ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2022-2023 учебный год)

Задание 4
Задача 1

В детском лагере воспитатель, двое вожатых и семеро детей решили сыграть в баскетбол. Сколько у них существует способов разбиться на две команды по пять человек, если в каждой команде должен быть хотя бы один взрослый?

Решение

Так как всего имеется трое взрослых, в одной команде должен быть один взрослый, а в другой - двое. Люди, не вошедшие в команду с одним взрослым, образуют команду, в которой двое взрослых.

Способов выбрать одного взрослого из трёх – 3. После этого требуется выбрать четырех детей из семи –

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

способов. Таким образом, количество способов разбиться на две команды, удовлетворяющие условиям, равно $3 \cdot 35 = 105$.

Ответ: 105.

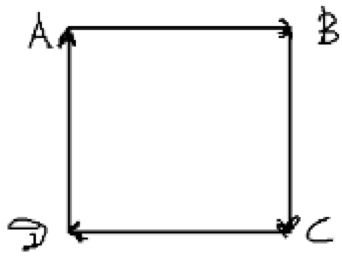
Задача 2

Найдите координаты вершин *C* и *D* квадрата *ABCD*, если две другие вершины - точки *A*(5;2), *B*(3;3).

Решение

Пусть координаты вершин C и D квадрата – $C(x, y)$, $D(z, t)$. Получаем векторы

$$\overrightarrow{AB} = (-2{,}1), \overrightarrow{BC} = (x-3, y-3), \overrightarrow{CD} = (z-x, t-y), \overrightarrow{DA} = (5-z, 2-t).$$



Так как квадрат - параллелограмм, справедливо равенство

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC},$$

то есть

$$-2 = x - z, 1 = y - t.$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ ортогональны, то есть их скалярное произведение равно нулю,

$$-2(x-3) + y - 3 = 0,$$
$$y - 3 = 2(x-3).$$

Длина вектора $\overrightarrow{BC}$ равна длине вектора $\overrightarrow{AB}$, то есть

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1 + 4 = 5.$$

Таким образом,

$$(x-3)^2+4(x-3)^2=5,$$
$$(x-3)^2=1,$$
$$x=4 \text{ или } x=2.$$

Если $x=4$, то $y=5$, $z=6$, $t=4$.
Если $x=2$, то $y=1$, $z=4$, $t=0$.

Ответ: $C(4{,}5)$, $D(6{,}4)$ или $C(2{,}1)$, $D(4{,}0)$.

Задача 3

На два года был взят кредит в банке под некоторый процент годовых. В конце первого года в банк вернули 15% всего накопленного к тому времени долга. В конце второго года кредит полностью погасили, внеся в банк сумму, на 22,4% превышающую полученную. Найдите процент годовых по кредиту в данном банке.

Решение

Пусть процент годовых по кредиту равен x%. Обозначим $r=1+x/100$. Если S- сумма кредита, то через год долг составлял Sr, в конце второго года –

$$(Sr-Sr\cdot 0{,}15)r=0{,}85Sr^2.$$

По условию задачи,
$0{,}85Sr^2=1{,}224S.$
Таким образом,

$$r^2=\frac{1{,}224}{0{,}85}=\frac{36}{25}, \qquad r=1{,}2, \qquad x=100(r-1)=20.$$

Ответ: 20%.

Задача 4

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x)=2ax+|x^2-6x+5|$$

не принимает значений, меньших 1.

Решение

Раскроем модуль.

$$x^2-6x+5=0,\ x_1=5,\ x_2=1.$$
$$x^2-6x+5>0, \text{ если } x<1 \text{ или } x>5,$$
$$x^2-6x+5\le 0, \text{ если } 1\le x\le 5.$$

