Задание № 5

Задача 1

Найдите a^2 и a, если $a=\sqrt{22-4\sqrt{30}}-\sqrt{22+4\sqrt{30}}$.

Решение.

1 способ. Вычислим a^2:

$$a^2=\left(\sqrt{22-4\sqrt{30}}-\sqrt{22+4\sqrt{30}}\right)^2=\left(\sqrt{22-4\sqrt{30}}\right)^2-2\cdot\sqrt{22-4\sqrt{30}}\cdot\sqrt{22+4\sqrt{30}}+$$
$$+\left(\sqrt{22+4\sqrt{30}}\right)^2=22-4\sqrt{30}-2\cdot\sqrt{\left(22-4\sqrt{30}\right)\cdot\left(22+4\sqrt{30}\right)}+22+4\sqrt{30}=$$
$$=44-2\cdot\sqrt{22^2-\left(4\sqrt{30}\right)^2}=44-2\cdot\sqrt{484-16\cdot30}=44-2\cdot\sqrt{484-480}=44-2\cdot\sqrt{4}=$$
$$=44-2\cdot2=44-4=40.$$

Так как $0<22-4\sqrt{30}<22+4\sqrt{30}$, то $\sqrt{22-4\sqrt{30}}<\sqrt{22+4\sqrt{30}}$, следовательно $a=\sqrt{22-4\sqrt{30}}-\sqrt{22+4\sqrt{30}}<0$, значит, $a=-\sqrt{40}=-\sqrt{4\cdot10}=-2\sqrt{10}$.

2 способ. Преобразуем выражение $22-4\sqrt{30}$:

$$22-4\sqrt{30}=12-2\cdot\sqrt{2\cdot2\cdot5\cdot6}+10=\left(\sqrt{12}\right)^2-2\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{10}+\left(\sqrt{10}\right)^2=\left(\sqrt{12}-\sqrt{10}\right)^2=$$
$$=\left(\sqrt{4\cdot3}-\sqrt{10}\right)^2=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{10}\right)^2,$$

аналогично, $22+4\sqrt{30}=\left(\sqrt{12}+\sqrt{10}\right)^2=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)^2$. Тогда

$$a=\sqrt{22-4\sqrt{30}}-\sqrt{22+4\sqrt{30}}=\sqrt{\left(\sqrt{12}-\sqrt{10}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{12}+\sqrt{10}\right)^2}=\left|\sqrt{12}-\sqrt{10}\right|-$$
$$-\left|\sqrt{12}+\sqrt{10}\right|.$$

Так как $12>10$, то $\sqrt{12}>\sqrt{10}$, следовательно, $\sqrt{12}-\sqrt{10}>0$, кроме того, $\sqrt{12}+\sqrt{10}>0$. Значит,

$$a=\left|\sqrt{12}-\sqrt{10}\right|-\left|\sqrt{12}+\sqrt{10}\right|=\sqrt{12}-\sqrt{10}-\left(\sqrt{12}+\sqrt{10}\right)=\sqrt{12}-\sqrt{10}-\sqrt{12}-\sqrt{10}=$$
$$=-2\sqrt{10}.$$

Тогда $a^2=\left(-2\sqrt{10}\right)^2=4\cdot10=40.$

Ответ. $a=-2\sqrt{10}$, $a^2=40.$

Задача 2

Найдите все значения параметра a, при которых квадратный трехчлен $0{,}5x^2 - 2x - 5a + 1$ имеет два различных действительных корня, сумма кубов которых меньше 40.

Решение.

Найдем сначала условие на параметр, при выполнении которого квадратный трехчлен имеет два различных действительных корня. Чтобы квадратный трехчлен имел два различных действительных корня, его дискриминант должен быть положительным.

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 5a) = 4 - 2(1 - 5a) = 4 - 2 + 10a = 2 + 10a.$$

Тогда значения параметра, при которых квадратный трехчлен имеет два различных действительных корня, определяются условием $2 + 10a > 0$.

