Задание № 4

Задача 1

Не вычисляя корней квадратного трехчлена $x^2 + 9x + 13$, найдите значение выражения $\dfrac{x_2}{2x_2 - x_1} + \dfrac{x_1}{2x_1 - x_2}$, где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $x^2 + 9x + 13$.

Решение.

Проверим сначала, что квадратный трехчлен имеет действительные корни. Для этого найдем дискриминант квадратного трехчлена: $D = 9^2 - 4 \cdot 13 = 29 > 0$, следовательно, квадратный трехчлен $x^2 + 9x + 13$ имеет два различных действительных корня x_1, x_2.

Преобразуем выражение $\dfrac{x_2}{2x_2 - x_1} + \dfrac{x_1}{2x_1 - x_2}$:

$$\frac{x_2}{2x_2 - x_1} + \frac{x_1}{2x_1 - x_2} = \frac{x_2(2x_1 - x_2) + x_1(2x_2 - x_1)}{(2x_2 - x_1)(2x_1 - x_2)} = \frac{4x_1x_2 - x_2^2 - x_1^2}{5x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1^2} =$$

$$= \frac{6x_1x_2 - (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1^2)}{9x_1x_2 - 2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1^2)} = \frac{6x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2}{9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2}.$$

Если x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $x^2 + 9x + 13$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -9$, $x_1x_2 = 13$, тогда

$$\frac{x_2}{2x_2 - x_1} + \frac{x_1}{2x_1 - x_2} = \frac{6x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2}{9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2} = \frac{6 \cdot 13 - (-9)^2}{9 \cdot 13 - 2 \cdot (-9)^2} = \frac{78 - 81}{117 - 162} = \frac{-3}{-45} = \frac{1}{15}.$$

Ответ. $\dfrac{x_2}{2x_2 - x_1} + \dfrac{x_1}{2x_1 - x_2} = \dfrac{1}{15}$.

Задача 2

Упростите $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$. Сравните результат с числом $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Решение.

Для того чтобы упростить дробь $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$, избавимся от иррациональности в знаменателе дроби. Избавиться от иррациональности в знаменателе – это значит преобразовать дробь к равной ей дроби, у которой знаменатель является числом целым.

В знаменателе дроби есть два слагаемых, содержащих квадратные корни. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на такое выражение, чтобы в знаменателе можно было воспользоваться формулой разности квадратов. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{10}-\sqrt{2}$. Получим

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{10-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}.$$

Преобразуем теперь $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. Так как

$$6-2\sqrt{5}=5-2\sqrt{5}+1=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}+1^2=\left(\sqrt{5}-1\right)^2,$$

а по свойству квадратного корня $\sqrt{x^2}=|x|$, то $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}-1$ в силу того, что $\sqrt{5}>1$. Тогда

$$\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{8}=\frac{6-2\sqrt{5}}{8}=\frac{2\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)}{8}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

Таким образом, $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$.

Сравним теперь $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$ и $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. Так как $5 > 4{,}84 = (2{,}2)^2$, то $\sqrt{5} > 2{,}2$; $-\sqrt{5} < -2{,}2$; $3-\sqrt{5} < 3 - 2{,}2 = 0{,}8$; $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}<\dfrac{0{,}8}{4}=\dfrac{1}{5}=\dfrac{6}{30}$. Так как $2 > 1{,}96 = (1{,}4)^2$, то $\sqrt{2} > 1{,}4$; $\dfrac{\sqrt{2}}{6}>\dfrac{1{,}4}{6}=\dfrac{0{,}7}{3}=\dfrac{7}{30}$. В результате получили, что $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}<\dfrac{6}{30}$, а $\dfrac{\sqrt{2}}{6}>\dfrac{7}{30}$, следовательно, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}<\dfrac{6}{30}<\dfrac{7}{30}<\dfrac{\sqrt{2}}{6}$, то есть $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}<\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}<\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Задача 3

Для каждого значения параметра a определите количество корней уравнения $|x - a| + 2|x - 2| = 4$.

