ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2022-2023 учебный год)

<u>Задание 5</u>

Задача 1

В некотором магазине продаются красные и зеленые яблоки, которые, в зависимости от сорта, могут быть сладкими или кислыми. В начале дня красных яблок было 54% от общего количества, кислых - 46%, а сладких зеленых яблок – 23%. В каком случае у первого покупателя больше шансов – выбрать зеленое яблоко среди кислых, или сладкое яблоко среди зеленых?

Решение.

Зеленые яблоки составляют 100-54=46 процентов от общего количества. Так как сладких зеленых яблок – 23%, кислых зеленых яблок 46-23=23 процента. Вероятность выбрать зеленое яблоко среди кислых равна отношению количества кислых зеленых яблок к общему количеству кислых яблок, то есть 0,5. Вероятность выбрать сладкое яблоко среди зеленых равна отношению количества сладких зеленых яблок к общему количеству зеленых яблок, то есть снова 0,5. Таким образом, указанные вероятности равны.

Ответ: шансы равны.

Задача 2

Из пунктов A и B одновременно выходят два пешехода и движутся с одинаковой скоростью v км/ч по дорогам, пересекающимся в точке O под углом в 60°. Через сколько времени после начала движения пешеходы окажутся на кратчайшем расстоянии друг от друга, и чему равно это расстояние, если AO=a км, BO=b км?

Решение.

Первый пешеход достигнет точки O за время $t_1 = a/v$, второй – за время $t_2 = b/v$. Пусть $a \leq b$. Через время $t \leq t_1$ первый пешеход будет на расстоянии $a - vt$ от точки O, а второй – на расстоянии $b - vt$ от точки O. По теореме косинусов квадрат расстояния между пешеходами будет равен

$$d^2(t) = (a - vt)^2 + (b - vt)^2 - (a - vt)(b - vt)$$
$$= v^2t^2 - v(a + b)t + a^2 + b^2 - ab.$$

Пусть $t_1 \leq t \leq t_2$ (первый пешеход достиг точки O, а второй ещё нет). Тогда первый пешеход будет на расстоянии $vt - a$ от точки O, второй – на расстоянии $b - vt$ от точки О, а квадрат расстояния между пешеходами будет равен

$$d_1^2(t) = (vt - a)^2 + (b - vt)^2 + (vt - a)(b - vt) = d^2(t).$$

Если $t > t_2$, первый пешеход будет на расстоянии $vt - a$ от точки О, второй – на расстоянии $vt - b$ от точки О, квадрат расстояния между пешеходами будет равен

$$d_2^2(t) = (vt - a)^2 + (vt - b)^2 - (vt - a)(vt - b) = d^2(t)$$

Расстояние между пешеходами будет наименьшим, когда наименьшим будет квадрат расстояния. $d^2(t)$ – квадратичная функция, она принимает наименьшее значение при $t^* = (a + b)/2v$,

$$d^2(t^*) = \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{4} - \frac{(a-b)(b-a)}{4} = \frac{3}{4}(b-a)^2.$$

Таким образом, кратчайшее расстояние между пешеходами равно

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}|b - a|.$$

Ответ: $(a + b)/2v$ часов, $\sqrt{3}|b - a|/2$ километров.

Задача 3

Решите ребус. Буквы и звёздочки обозначают цифры от 0 до 9 (Л≠0). Различные буквы соответствуют различным цифрам.

$$\begin{array}{r} \text{ЛЕТО} \\ \times\ \underline{\text{ЛЕТО}} \\ ***** \\ ***** \\ ***** \\ ***** \\ \hline ****\text{ЛЕТО} \end{array}$$

Решение.

Пусть x – четырехзначное число, зашифрованное словом ЛЕТО. Пусть y – четырехзначное число зашифрованное звездочками в результате вычислений. Тогда

$$x^2 = y \cdot 10^4 + x,$$

$$x(x - 1) = y \cdot 10^4 = y \cdot 2^4 \cdot 5^4.$$

Числа x и $x - 1$ взаимно простые, поэтому одно из них делится на $2^4 = 16$, а второе – на $5^4 = 625$. Таким образом,

$$x = 16a,\ x - 1 = 625b \text{ или } x - 1 = 16a,\ x = 625b,$$

числа a и b взаимно простые, причем a не делится на 5, b не делится на 2. Кроме того, $3 \leq b \leq 15$, так как $625b$ – четырехзначное число.

В первом случае последняя цифра числа $x - 1$ – 5, поэтому последняя цифра числа x – 6. Так как $625 = 16 * 39 + 1$, в первом случае получаем

$$16a - 625b = 1,$$

$$16(a - 39b) = b + 1.$$

Единственное целое число $b \in [3,15]$ такое, что $b + 1$ делится на 16, это $b = 15$, то есть $x = 9376$ (при этом $a = 39b + 1 = 585$).

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 9376 \\ \underline{9376} \end{array} \\ 56256 \\ 65632 \\ 28128 \\ 84384 \\ \hline 87909376 \end{array}$$

Во втором случае

$$16a - 625b = -1,$$

$$16(a - 39b) = b - 1.$$

Подходящих значений b нет.

Ответ: ЛЕТО=9376.

Задача 4

При всех значениях параметра a решите систему

$$\begin{cases} ax + |y - 1| = 1, \\ x + a(y - 1) = 3a - 2. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $t = y - 1$, получим систему

$$\begin{cases} ax + |t| = 1, \\ x + at = 3a - 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем

$$x = 3a - 2 - at,$$

следовательно,

$$3a^2 - 2a - a^2t + |t| = 1,$$

$$a^2t - |t| = (a - 1)(3a + 1).$$

Пусть $t \geq 0$

$$(a^2 - 1)t = (a - 1)(3a + 1)$$

Если $a = 1$, равенство справедливо при любом t. Получаем решения системы

$$y \geq 1, x = 1 - y.$$

Если $a = -1$ уравнение решений не имеет.

