

Решение задания № 1**Задача 1**

Ребята принесли корзину яблок и стали их делить. При делении на двоих в остатке было одно яблоко. При делении на троих в остатке было 2 яблока. Какой остаток яблок будет при делении на шестерых? (ответ обосновать)

Решение

Обозначим A – количество яблок в корзине.

1 способ. Так как при делении на двоих в остатке одно яблоко, а при делении на троих в остатке 2 яблока, то число $A + 1$ кратно двум и кратно трем, а так как числа 2 и 3 взаимно простые (не имеют общего делителя, большего 1), то $A + 1$ кратно и их произведению, то есть кратно шести. Следовательно, число A при делении на 6 дает остаток 5, то есть при делении на шестерых в остатке будет 5 яблок.

2 способ. Так как при делении на двоих в остатке одно яблоко, то A число нечетное. Так как при делении на троих в остатке два яблока, то $A = 3n + 2$. Так как A число нечетное, а 2 – число четное, то $3n$ число нечетное, следовательно, n – число нечетное, то есть $n = 2m + 1$, тогда $A = 3 \cdot (2m + 1) + 2 = 6m + 5$, значит, при делении на шестерых в остатке будет 5 яблок.

3 способ. Рассмотрим все возможные остатки при делении на 6: 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Тогда число A имеет вид $A = 6n$ или $A = 6n + 1$ или $A = 6n + 2$ или $A = 6n + 3$ или $A = 6n + 4$ или $A = 6n + 5$. Так как при делении на двоих в остатке одно яблоко, то A число нечетное, значит, A не может при делении на 6 иметь остаток 0, 2 или 4, так как числа $6n$, $6n + 2$ и $6n + 4$ – четные. Так как при делении на троих в остатке два яблока, то число A при делении на 3 имеет остаток 2, значит, A при делении на 6 не может иметь остаток 3, так как число $6n + 3$ кратно трем. Если $A = 6n + 1 = 3 \cdot 2n + 1$, то A при делении на 3 имеет остаток 1, что противоречит условию, значит, A при делении на 6 не может иметь остаток 1. Если $A = 6n + 5 = 3 \cdot 2n + 3 + 2 = 3 \cdot (2n + 1) + 2$, то A – число нечетное и при делении на 3 дает остаток два, что соответствует условию задачи. Значит, $A = 6n + 5$, то есть при делении на шестерых в остатке будет 5 яблок.

Ответ. 5 яблок.

Задача 2

Ученику нужно было умножить 78 на двузначное число, в котором цифра десятков втрое больше цифры единиц; по ошибке он переставил цифры во втором сомножителе, отчего получил произведение на 2808 меньше искомого. Чему равно искомое произведение?

Решение

1 способ. Обозначим двузначное число, о котором идет речь в задаче, за $\overline{xy} = 10x + y$, тогда число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, запишется как $\overline{yx} = 10y + x$. Найдем разность двух произведений, о которых говорится в задаче:

$$\begin{aligned} 78\overline{xy} - 78\overline{yx} &= 78((10x + y) - (10y + x)) = 78(10x + y - 10y - x) = 78(9x - 9y) = \\ &= 78 \cdot 9(x - y). \end{aligned}$$

По условию задачи число $x = 3y$, $78\overline{xy} - 78\overline{yx} = 2808$, тогда

$$78 \cdot 9(3y - y) = 2808, |:9$$

$$78 \cdot 2y = 312, |:2$$

$$78y = 156, |:78$$

$$y = 2.$$

$x = 3y = 6$, $\overline{xy} = 62$. Искомое произведение равно $78 \cdot 62 = 4836$.

2 способ. Двузначных чисел, у которых цифра десятков втрое больше цифры единиц, три: 31, 62, 93. Рассмотрим все три числа.

$78 \cdot 31 - 78 \cdot 13 = 78 \cdot (31 - 13) = 78 \cdot 18 = 1404 \neq 2808$, то есть 31 не удовлетворяет условию задачи;

$78 \cdot 62 - 78 \cdot 26 = 78 \cdot (62 - 26) = 78 \cdot 36 = 2808 = 2808$, то есть 62 удовлетворяет условию задачи, искомое произведение равно $78 \cdot 62 = 4836$;

$78 \cdot 93 - 78 \cdot 39 = 78 \cdot (93 - 39) = 78 \cdot 54 = 4212 \neq 2808$, то есть 93 не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. 4836.