Решение.

1 способ. ***Аналитический способ решения.***

Рассмотрим три случая:

1 случай. $a = 2$. Тогда уравнение примет вид $|x - 2| + 2|x - 2| = 4$; $3|x - 2| = 4$; $|x - 2| = \frac{4}{3}$; $x - 2 = \pm\frac{4}{3}$; $x = |x - 2| = \frac{10}{3}$; или $x = |x - 2| = \frac{2}{3}$. Таким образом, при $a = 2$ уравнение имеет два корня.

2 случай. $a < 2$. В этом случае уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < a, \\ a - x + 2(2 - x) = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} a \le x \le 2, \\ x - a + 2(2 - x) = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ x - a + 2(x - 2) = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим каждую систему совокупности.

2.1. $\begin{cases} x < a, \\ a - x + 2(2 - x) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x < a, \\ -3x = -a; \end{cases}$ $\begin{cases} x < a, \\ x = \frac{a}{3}. \end{cases}$

Если $\frac{a}{3} < a$, $a < 3a$, $-2a < 0$, $a > 0$, то $x = \frac{a}{3}$ является решением системы; если $a \le 0$, то система решений не имеет. Таким образом, при $0 < a < 2$ система имеет одно решение, при $a \le 0$ система решений не имеет.

2.2. $\begin{cases} a \le x \le 2, \\ x - a + 2(2 - x) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le x \le 2, \\ -x = a; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le x \le 2, \\ x = -a. \end{cases}$

Если $a \le -a \le 2$, $\begin{cases} a \le -a, \\ -a \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2a \le 0, \\ a \ge -2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 0, \\ a \ge -2; \end{cases}$ $-2 \le a \le 0$, то $x = -a$ является решением системы; если $a < -2$ или $0 < a < 2$, то система решений не имеет. Таким образом, при $-2 \le a \le 0$ система имеет одно решение, при $a < -2$ или $0 < a < 2$ система решений не имеет.

2.3. $\begin{cases} x > 2, \\ x - a + 2(x-2) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ 3x = 8 + a; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x = \dfrac{8+a}{3}. \end{cases}$

Если $\dfrac{8+a}{3} > 2$, $8 + a > 6$, $a > -2$, то $x = \dfrac{8+a}{3}$ является решением системы; если $a \le -2$, то система решений не имеет. Таким образом, при $-2 < a < 2$ система имеет одно решение, при $a \le -2$ система решений не имеет.

Найдем, при каких значениях параметра a совпадают найденные решения систем.

1) $\dfrac{a}{3} = -a$, $a = -3a$, $4a = 0$, $a = 0 < 2$.

2) $\dfrac{a}{3} = \dfrac{8+a}{3}$, $a = 8 + a$, $0 = 8$. Последнее равенство не верно, следовательно, ни при каких значениях параметра a выражения $\dfrac{a}{3}$ и $\dfrac{8+a}{3}$ равными не являются.

3) $\dfrac{8+a}{3} = -a$, $8 + a = -3a$, $4a = -8$, $a = -2 < 2$.

Окончательно получаем, что если $0 < a < 2$, то $x = \dfrac{a}{3}$; если $-2 \le a \le 0$, то $x = -a$; если $-2 < a < 2$, то $x = \dfrac{8+a}{3}$. Таким образом, при $a < -2$ совокупность решений не имеет, при $a = -2$ совокупность имеет одно решение, при $-2 < a < 2$ совокупность имеет два решения.

3 случай. $a > 2$. В этом случае уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 2, \\ a - x + 2(2 - x) = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \le x \le a, \\ a - x + 2(x - 2) = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x > a, \\ x - a + 2(x - 2) = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим каждую систему совокупности.

