**Студенческая математическая олимпиада им. Л.П. Шильникова. 2023**

1. Найдите множество значений функции .

**Ответ:** . **Решение.** Область определения функции  – это отрезок [0,2]. Докажем, что на интервале (0;2) производная  положительна и значит, функция  монотонно возрастает. Имеем: . Очевидно,  для , т.к. все слагаемые положительны. Проверим, что и на полуинтервале  будет . Для этого в следующих оценках мы используем очевидные неравенства  и , а также монотонное убывание косинуса во второй четверти. При всех  имеем ,  и . Таким образом, = 0 при всех . Значит, непрерывная функция *f*(*x*) монотонно возрастает на [0;2], откуда следует ответ. *Комментарии*. (1) Оценку можно доказать не только для , но и для всех (0;2), если (в свою очередь) взять производную и проверить, что у этого выражения минимум будет при *x*=1. (2) Можно проверить (с помощью производной), что на положительна даже сумма .

1. Внутри круга единичного радиуса с центром *О* отметили точку *А* на расстоянии *а* от центра (0<*a*<1). **а)** Найдите длину наименьшей хорды, проходящей через *А.* **б)** Найдите наибольшую площадь треугольника *OMN* для множества хорд *MN,* проходящих через *А*.

**Ответ**: **а)** ; **б)** при  наибольшая площадь равна 1/2; при  наибольшая площадь равна . **Решение**. **а)** По свойству хорд, пересекающихся в данной точке, произведение длин есть постоянное число. Тогда из неравенства о средних имеем , причем равенство достигается, когда *MA* = *AN,* т.е. для хорды . **б)** Обозначим . Очевидно,  (α становится равным π, когда хорда *MN* совпадет с диаметром, проходящем через *A*). Из формулы площади  следует, что требуется найти наибольшее значение . Пусть  (минимальная хорда из пункта **а**)) и  – соответствующее значение угла . Заметим, что  для любого положения *MN*, т.к. , где , и поэтому в силу пункта **а**) и монотонности синуса в первой четверти, большему значению *MN* соответствует больший угол α. Если , то  и в этом случае при изменении положения хорды *MN*, можно найти такое положение, когда  (т.к. при приближении *MN* к диаметру угол α становится близким к π). Если же , то  и поэтому в силу неравенства  и монотонного убывания функции *sin x* во второй четверти, наибольшее значение будет при . Тогда .

1. Дан многочлен *Р*(*х*) четной степени с действительными коэффициентами и положительным старшим членом. Известно, что уравнение *Р*(*х*) *= х* имеет единственное (действительное) решение. **а)** Докажите, что уравнение *Р*(*Р*(*х*)) *= х* также имеет единственное действительное решение. **б)** Докажите, что кратность корня многочлена *Р*(*х*) *– х* – число четное. **в)** Найдите кратность корня многочлена *Р*(*Р*(*х*)) *– х*,если у многочлена *Р*(*х*) *– х* корень кратности2*.*

**Ответ: в)** кратность равна 2**. Решение.** **а)** Поскольку уравнение *Р*(*х*) *= х* имеет единственное решение (скажем, ), то график *у*= *Р*(*х*)расположен выше прямой *у = х* всюду, кроме единственной точки (,) – точки касания. Действительно, если бы существовала точка графика ниже прямой *у = х*, то в силу неравенства *P*(*x*) > |*x*| для достаточно больших |*x*| (это неравенство, в свою очередь, следует из четности степени *P*(*x*) и поведения на бесконечности многочлена степени не ниже второй), а также непрерывности функции *y*= *P*(*x*), её график пересекал бы эту прямую (по теореме Больцано-Коши) еще в какой-то точке. Таким образом, *P*(*x*) > *x* при всех  и поэтому при  выполняется , т.е. уравнение *Р*(*Р*(*х*)) *= х* не имеет других корней, кроме. **б**) Из пункта **а**) следует, что – точка (строгого) минимума функции *Р*(*х*) *– х.* По свойству минимума, высшие производные в точке  могут принимать нулевые значения лишь до нечетного порядка, а следующая (четная) производная должна быть положительной – в противном случае экстремума нет (это следует из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). **в**) Имеем *P*′() = 1 и *P*′′() > 0. Поскольку (*P*(*P*(*x*)) – *x*)′ = *P*′(*P*(*x*))*P*′(*x*) – 1, то (*P*(*P*(*x*)) – *x*)′() = 1 – 1 = 0. Далее, (*P*(*P*(*x*)) – *x*)′′ = *P*′′(*P*(*x*))⋅*P*′(*P*(*x*))⋅*P*′′(*x*), поэтому (*P*(*P*(*x*)) – *x*)′′()= *P*′′()  *P*′′()= 2*P*′′() > 0, т.е. кратность равна 2.

