задачи;

21) $x = 7$, $y = 7$. $10x + y = 77$, $xy = 49$, 77 не делится на 49, следовательно, 77 не удовлетворяет условию задачи;

22) $x = 8$, $y = 8$. $10x + y = 88$, $xy = 64$, 88 не делится на 64, следовательно, 88 не удовлетворяет условию задачи;

23) $x = 9$, $y = 9$. $10x + y = 99$, $xy = 81$, 99 не делится на 81, следовательно, 99 не удовлетворяет условию задачи;

Ответ. 11, 12, 15, 24, 36.

Задача 2

Для каждого значения параметра a найдите все значения переменной x, при которых равны выражения $a(1+18x)$ и $2a^2x+9$.

Решение.

Значения переменной x, при которых равны выражения $a(1+18x)$ и $2a^2x+9$ являются корнями уравнения $a(1+18x)=2a^2x+9$. В данном уравнении присутствуют две переменные a и x, но у этих переменных разный смысл: x – неизвестная, a – постоянная (которая получила название параметр). Специфика задач с параметром состоит в следующем: рассматривается не одно уравнение, а целое семейство уравнений одновременно, в котором каждое уравнение семейства получается при конкретном значении параметра. Так как параметр может принимать бесконечное множество различных значений, то выписать все уравнения семейства мы не сможем. Однако каждое уравнение семейства должно быть решено.

Чтобы решить каждое из уравнений заданного семейства поступают следующим образом: все множество допустимых значений параметра (тех значений, при которых уравнение имеет смысл) разбивают на подмножества и решают задачу на каждом из подмножеств. Чтобы множество допустимых значений параметра разбить на подмножества, нужно найти те значения параметра, при которых или при переходе через которые происходит качественное изменение задачи.

Допустимыми значениями параметра являются любые действительные числа. Преобразуем заданное уравнение.

$$a(1+18x) = 2a^2x+9;$$

$$a+18ax = 2a^2x+9;$$

$$2a^2x-18ax = a-9;$$

$$(2a^2-18a)x = a-9;$$

$$2a(a-9)x = a-9.$$

После преобразований мы получили линейное уравнение с параметром. Качественное изменение линейного уравнения с параметром происходит при тех значениях параметра, при которых коэффициент при неизвестной становится равным нулю. Таким образом, допустимые значения параметра разбиваются на три подмножества.

1) $a - 9 = 0$, $a = 9$. При этом значении параметра уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 0$. Решением такого уравнения будут любые действительные значения x.

2) $a = 0$. При этом значении параметра уравнение принимает вид: $0 \cdot x = -9$. Полученное уравнение решений не имеет.

3) $a(a - 9) \neq 0$, $a \neq 9$ и $a \neq 0$. При этих значениях параметра коэффициент при неизвестной отличен от нуля, следовательно, для решения уравнения обе части уравнения на этот коэффициент нужно разделить:

$$x = \frac{a-9}{2a(a-9)};$$

$$x = \frac{1}{2a}.$$

Ответ. При $a = 9$ выражения равны при любых действительных значениях x;

при $a = 0$ выражения не могут быть равными ни при каких действительных значениях x;

при $a \neq 9$ и $a \neq 0$ выражения равны при $x = \frac{1}{2a}$.

Задача 3

Пусть $abc = 1$, $1 + a + ab \neq 0$, $1 + b + bc \neq 0$, $1 + c + ca \neq 0$. Верно ли, что $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1$? Ответ обосновать.

Решение.

Так как $abc = 1$, то $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $\frac{1}{1+b+bc} = \frac{abc}{abc+b+bc} = \frac{abc}{b(1+c+ac)} = \frac{ac}{1+c+ac} = \frac{ac}{abc+c+ac} = \frac{ac}{c(1+a+ab)} = \frac{a}{1+a+ab}$; $\frac{1}{1+c+ac} = \frac{abc}{abc+c+ac} = \frac{abc}{c(1+a+ab)} = \frac{ab}{1+a+ab}$. Тогда

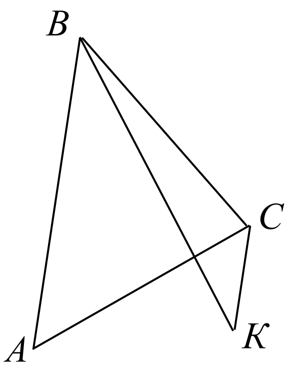
$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{a}{1+a+ab} + \frac{ab}{1+a+ab} = \frac{1+a+ab}{1+a+ab} = 1.$$

Ответ. Верно.