3.1. $\begin{cases} x < 2, \\ a - x + 2(2 - x) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2, \\ -3x = -a; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2, \\ x = \dfrac{a}{3}. \end{cases}$

Если $\dfrac{a}{3} < 2$, $a < 6$, то $x = \dfrac{a}{3}$ является решением системы; если $a \geq 6$, то система решений не имеет. Таким образом, при $2 < a < 6$ система имеет одно решение, при $a \geq 6$ система решений не имеет.

3.2. $\begin{cases} 2 \leq x \leq a, \\ a - x + 2(x - 2) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \leq x \leq a, \\ x = 8 - a. \end{cases}$

Если $2 \leq 8 - a \leq a$, $\begin{cases} 2 \leq 8 - a, \\ 8 - a \leq a; \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq 6, \\ 8 \leq 2a; \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq 6, \\ a \geq 4; \end{cases}$ $4 \leq a \leq 6$, то $x = 8 - a$ является решением системы; если $2 < a < 4$ или $a > 6$, то система решений не имеет. Таким образом, при $4 \leq a \leq 6$ система имеет одно решение, при $2 < a < 4$ или $a > 6$ система решений не имеет.

3.3. $\begin{cases} x > a, \\ x - a + 2(x - 2) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x > a, \\ 3x = 8 + a; \end{cases}$ $\begin{cases} x > a, \\ x = \dfrac{8 + a}{3}. \end{cases}$

Если $\dfrac{8 + a}{3} > a$, $8 + a > 3a$, $2a < 8$, $a < 4$, то $x = \dfrac{8 + a}{3}$ является решением системы; если $a \geq 4$, то система решений не имеет. Таким образом, при $2 < a < 4$ система имеет одно решение, при $a \geq 4$ система решений не имеет.

Найдем, при каких значениях параметра a совпадают найденные решения систем.

1) $\dfrac{a}{3} = 8 - a$, $a = 24 - 3a$, $4a = 24$, $a = 6 > 2$.

2) $\dfrac{a}{3} = \dfrac{8 + a}{3}$, $a = 8 + a$, $0 = 8$. Последнее равенство не верно, следовательно, ни при каких значениях параметра a выражения $\dfrac{a}{3}$ и $\dfrac{8 + a}{3}$ равными не являются.

3) $\dfrac{8 + a}{3} = 8 - a$, $8 + a = 24 - 3a$, $4a = 16$, $a = 4 > 2$.

Окончательно получаем, что если $2 < a < 6$, то $x = \dfrac{a}{3}$; если $4 \leq a \leq 6$, то $x = 8 - a$; если $2 < a < 4$, то $x = \dfrac{8 + a}{3}$. Таким образом, при $a > 6$ совокупность решений не имеет, при $a = 6$ совокупность имеет одно решение, при $2 < a < 6$ совокупность имеет два решения.

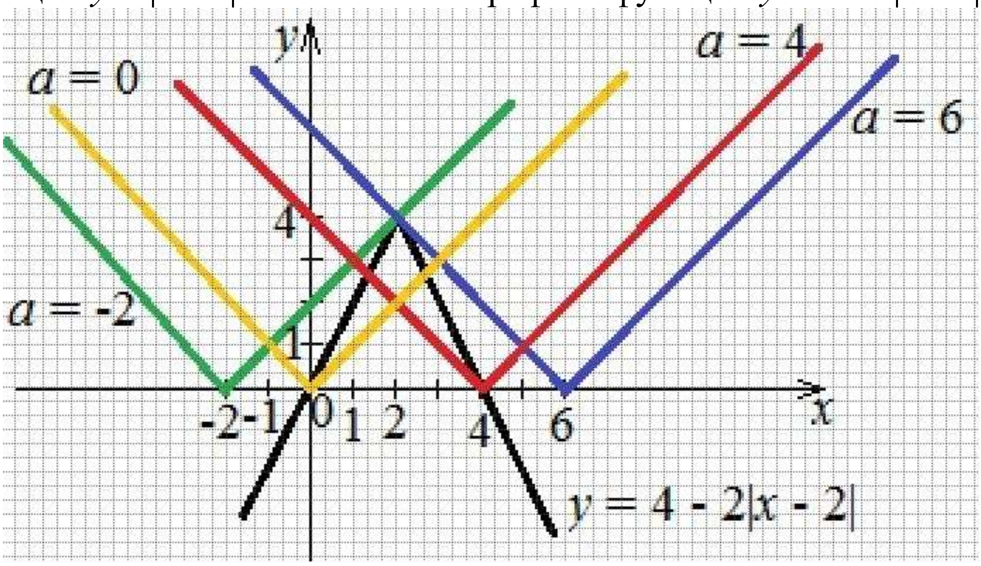
<u>2 способ</u>. *Графический способ решения в системе координат Oxy*.