1. Вычислите определенные интегралы: **а**)  **б**) .

**Ответ. а)** ; **б)** 0. **Решение**. **а)** Представим числитель подынтегрального выражения в виде. После деления на sin *x* интегралы от косинусов на отрезке  будут равны 0 (т.к. для целых *n*). В результате останется . **б)** Аналогичное представление числителя заканчивается последним членом, а после деления на sin*x* и интегрирования получается 0.

1. Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 5100 и состоит (в десятичной записи) только из нечетных цифр.

**Решение**. Докажем по индукции более общий факт: для любого натурального *п* существует число, составленное ровно из *п* нечетных цифр и делящееся на 5*п*. База индукции проверяется для 5 (а также для 75, 375). Для индукционного перехода предположим, что число  составлено из *k* нечетных цифр и делится на 5*k*, т.е.  для некоторого целого *p,* и покажем, что к этому числу можно приписать слева нечетную цифру *х* так, чтобы число  делилось на , т.е.  должно делиться на , это равносильно тому, что  должно делиться на 5. Для *х* «кандидатами» могут быть пять различных нечетных цифр 1, 3, 5, 7, 9, тогда  будут разными (mod 5), т.к. иначе для разных  число делилось бы на 5. Значит,  для какой-то нечетной цифры *х* делится на 5

1. Даны точки  и  в пространстве, точка *O* – середина отрезка . Найдите геометрическое место точек **,** для которых **.

**Ответ:** объединение двух сфер радиуса  с центрами в точках *A* и *B*. **Решение*.*** Пусть *x* = *MA*, *y* = *MB*, *z* = *MO*, *c* = *AB*/2. Тогда имеем *x*2 + *y*2 = 2*z*2 + 2*c*2 (из теоремы косинусов, примененной к параллелограмму), и по условию задачи: *x*2*y*2 = 2*z*2⋅2*c*2. Из этих двух уравнений следует (по обратной теореме Виета), что либо *x*2 = 2*c*2, либо *y*2 = 2*c*2. Таким образом, точка *M* лежит на одной из двух сфер с центрами в точках *A* и *B* и одинаковым радиусом . Легко видеть, что любая точка на этих сферах удовлетворяет данному условию задачи.

1. Даны действительные числа *a*, *b*, *c*, *d*, которые удовлетворяют двум соотношениям *a* + *b* = *c* + *d*и *a*100 + *b*100 = *c*100 + *d*100. Можно ли утверждать, что *a*10 + *b*10 = *c*10 + *d*10?

**Ответ:** можно**. Решение.** Пусть для определенности, *ab* и *cd* . Обозначимчерез *m* полусумму чисел *a* + *b* = *c* + *d.* Тогда *a = m + x, b = m – x* для некоторого *x* и аналогично, *c = m + y, d = m – y* для некоторого *y.* Рассмотрим функцию *f*(*x*) *=*(*m*+ *x*)**+(*m – x*)*.* Эта функция строго монотонно возрастает при *x,* т.к. её производная, равная 100((*m*+ *x*)*–*(*m – x*)**), положительна при *x*> 0(что, в свою очередь, следует из строгой монотонности степенной функции нечетной степени). Значит,равенство *f*(*x*) *= f*(*y*)возможно лишь при *x = y.*Таким образом, *a = с* и *b = d*, откуда следует результат.

1. Существует ли квадратная матрица, у которой все элементы нули или единицы, а определитель **а)** больше 2023? **б)** равен 2023?