Найдем теперь сумму кубов корней квадратного трехчлена. Так как

$$b^3 + c^3 = (b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3) - 3b^2c - 3bc^2 = (b + c)^3 - 3bc(b + c),$$

то $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3\cdot(x_1\cdot x_2)\cdot(x_1 + x_2)$.

Для нахождения суммы и произведения корней квадратного трехчлена воспользуемся теоремой Виета: если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. Тогда $x_1 + x_2 = -\dfrac{-2}{0{,}5} = 4$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1 - 5a}{0{,}5} = 2 - 10a$, следовательно, $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3\cdot(x_1\cdot x_2)\cdot(x_1 + x_2) =$
$= 4^3 - 3\cdot 4\cdot(2 - 10a) = 64 - 24 + 120a = 40 + 120a$.

Составим теперь систему ограничений на параметр, решениями которой являются искомые значения параметра:

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1^3 + x_2^3 < 40. \end{cases}$$

Подставим в систему найденные значения дискриминанта и суммы кубов корней квадратного трехчлена и решим полученную систему.

$$\begin{cases} 2(1 + 5a) > 0, \\ 40 + 120a < 40; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 5a > 0, \\ 120a < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -0{,}2, \\ a < 0; \end{cases}$$

$$-0{,}2 < a < 0.$$

Ответ. $-0{,}2 < a < 0$.

Задача 3

Определите все значения, которые может принимать выражение $x^3 + xy$, если $x^2 - 3x + y + 6 = 0$.

Решение.

Так как $x^2 - 3x + y + 6 = 0$, то $x^2 + y = 3x - 6$, следовательно, $x^3 + xy = x(x^2 + y) = x(3x - 6) = 3x^2 - 6x$. Таким образом, значения выражения $x^3 + xy$ совпадают со значениями выражения $3x^2 - 6x$. Для того, чтобы найти все значения, которые может принимать выражение $3x^2 - 6x$, преобразуем это выражение:

$$3x^2 - 6x = 3(x^2 - 2x) = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) = 3(x^2 - 2x + 1) - 3 = 3(x - 1)^2 - 3.$$

Так как при любых значениях x $(x - 1)^2 \geq 0$, то $3(x - 1)^2 \geq 0$, $3(x - 1)^2 - 3 \geq -3$, то есть выражение $3x^2 - 6x$ может принимать любые значения из промежутка $[-3; +\infty)$, значит, все значения выражения $x^3 + xy$ – промежуток $[-3; +\infty)$.

Ответ. $[-3; +\infty)$.

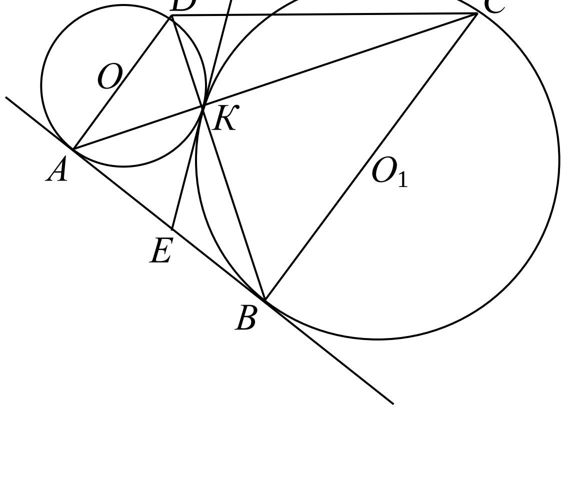
Задача 4

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что $AD \parallel BC$.

б) Найдите площадь треугольника DKC, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 9.

Решение.



а) Пусть O – центр окружности меньшего радиуса, O_1 – центр окружности большего радиуса. Проведем через точку K общую касательную к окружностям, которая пересечет касательную AB в точке E.

По свойству отрезков касательных $EA = EK$, $EB = EK$, то есть $AE = EK = EB$, следовательно, точки A, B и K лежат на одной окружности с центром в точке E, отрезок AB является диаметром этой окружности, $\angle AKB = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр.