Преобразуем уравнение: $|x - a| + 2|x - 2| = 4$; $|x - a| = 4 - 2|x - 2|$. Построим в одной системе координат Оxy графики функций $y = 4 - 2|x - 2|$ и $y = |x - a|$.

$y = 4 - 2|x - 2|$; $y = \begin{cases} 4 - 2(2 - x), & x < 2, \\ 4 - 2(x - 2), & x \geq 2; \end{cases}$ $y = \begin{cases} 2x, & x < 2, \\ 8 - 2x, & x \geq 2. \end{cases}$

График функции $y = |x - a|$ может быть получен из графика функции $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Оx на a единиц вправо при $a > 0$ и на $-a$ единиц влево при $a < 0$.

График функции $y = |x - a|$ построим для $a = -2$, $a = 0$, $a = 2$, $a = 4$ и $a = 6$, так как при переходе через эти значения параметра изменяется положение графика функции $y = |x - a|$ относительно графика функции $y = 4 - 2|x - 2|$.



$a = -2$ соответствует график зеленого цвета; $a = 0$ – желтого цвета; $a = 4$ – красного цвета; $a = 6$ – фиолетового цвета.

Если $a < -2$ или $a > 6$, то графики функций $y = 4 - 2|x - 2|$ и $y = |x - a|$ не имеют общих точек, следовательно, уравнение $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ не имеет решений.

Если $a = -2$ или $a = 6$, то графики функций $y = 4 - 2|x - 2|$ и $y = |x - a|$ имеют одну общую точку, следовательно, уравнение $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ имеет одно решение.

Если $-2 < a < 0$, то левый луч графика функции $y = |x - a|$ не имеет общих точек с графиком функции $y = 4 - 2|x - 2|$, а правый луч графика функции $y = |x - a|$ имеет две общих точки с графиком функции $y = 4 - 2|x - 2|$, следовательно, уравнение $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ имеет два решения.

Если $a = 0$ или $a = 4$, то графики функций $y = 4 - 2|x - 2|$ и $y = |x - a|$ имеют две общих точки, следовательно, уравнение $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ имеет два решения.

Если $0 < a < 4$, то левый луч графика функции $y = |x - a|$ имеет одну общую точку с графиком функции $y = 4 - 2|x - 2|$, и правый луч графика функции $y = |x - a|$ имеет одну общую точку с графиком функции $y = 4 - 2|x - 2|$, следовательно, уравнение $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ имеет два решения.

Если $4 < a < 6$, то правый луч графика функции $y = |x - a|$ не имеет общих точек с графиком функции $y = 4 - 2|x - 2|$, а левый луч графика функции $y = |x - a|$ имеет две общих точки с графиком функции $y = 4 - 2|x - 2|$, следовательно, уравнение $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ имеет два решения.

Таким образом, получаем, что при $a < -2$ или $a > 6$ уравнение корней не имеет; при $a = -2$ или $a = 6$ уравнение имеет один корень; при $-2 < a < 6$ уравнение имеет два корня.