**Ответ**: **а)** существует, **б)** существует. **Решение**. **а)** Построим пример. Рассмотрим матрицу *А* третьего порядка с 6 единицами и тремя нулями, а именно . Очевидно, det *A* = 2*.* Далее построим блочно-диагональную матрицу  порядка 3*n*, расположив по диагонали *n* копий матрицы *A*, а остальные элементы положив нулями. Тогда , и при *n*> 10 матрица  (порядка 33 или более) будет искомой. **б)** Обобщая пример матрицы *А*изпункта **а)**, рассмотримматрицу  нечетного порядка 2*k*+1, у которой все диагональные и наддиагональные элементы (вида ) равны единице и, кроме того, единицы стоят в первом столбце на нечетных местах: = 1, а остальные элементы матрицы  равны нулю. Докажем по индукции, что det=*k*+1. Действительно, база индукции была проверена для матрицы , а шаг индукции следует из разложения det по последней строке: det1+det(по свойству определителя блочно-треугольныой матрицы). Тогда det= 1+*k*+1=*k*+2. Итак, матрица  порядка 4045 искомая. *Комментарий.* Естьи другие конструкции матриц для пунктов**а)** *и* **б)***.* Например, рассмотрим матрицу *С* порядка *n,* у которой на диагонали стоят единицы, а остальные элементы – нули. Покажем, чтоdet *C=* (–1)**(*n*–1). Возьмём матрицу *D* из одних единиц, т.е. *D*=*C*+*E,* и пусть det (*D*– – её характеристический многочлен. Он равен , где – сумма главных миноров *k*-го порядка матрицы *D.* Поэтому tr *D* = *n* и. При  и *n*=2024 получим de*t C= –*2023. Если переставить две строки в матрице *С*, то у определителя будет знак плюс.

1. Последовательность задана рекуррентным соотношением , *x*1 = 3. Докажите, что она сходится и найдите предел.

**Ответ**: предел равен 2. **Решение**. Если последовательность имеет предел *а*, то из рекуррентного соотношения (при переходе к пределу) следует, что , откуда (после решения кубического уравнения с целым корнем=2) *а* = 2. Докажем, что предел действительно существует. Вычислим *x*2 =  и докажем по индукции, что < *хп*< 3 при *n* > 2 (т.е. вся последовательность лежит в отрезке между первым и вторым членом). Действительно, *хп+*1 << 3 и *хп+*1 >=. Теперь оценим отклонение от предполагаемого предела:

===<=<.

Таким образом,  стремится к 0, и = 2.

1. Дан ориентированный граф на *n* вершинах, в котором нет ориентированных циклов. Известно, что для некоторых его вершин *А* и *В* число (ориентированных) путей из *А* в *В* равно 2023. Найдите минимально возможное *n.*

**Ответ**: 13. **Решение.** *Оценка*. Каждому пути из *А* в *В* поставим в соответствие множество промежуточных вершин, через которые этот путь проходит. Покажем, что такое отображение множества путей (из *А* в *В*) во всевозможные подмножества вершин графа, кроме *А* и *В,* (т.е. в подмножества (*n*– 2)-элементного множества вершин), является инъективным. Действительно, пусть, от противного, для некоторых двух путей *U* и *V* получилось одно и то же подмножество *Х*. Поскольку *U* и *V* – это две разных перестановки подмножества *Х*, найдутся такие две вершины *x*, *y* в *X*, что в *U* вершина *x* встречается раньше, чем *y*, а в *V* – наоборот (можно взять в качестве *x* и *y* первые несовпадающие вершиныпри движении из *А* в *В* вдоль пути *U* и *V*, соответственно). Но тогда из *x* можно добраться до *y* (вдоль части пути *U*), а затем вернуться в *x* (вдоль части пути *V*), что противоречит условию отсутствия циклов. Таким образом, число путей из *А* в *В* не превосходит количества подмножеств (*n* – 2)-элементного множества, то есть 2023 ≤ , откуда *n* ≥13. *Пример*. Построим граф с 13 вершинами, удовлетворяющий условиям задачи. Пронумеруем вершины от 0 до 12 (*A* – нулевая, *B* – двенадцатая) и соединим сначала любые две вершины в направлении от меньшего номера к большему. Таким образом, в графе 78= ориентированных ребер, а циклов нет. Тогда для каждого подмножества промежуточных вершин существует путь по ним из *А* в *В*, то есть всего 211 = 2048 путей. Чтобы довести число путей до 2023, удалим три ребра, соединяющие вершины №1, №4 и № 5 с *В*. Тогда из 2048 вычитаются пути, идущие из *А* в №1, а также из *А* в №4 и из *А* в № 5 (до удаления ребер после такого пути за один шаг можно было попасть в *В*), т.е. число путей из *А* в *В* станет 2048 – = 2023.