Так как $\angle AKB = 90°$, то $\angle AKD = 90°$ как смежный с углом $\angle AKB = 90°$. Так как $\angle AKD = 90°$ и вписан в окружность с центром в точке O, то AD – диаметр окружности с центром в точке O, то есть $O \in AD$.

Так как $\angle AKB = 90°$, то $\angle BKC = 90°$ как смежный с углом $\angle AKB = 90°$. Так как $\angle BKC = 90°$ и вписан в окружность с центром в точке O_1, то BC – диаметр окружности с центром в точке O_1, то есть $O_1 \in BC$.

Так как AB – касательная к окружностям с центрами в точках O и O_1, то $OA \perp AB$, $O_1B \perp AB$ по свойству касательной, следовательно, $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, значит, $AD \parallel BC$, **что и требовалось доказать.**

б) Пусть $AO = 4$, $BO_1 = 9$, тогда $AD = 8$, $BC = 18$ как диаметры окружностей.

По свойству двух касающихся внешним образом окружностей отрезок общей касательной равен удвоенному корню из произведения радиусов этих окружностей, следовательно, $AB = 2\sqrt{AO \cdot BO_1} = 2\sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Рассмотрим ΔABC, $\angle ABC = 90°$, $AB = 12$, $BC = 18$. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 18^2} = \sqrt{6^2(2^2 + 3^2)} = 6\sqrt{13}$.

Рассмотрим ΔABD, $\angle ABD = 90°$, $AB = 12$, $AD = 8$. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{4^2(3^2 + 2^2)} = 4\sqrt{13}$.

$\Delta ADK \sim \Delta CBK$ по двум углам ($\angle AKD = \angle CKB$ как вертикальные, ($\angle ADK = \angle CBK$ как соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей BD), следовательно, $\frac{AK}{CK} = \frac{DK}{BK} = \frac{AD}{BC} = \frac{4}{9}$. Тогда $DK = \frac{4}{13}BD = \frac{4}{13} \cdot 4\sqrt{13} = \frac{16}{\sqrt{13}}$; $CK = \frac{9}{13}AC = \frac{9}{13} \cdot 6\sqrt{13} = \frac{54}{\sqrt{13}}$.

В ΔDKC $\angle DKC = 90°$, следовательно, $S_{DKC} = \frac{1}{2}DK \cdot KC = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{\sqrt{13}} \cdot \frac{54}{\sqrt{13}} = \frac{8 \cdot 54}{13} = \frac{432}{13}$.

Ответ. $S_{DKC} = \frac{432}{13}$.

Задача 5

На трех лугах, площади которых относятся как 4:5:6, пасутся коровы. На первом лугу 14 коров могут пастись 12 дней, на втором 17 коров могут пастись 20 дней. Сколько дней могут пастись на третьем лугу 24 коровы, если на этих лугах трава растет равномерно и с одинаковой скоростью, а коровы съедают и ту траву, которая была, когда они пришли, и ту, которая выросла за время их пребывания на лугу?

Решение.

Пусть x – количество суточных порций травы на единице площади, y суточных порций – суточный прирост травы на единице площади, u – количество дней, которые могут пастись 24 коровы на третьем лугу. Так как на первом поле 4 единицы площади, на втором – 5 единиц площади, на третьем – 6 единиц площади, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4(x+12y)=14\cdot 12, \\ 5(x+20y)=17\cdot 20, \\ 6(x+yu)=24u. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 4(x+12y)=14\cdot 12, \\ 5(x+20y)=17\cdot 20, \\ 6(x+yu)=24u; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+12y=14\cdot 3, \\ x+20y=17\cdot 4, \\ x+yu=4u; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+12y=42, \\ x+20y=68, \\ x+yu=4u; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+12y=42, \\ 8y=26, \\ x+yu=4u; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+12\cdot\dfrac{13}{4}=42, \\ y=\dfrac{13}{4}, \\ x+\dfrac{13}{4}u=4u; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = \dfrac{13}{4}, \\ \dfrac{3}{4}u = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = \dfrac{13}{4}, \\ u = 4. \end{cases}$$

Таким образом, на третьем лугу 24 коровы могут пастись 4 дня.

Ответ. 4 дня.