<u>3 способ.</u> ***Графический способ решения в системе координат Оха.***

При графическом методе решения задачи с параметром в системе координат Оxa решением задачи при конкретном значении параметра $a = a_0$ является проекция на ось Оx множества точек, полученного в пересечении прямой $a = a_0$ с множеством точек координатной плоскости Оxa, удовлетворяющих исходной задаче.

Построим в системе координат Оxa множество точек, удовлетворяющих уравнению $|x - a| + 2|x - 2| = 4$.

1) $\begin{cases} x \ge a, \\ x \ge -2, \\ x - a + 2(x-2) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge a, \\ x \ge -2, \\ 3x - a - 8 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge a, \\ x \ge -2, \\ a = 3x - 8. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \ge a, \\ x < 2, \\ x - a + 2(2-x) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge a, \\ x < 2, \\ -x - a = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge a, \\ x < 2, \\ a = -x. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x < a, \\ x \ge 2, \\ a - x + 2(x-2) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x < a, \\ x \ge 2, \\ a + x - 8 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < a, \\ x \ge 2, \\ a = 8 - x. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x < a, \\ x < 2, \\ a - x + 2(2-x) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x < a, \\ x < 2, \\ a - 3x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < a, \\ x < 2, \\ a = 3x. \end{cases}$

Найдем точки пересечения прямых $a = 3x - 8$, $a = 3x$, $a = -x$, $a = 8 - x$ с прямыми $a = x$ и $x = 2$.

$\begin{cases} a = x, \\ a = 3x - 8; \end{cases}$ $\begin{cases} a = x, \\ x = 3x - 8; \end{cases}$ $\begin{cases} a = x, \\ 2x = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4, \\ a = 4. \end{cases}$ Получили, что прямые $a = 3x - 8$ и $a = x$ пересекаются в точке с координатами (4; 4).

$\begin{cases} a = x, \\ a = 3x; \end{cases}$ $\begin{cases} a = x, \\ x = 3x; \end{cases}$ $\begin{cases} a = x, \\ 2x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ a = 0. \end{cases}$ Получили, что прямые $a = 3x$ и $a = x$ пересекаются в точке с координатами (0; 0).

$\begin{cases} a = x, \\ a = -x; \end{cases}$ $\begin{cases} a = x, \\ x = -x; \end{cases}$ $\begin{cases} a = x, \\ 2x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ a = 0. \end{cases}$ Получили, что прямые $a = -x$ и $a = x$ пересекаются в точке с координатами (0; 0).

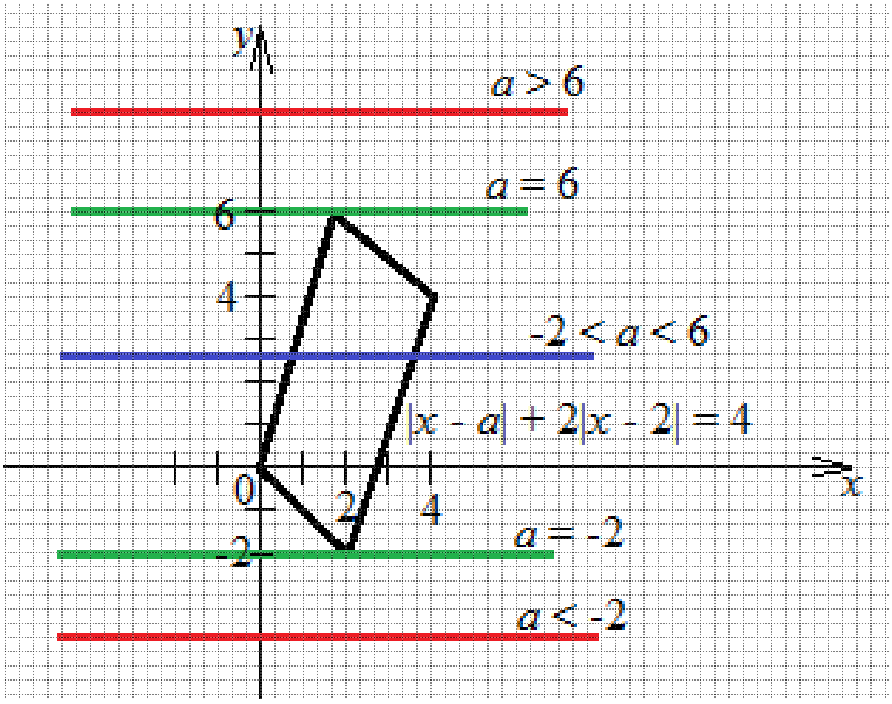
$\begin{cases} a = x, \\ a = 8 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} a = x, \\ x = 8 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} a = x, \\ 2x = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4, \\ a = 4. \end{cases}$ Получили, что прямые $a = 8 - x$ и $a = x$ пересекаются в точке с координатами (4; 4).