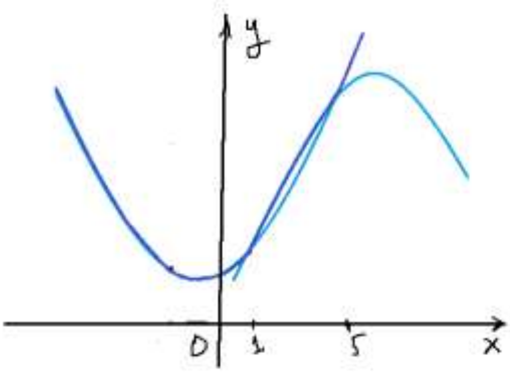
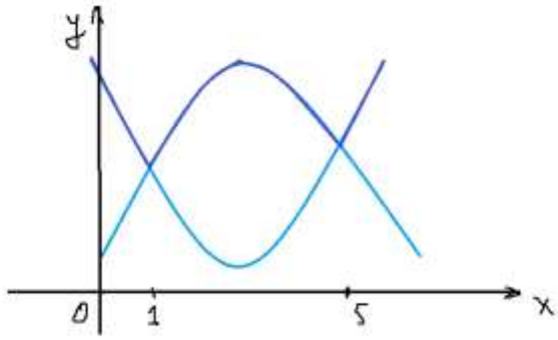
Таким образом, при $x<1$ и $x>5$

$$f(x)=x^2+(2a-6)x+5,$$

график функции – парабола с ветвями, направленными вверх. Координаты вершины параболы - $x_0=3-a$, $y_0=f(3-a)=5-(3-a)^2$.
При $1\le x\le 5$

$$f(x)=-x^2+(2a+6)x-5,$$

график функции – парабола с ветвями, направленными вниз.

Таким образом, если $x_0 < 1$ или $x_0 > 5$, то есть $a > 2$ или $a < -2$, наименьшее значение функции равно y_0.

$$5 - (3 - a)^2 \geq 1,$$
$$(3 - a)^2 \leq 4,$$
$$1 \leq a \leq 5.$$

Следовательно, в этом случае $2 < a \leq 5$.

Если $1 \leq x_0 \leq 5$, то наименьшее значение функции равно либо $f(1)$, либо $f(5)$.

$$f(1) = 2a \geq 1,\ a \geq 1/2;$$

$f(5) = 10a \geq 1$, $a \geq 0{,}1$;

Таким образом, $0{,}5 \leq a \leq 2$.

Объединяя рассмотренные случаи, получаем, $0{,}5 \leq a \leq 5$.

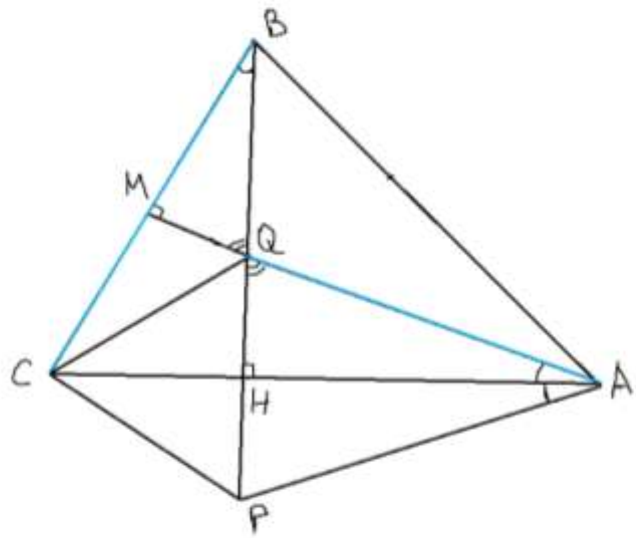
Ответ: $0{,}5 \leq a \leq 5$.

Задача 5

В остроугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 67^\circ$. На высоте BH отмечена точка Q такая, что $\angle AQC = 113^\circ$ и AQ=BC. Найдите угол между прямыми AQ и BC и остальные углы треугольника.

Решение

Пусть M – точка пересечения прямой AQ со стороной BC, точка P симметрична точке Q относительно прямой AC. Так как $67^\circ + 113^\circ = 180^\circ$, четырехугольник ABCP вписан в окружность. $\angle CBP$ и $\angle CAP$ опираются на одну дугу, $\angle CAP = \angle CAQ$ по построению, следовательно $\angle CAQ = \angle CBP$. $\angle MQB = \angle HQA$ как вертикальные. Следовательно, $\angle BMQ = \angle AHQ = 90^\circ$.



Треугольник BHC равен треугольнику AHQ по гипотенузе и острому углу, следовательно, BH=AH. Таким образом, треугольник AHB- равнобедренный, $\angle BAC = 45^\circ$.

$\angle BCA = 180^\circ - 67^\circ - 45^\circ = 68^\circ$.

Ответ: $90^\circ, 45^\circ, 68^\circ$.