Если $a \neq \pm 1$, $t = (3a+1)/(a+1)$,

$$\frac{3a+1}{a+1} \geq 0,$$

если $a < -1$ или $a \geq -1/3$,

$$y = t + 1 = \frac{3a+1}{a+1} + 1 = \frac{4a+2}{a+1},$$

$$x = 3a - 2 - a\frac{3a+1}{a+1} = -\frac{2}{a+1}.$$

Пусть $t < 0$

$$(a^2+1)t = (a-1)(3a+1),$$

$$t = \frac{(a-1)(3a+1)}{a^2+1},$$

$$t < 0 \text{ при } -\frac{1}{3} < a < 1,$$

$$y = \frac{(a-1)(3a+1)}{a^2+1} + 1 = \frac{4a^2-2a}{a^2+1},$$

$$x = 3a - 2 - a\frac{(a-1)(3a+1)}{a^2+1} = \frac{4a-2}{a^2+1}.$$

Ответ: $a < -1$: $x = -2/(a+1)$, $y = (4a+2)/(a+1)$;

$-1 \leq a < -1/3$: решений нет;

$a = -1/3$: $x = -3$, $y = 1$;

$-1/3 < a < 1$ – два решения, $x = -2/(a+1)$, $y = (4a+2)/(a+1)$ и

$x = (4a-2)/(a^2+1)$, $y = (4a^2-2a)/(a^2+1)$;

$a = 1$: решение – все пары чисел $(x, 1-x)$, где $x \leq 0$;

$a > 1$: $x = -2/(a+1)$, $y = (4a+2)/(a+1)$.

Задача 5

Окружности радиусов 5 и 10 касаются внешним образом. Найдите площади четырехугольников, ограниченных тремя общими касательными к этим окружностям и прямыми, соединяющими точки касания.

Решение.

Пусть O_1 и O_2 - центры окружностей, A, B, C, D, M – точки касания, S, K и L – точки пересечения касательных. Найдем площади четырехугольников ABLK и LKCD.

$SA = SB, SC = SD$, следовательно, $AC = BD$.
Так как $\Delta ASO_1 = \Delta BSO_1, \Delta CSO_2 = \Delta DSO_2$, прямая SO_2 – биссектриса угла S и проходит через точку O_1. Кроме того, так как треугольники ASB и CSD равнобедренные, прямая SO_2
перпендикулярна прямым AB и CB, прямые AB и CB параллельные.
Таким образом, $ABDC$ – равнобедренная трапеция.
Треугольники ABO_1 и CDO_2 подобны,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AO_1}{CO_2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Далее, $AK = KM = KC, BL = LM = LD$. Таким образом, KL – средняя линия трапеции $ABDC$ и $KL = AC$.
Опустим перпендикуляр O_1N на прямую CO_2.

$$O_1N = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |NO_2|^2} = \sqrt{(5+10)^2 - (10-5)^2} = 10\sqrt{2} = AC.$$

$$KL = \frac{AB + CD}{2} = \frac{3 \cdot AB}{2} = 10\sqrt{2}, \qquad AB = \frac{20\sqrt{2}}{3}, \qquad CD = \frac{40\sqrt{2}}{3}.$$

$$CH = \frac{1}{2}(CD - AB) = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

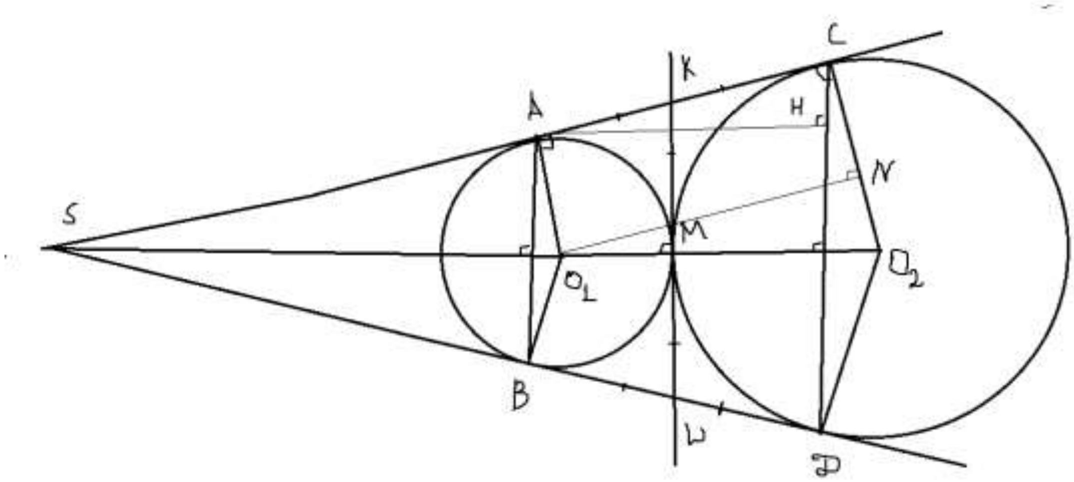
Высота AH трапеции $ABDC$ равна

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{200 - \frac{200}{9}} = \frac{40}{3}.$$

Таким образом,

$$S_{ABLK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH}{2}(AB + KL) = \frac{10}{3} \cdot \frac{50\sqrt{2}}{3} = \frac{500\sqrt{2}}{9}.$$

$$S_{LKCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH}{2}(CD + KL) = \frac{10}{3} \cdot \frac{70\sqrt{2}}{3} = \frac{700\sqrt{2}}{9}.$$



Ответ: $500\sqrt{2}/9$, $700\sqrt{2}/9$.