$\begin{cases} x = 2, \\ a = 3x - 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ a = -2. \end{cases}$ Получили, что прямые $a = 3x - 8$ и $x = 2$ пересекаются в точке с координатами (2; –2).

$\begin{cases} x = 2, \\ a = 3x; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ a = 6. \end{cases}$ Получили, что прямые $a = 3x$ и $x = 2$ пересекаются в точке с координатами (2; 6).

$\begin{cases} x = 2, \\ a = -x; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ a = -2. \end{cases}$ Получили, что прямые $a = -x$ и $x = 2$ пересекаются в точке с координатами (2; –2).

$\begin{cases} x = 2, \\ a = 8 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ a = 6. \end{cases}$ Получили, что прямые $a = 8 - x$ и $x = 2$ пересекаются в точке с координатами (2; 6).



Черным цветом построено множество точек, удовлетворяющих уравнению $|x - a| + 2|x - 2| = 4$.

Красным цветом построены прямые $a = \text{const}$, соответствующие $a < -2$ или $a > 6$, которые с множеством точек $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ общих точек не имеют, следовательно, при $a < -2$ или $a > 6$ уравнение $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ не имеет корней.

Зеленым цветом построены прямые $a = -2$ и $a = 6$, которые с множеством точек $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ имеют одну общую точку, следовательно, при $a = -2$ или $a = 6$ уравнение $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ имеет один корень.

Фиолетовым цветом построены прямые $a = \text{const}$, соответствующие $-2 < a < 6$, которые с множеством точек $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ имеют две общие точки, следовательно, при $-2 < a < 6$ уравнение $|x - a| + 2|x - 2| = 4$ имеет два корня.

Ответ. При $a < -2$ или $a > 6$ уравнение корней не имеет;

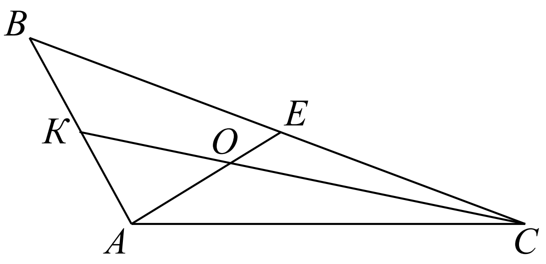
при $a = -2$ или $a = 6$ уравнение имеет один корень;

при $-2 < a < 6$ уравнение имеет два корня.

Задача 4

Площадь треугольника ABC равна 12 см^2. Медианы AE и CK пересекаются в точке O, $\angle AOC = 150°$, $AE = 3$ см. Найдите CK.

Решение.



По свойству медиан треугольника $\dfrac{AO}{OE} = \dfrac{CO}{OK} = \dfrac{2}{1}$, следовательно, $AO = \dfrac{2}{3}AE = 2(\text{см})$.

Так как медиана треугольника делит треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{ACK} = S_{CKB} = \dfrac{1}{2}S_{ABC} = 6(\text{см}^2)$.