Задача 4

Отрезки AC и BK пересекаются во внутренней точке так, что $AB > AC$. Докажите, что $BK > CK$.

Решение.



Проведем отрезки AC, CK и BC.

В ΔABC $AB > AC$, следовательно, $\angle ACB > \angle ABC$ так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Так как по условию задачи отрезки AC и BK пересекаются во внутренней точке, то луч CA проходит внутри $\angle ACB$, а луч BK проходит внутри $\angle ABC$, следовательно, $\angle BCK > \angle ACB$, $\angle ABC > \angle KBC$.

Так как $\angle ACB > \angle ABC$, $\angle BCK > \angle ACB$, $\angle ABC > \angle KBC$, то $\angle BCK > \angle ACB > \angle ABC > \angle KBC$, то есть $\angle BCK > \angle KBC$.

В ΔKBC $\angle BCK > \angle KBC$, следовательно, $BK > CK$ так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, **что и требовалось доказать.**

Задача 5

Разложите гири с весами 1 г, 2 г, 3 г, …, 555 г на три кучи, равные по весу.

Решение.

Найдем сначала сумму весов всех гирь. Так как $1 + 555 = 2 + 554 = 3 + 553 = \ldots = 277 + 279 = 556$, то все гири разбиваются на 277 пар, вес каждой из которых равен 556 г и остается одна гиря с весом 278 г, тогда

$$1 + 2 + \ldots + 555 = 556\cdot 277 + 278 = 154290(\text{г}).$$

Так как нам нужно разложить все гири на три кучи, равные по весу, то вес гирь в каждой куче будет равен $154290:3 = 51430$(г).

<u>1 способ.</u> Так как $277 = 3\cdot 92 + 1$, то распределим 276 пар на три кучи следующим образом:

1 куча – 1 г, 555 г, 2 г, 554 г, …, 92 г, 464 г (первые 92 пары);

2 куча – 93 г, 463 г, 94 г, 462 г, …, 184 г, 372 г (следующие 92 пары);

3 куча – 185 г, 371 г, 186 г, 370 г, …, 276 г, 280 г (следующие 92 пары).

Вес гирь в каждой куче равен $92\cdot 556 = 51152$(г). Не распределенный остались гири с весами 277 г, 278 г и 279 г. Так как $279 = 278 + 1$, $277 = 278 – 1$, то поступим следующим образом: из первой кучи заберем гирю весом 1 г и добавим гирю весом 279 г, во вторую кучу добавим гирю весом 278 г, а в третью кучу добавим гири весом 1 г и 277 г. Тогда вес гирь в каждой куче будет равен $51152 + 278 = 51430$(г). Получаем распределение гирь на кучи:

1 куча – 2 г, 3 г, …, 92 г, 279 г, 464 г, 465 г, …, 555 г;

2 куча – 93 г, 94 г, …, 184 г, 278 г, 372 г, 373 г, …, 463 г;

3 куча – 1 г, 185 г, 186 г, …, 277 г, 280 г, 281 г, …, 371 г.

<u>2 способ.</u> Рассмотрим 9 гирь с весами n г, $(n + 1)$г, …, $(n + 8)$г и распределим их на три кучи с равными весами. Так как $n + (n + 4) + (n + 8) = (n + 1) + (n + 5) + (n + 6) = (n + 2) + (n + 3) + (n + 7) = 3n + 12$, то получаем распределение:

1 куча – n г, $(n + 4)$г, $(n + 8)$г;

2 куча – $(n + 1)$г, $(n + 5)$г, $(n + 6)$г;

3 куча – $(n + 2)$г, $(n + 3)$г, $(n + 7)$г.