Задача 3

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить заказ за 12 дней. После 8 дней совместной работы один из них заболел, и другой рабочий закончил выполнение заказа один, проработав еще 5 дней. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить этот заказ?

Решение

Так как два рабочих, работая вместе, должны были выполнить заказ за 12 дней, то за один день совместной работы они выполняют $\frac{1}{12}$ заказа, а за 8 дней работы они выполнили $\frac{1}{12} \cdot 8 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ всего заказа. Тогда за следующие 5 дней после того, как первый рабочий заболел, второму рабочему осталось выполнить $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ часть заказа, следовательно, за один день второй рабочий выполняет $\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ всего заказа, значит, на выполнение всего заказа второму рабочему потребовалось бы 15 дней, если бы он выполнял заказ один.

Так как два рабочих, работая вместе, выполняют за один день $\frac{1}{12}$ заказа, а второй рабочий, работая один, выполняет за один день $\frac{1}{15}$ заказа, то первый рабочий, работая один, за один день смог бы выполнить $\frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{5-4}{60} = \frac{1}{60}$ заказа, следовательно, на выполнение всего заказа первому рабочему потребовалось бы 60 дней, если бы он выполнял заказ один.

Ответ. Первый рабочий (который заболел) за 60 дней; второй – за 15 дней.

Задача 4

На заводе 35% всех рабочих – женщины, а остальные – мужчины, которых на заводе на 252 человека больше, чем женщин. Определите общее число рабочих на заводе.

Решение

1 способ. Пусть на заводе работает x человек, тогда среди всех рабочих $0,35x$ человек составляют женщины, а $(0,35x + 252)$ человек составляют мужчины. Получаем уравнение: $0,35x + (0,35x + 252) = x$. Решим полученное уравнение.

$$0,35x + (0,35x + 252) = x;$$

$$0,35x + 0,35x + 252 = x;$$

$$0,7x + 252 = x;$$

$$x - 0,7x = 252;$$

$$0,3x = 252; |:0,3$$

$$x = 840.$$

2 способ. Так как 35% всех рабочих завода составляют женщины, то $100\% - 35\% = 65\%$ всех рабочих завода составляют мужчины. Мужчин на заводе больше, чем женщин на $65\% - 35\% = 30\%$ от общего числа рабочих завода или на 252 человека. Тогда 252 человека составляют 30% всех рабочих завода, следовательно, общее число рабочих на заводе равно $252:0,3 = 840$ человек.

Ответ. 840 человек.

Задача 5

Когда старшему брату было столько лет, сколько сейчас среднему, тогда младшему было 10 лет. Когда среднему будет сколько, сколько сейчас старшему, младшему будет 26 лет. Сколько лет каждому брату, если сумма лет старшего и среднего братьев в день рождения младшего была в два раза больше числа лет младшего брата в настоящее время?

Решение

Пусть старшему брату в настоящее время x лет, среднему брату – y лет, младшему брату – p лет. Запишем условия задачи в таблицу.

Число лет	В год рождения младшего брата	Когда младшему брату было 10 лет	В настоящее время	Когда младшему брату будет 26 лет
Старшему брату	$y - 10$	y	x	
Среднему брату	$x - 26$		y	x
Младшему брату	0	10	p	26

От момента времени, когда младшему брату было 10 лет до настоящего момента времени прошло $(x - y)$ лет или $(p - 10)$ лет; от настоящего момента времени до момента времени, когда младшему брату будет 26 лет пройдет $(x - y)$ лет или $(26 - p)$ лет; следовательно, $p - 10 = 26 - p$, $2p = 36$, $p = 18$, то есть младшему брату в настоящий момент времени 18 лет. Тогда $x - y = 18 - 10 = 8$, $x = y + 8$, то есть старший брат на 8 лет старше среднего.

По условию задачи сумма лет старшего и среднего братьев в день рождения младшего была в два раза больше числа лет младшего брата в настоящее время, то есть $(y - 10) + (x - 26) = 2 \cdot 18 = 36$. Учитывая, что $x = y + 8$, получаем уравнение $(y - 10) + (y + 8 - 26) = 36$. Решим полученное уравнение.

$$(y - 10) + (y + 8 - 26) = 36;$$

$$y - 10 + y - 18 = 36;$$

$$2y = 36 + 18;$$

$$2y = 54;$$

$$y = 27.$$

Таким образом, среднему брату в настоящий момент времени 27 года, а старшему – $x = y + 8 = 27 + 8 = 35$ (лет).

Ответ. Старшему брату 35 лет, среднему – 27 года, младшему – 18 лет.