Так как треугольники AOK и AOC имеют общую высоту, проведенную из вершины A, то $\dfrac{S_{AOC}}{S_{AOK}} = \dfrac{CO}{OK} = \dfrac{2}{1}$, следовательно, $S_{AOC} = \dfrac{2}{3}S_{ACK} = 4(\text{см}^2)$.

$S_{AOC} = \dfrac{1}{2}AO \cdot OC \cdot \sin\angle AOC$, $4 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot OC \cdot \sin 150° = OC \cdot \sin 30° = \dfrac{1}{2}OC$, значит, $OC = 8$см, $CK = \dfrac{3}{2}OC = \dfrac{3}{2} \cdot 8 = 12(\text{см})$.

Ответ. $CK = 12$ см.

Задача 5

На двух скамейках сидят по 6 детей, все они разного возраста, суммы возрастов детей на этих скамейках одинаковы, равны и произведения возрастов. Зная, что никому из этих 12 человек не исполнилось 18 лет, определите возраст каждого из них. Какой возраст у детей, сидящих на одной скамейке с тем, кому 16 лет? Ответ обосновать.

Решение.

Так как по условию задачи никому из детей не исполнилось 18 лет, то возможные значения возрастов – от 1 года до 17 лет. Всего возможных значений возрастов – 17, а ребят, сидящих на скамейках – 12, то пять чисел из 17 нужно исключить. По условию задачи произведения и суммы возрастов ребят, сидящих на разных скамейках, совпадают. Разложим все числа, большие 1, на простые множители. Простыми числами являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$, $16 = 2^4$. Тогда $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$. Так как произведения возрастов ребят, сидящих на каждой из скамеек, совпадают, то в произведении всех возрастов ребят, сидящих на обеих скамейках, каждый из простых множителей должен входить в четной степени. Значит, из произведения нужно исключить множители 2, 5, 11, 13 и 17 (если будут исключены еще какие-нибудь простые множители, то в четной степени). Так как всего нужно исключить пять чисел, то тремя из этих пяти чисел являются 11, 13 и 17. Найдем еще два числа, которые нужно исключить. Чтобы суммы возрастов ребят, сидящих на каждой из скамеек, совпадали, эти суммы должны иметь одинаковую четность, а из оставшихся 14 чисел 6 нечетных, поэтому нужно исключить или два четных числа, или два нечетных числа, причем, среди разложения этих чисел на простые множители 2 и 5 должны встречаться нечетное число раз, а любой другой простой множитель должен встречаться четное число раз. Два нечетных числа мы исключить не можем, так как в этом случае не будет исключен из произведения множитель 2, поэтому нужно исключить два четных числа. Среди чисел, которые исключаются, не может быть 16, так как на одной из скамеек по условию задачи сидит ребенок возраста 16 лет. Множитель 5 входит в разложение на множители трех чисел: 5, 10 и 15, но только одно из них является четным, поэтому одним из оставшихся двух исключаемых чисел является число 10, тогда второе исключаемое число должно быть четным и содержать в разложении на простые множители только четные степени простых множителей. Таких чисел два: 4 и 16, но 16 исключить мы не можем, поэтому последним числом, которое нужно исключить, является число 4.

Таким образом, на скамейках сидят ребята возрастов 1 год, 2, 3 года, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16 лет. Так как $1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot12\cdot14\cdot15\cdot16 = 2^{12}\cdot3^6\cdot5^2\cdot7^2$, а $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 12 + 14 + 15 + 16 = 98$, то произведение возрастов ребят, сидящих на каждой из скамеек, равно $2^6\cdot3^3\cdot5\cdot7$, а сумма возрастов равна 49.