Так как $555 = 9\cdot 61 + 6$, то выделим 61 группу по 9 гирь в каждой и распределим их на кучи указанным выше способом. Остаются нераспределенными гири с весами 550 г, 551 г, 552 г, 553 г, 554 г, 555 г. Так как $550 + 555 = 551 + 554 = 552 + 553$, то поместим гири с весами 550 г и 555 г в первую кучу, 551 г и 554 г – во вторую кучу, 552 г и 553 г в третью кучу. Получаем распределение:

1 куча – 1 г, 5 г, 9 г, 10 г, 14 г, 18 г, …, 541 г, 545 г, 549 г, 550 г, 555 г;

2 куча – 2 г, 6 г, 7 г, 11 г, 15 г, 16 г, …, 542 г, 546 г, 547 г, 551 г, 554 г;

3 куча – 3 г, 4 г, 8 г, 12 г, 13 г, 17 г, …, 543 г, 544 г, 548 г, 552 г, 553 г.

<u>3 способ.</u> Возьмем первых m гирь так, чтобы $1 + 2 + \ldots + m \le 51430$, а $1 + 2 + \ldots + m + (m + 1) > 51430$.

$1 + 2 + \ldots + 320 = (1 + 320) + (2 + 319) + \ldots + (160 + 161) = 321 \cdot 160 = 51360$, $51360 < 51430$, $1 + 2 + \ldots + 320 + 321 = 51360 + 321 = 51681$, $51681 > 51430$, $51430 - 51360 = 70$, $70 < 320$, поэтому заменим гирю весом в 320 г на гирю весом 390 г, получим 1 кучу – 1 г, 2 г, …, 319 г, 390 г. $1 + 2 + \ldots + 319 + 390 = 51360 - 320 + 390 = 51430$.

Возьмем последних n гирь так, чтобы $555 + 554 + \ldots + (555 - (n - 1)) \le 51430$, а $555 + 554 + \ldots + (555 - (n - 1)) + (555 - n) > 51430$.

$455 + 456 + \ldots + 555 = (455 + 555) + (456 + 554) + \ldots + (504 + 506) + 505 = 1010 \cdot 50 + 505 = 50500 + 505 = 51005$, $51005 < 51430$,
$454 + 455 + 456 + \ldots + 555 = 454 + 51005 = 51459$, $51459 > 51430$, $51459 - 51430 = 29$, $29 < 454$, поэтому заменим гирю весом в 454 г на гирю весом 425 г, получим 2 кучу – 425 г, 455 г, 456 г, …, 555 г. $425 + 455 + 456 + \ldots + 555 = 51005 + 425 = 51430$.

Оставшиеся гири образуют 3 кучу – 320 г, 321 г, …, 389 г, 391 г, 392 г, …, 424 г, 426 г, 427 г, …, 454 г. Получаем распределение:

1 куча – 1 г, 2 г, …, 319 г, 390 г;
2 куча – 425 г, 455 г, 456 г, …, 555 г;
3 куча – 320 г, 321 г, …, 389 г, 391 г, 392 г, …, 424 г, 426 г, 427 г, …, 454 г.

Ответ. <u>1 способ</u>: 1 куча – 2 г, 3 г, …, 92 г, 279 г, 464 г, 465 г, …, 555 г;
2 куча – 93 г, 94 г, …, 184 г, 278 г, 372 г, 373 г, …, 463 г;
3 куча – 1 г, 185 г, 186 г, …, 277 г, 280 г, 281 г, …, 371 г;
<u>2 способ</u>: 1 куча – 1 г, 5 г, 9 г, 10 г, 14 г, 18 г, …, 541 г, 545 г, 549 г, 550 г, 555 г;
2 куча – 2 г, 6 г, 7 г, 11 г, 15 г, 16 г, …, 542 г, 546 г, 547 г, 551 г, 554 г;
3 куча – 3 г, 4 г, 8 г, 12 г, 13 г, 17 г, …, 543 г, 544 г, 548 г, 552 г, 553 г;
<u>3 способ</u>: 1 куча – 1 г, 2 г, …, 319 г, 390 г;
2 куча – 425 г, 455 г, 456 г, …, 555 г;
3 куча – 320 г, 321 г, …, 389 г, 391 г, 392 г, …, 424 г, 426 г, 427 г, …, 454 г.