Разобьем числа 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16 на две группы по 6 чисел, в каждой из которых будут совпадать суммы и произведения чисел группы. Числа 7 и 14 должны быть в разных группах, так как содержат множитель 7, который в произведении чисел одной группы встречается один раз. Аналогично, числа 5 и 15 должны быть в разных группах. Всего 12 чисел, из которых 6 четных и 6 нечетных. Так как сумма чисел в каждой группе равна 49, то в каждой группе нечетное количество нечетных чисел. Но пять нечетных чисел в одной группе быть не может, так как в разложении на простые множители шестого четного числа группы простой множитель 2 должен входить шесть раз, а из всех четных чисел в разложении числа 16 простой множитель 2 стоит в четвертой степени (максимально возможной для рассматриваемых чисел). Поэтому в каждой группе три четных и три нечетных числа.

Если числа 14 и 15 в одной группе, то среди четырех оставшихся чисел в этой группе должны быть два четных и два нечетных числа, содержащих два раза множитель 3 и пять раз множитель 2 в разложении на простые множители. Из оставшихся нечетных чисел 1, 3 и 9 этими числами могут быть 1 и 3 или 1 и 9.

Если это числа 1 и 9, то два оставшихся четных числа должны в разложении на простые множители иметь только множитель 2, встречающийся пять раз, что возможно для чисел 2 и 16. То есть получаем группу чисел: 1, 2, 9, 14, 15, 16. Но $1 + 2 + 9 + 14 + 15 + 16 = 57 \neq 49$, то есть условие задачи не выполняется.

Если это числа 1 и 3, то два оставшихся четных числа должны в разложении на простые множители иметь множитель 2, встречающийся пять раз и множитель 3, встречающийся один раз, что возможно для чисел 6 и 16 или 12 и 8. То есть получаем группы чисел: 1, 3, 6, 14, 15, 16 или 1, 3, 8, 12, 14, 15. Но $1 + 3 + 6 + 14 + 15 + 16 = 55 \neq 49$, $1 + 3 + 8 + 12 + 14 + 15 = 53 \neq 49$, то есть для обеих групп условие задачи не выполняется.

Следовательно, числа 14 и 15 находятся в разных группах.

Тогда в одной группе числа 7 и 15. Среди оставшихся четырех чисел этой группы одно нечетное и три четных, в разложении которых на простые множители множитель 2 встречается шесть раз, множитель 3 – два раза. Третьим нечетным числом может быть 1 или 3 или 9.

Если это нечетное число 9, то три оставшихся четных числа группы в разложении на простые множители должны иметь только множитель 2, встречающийся шесть раз, что не возможно, так как среди четных чисел степенями числа 2 являются числа 2, 8 и 16, но в разложении этих чисел на простые множители множитель 2 встречается восемь раз, а должен встречаться шесть раз.

Если это нечетное число 1, то три оставшихся четных числа должны в разложении на простые множители иметь множитель 2, встречающийся шесть раз, и множитель 3, встречающийся два раза, что возможно для чисел 6, 12 и 8. То есть получаем группу чисел 1, 6, 7, 8, 12, 15. $1 + 6 + 7 + 8 + 12 + 15 = 49$, условие задачи выполняется. Вторую группу образуют числа 2, 3, 5, 9, 14, 16.

Если это нечетное число 3, то три оставшихся четных числа должны в разложении на простые множители иметь множитель 2, встречающийся шесть раз, и множитель 3, встречающийся один раз, что возможно для чисел 2, 6, 16 или 2, 8, 12. То есть получаем группы чисел 2, 3, 6, 7, 15, 16 или 2, 3, 7, 8, 12, 15.

Для группы чисел 2, 3, 7, 8, 12, 15 $2 + 3 + 7 + 8 + 12 + 15 = 47 \neq 49$, то есть условие задачи не выполняется.

Для группы чисел 2, 3, 6, 7, 15, 16 $2 + 3 + 6 + 7 + 15 + 16 = 49$, условие задачи выполняется. Вторую группу образуют числа 1, 5, 8, 9, 12, 14.

Ответ. Возраста детей, сидящих на скамейках: 1 год, 2, 3 года, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16 лет. На одной скамейке с тем, кому 16 лет, сидят дети возрастов 2, 3 года, 6, 7, 15 лет или 2, 3 года, 5, 9, 14 лет.