Студенческая математическая олимпиада им. Л.П. Шильникова, 2024
Задачи и решения

1. Сумму дробей $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{49}$ записали в виде дроби со знаменателем 49!. Сколькими нулями (в десятичной записи) оканчивается числитель этой дроби?

Ответ: 8 нулями**. Решение.** Числитель дроби равен сумме чисел вида $1\cdot 2\cdot ...\cdot(k-1)\cdot(k+1)\cdot ...\cdot 49$ (в произведении отсутствует одно из натуральных чисел от 1 до 49). Обозначим такое слагаемое c_k. Заметим, что $49!=5^{10}\cdot 2^n\cdot p$, где p взаимно просто с 10, а n > 10 (на самом деле $n=\left[\frac{49}{2}\right]+\left[\frac{49}{2^2}\right]+\left[\frac{49}{2^3}\right]+\left[\frac{49}{2^4}\right]+\left[\frac{49}{2^5}\right]=24+12+6+3+1=46$) т.е. $49!$ оканчивается 10 нулями. В числителе указанной суммы слагаемые c_k при k, не кратном пяти, будут делиться на $5^{10}\cdot 2^{10}$, т.е. такие слагаемые оканчиваются 10 нулями. Слагаемые c_k при k, кратном пяти, но не равном 25, будут делиться на $5^9\cdot 2^9$ и, значит, будут оканчиваться 9 нулями. Есть только одно слагаемое, а именно, c_{25}, в которое 5 входит в 8-й степени, и только это слагаемое оканчивается 8 нулями. Значит, числитель оканчивается 8 нулями.

2. Пусть $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. Найдите A^{-n}, где n – данное натуральное число.

Ответ: $\boldsymbol{A^{-n}=\begin{pmatrix}2^{-n} & -2^{-n-1}n\\ 0 & 2^{-n}\end{pmatrix}}$. **Решение.** Нетрудно заметить и доказать по индукции, что $\boldsymbol{A^n=\begin{pmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}}$ (этот факт можно также доказать, используя бином Ньютона, т.к. $\boldsymbol{A=2E+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$ и $2E$ коммутирует с любой матрицей, а $\boldsymbol{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^k}$ **при** k>1 является нулевой матрицей). По правилу вычисления обратной матрицы получим результат.

3. В студенческой группе 30 человек, и к Новому Году каждый послал поздравительные письма не менее, чем 16 одногруппникам. Докажите, что было не менее 45 пар взаимных поздравлений.

Решение. Всего было отправлено не менее $30\cdot 16=480$ писем, а пар одногруппников всего $C_{30}^2=(30\cdot 29)/2=435$. Для каждой пары одногруппников может быть одна из трёх ситуаций: a) ни один из них не писал другому; b) только один написал другому; c) они обменялись письмами. Обозначим число таких пар через A, B и C, соответственно. Тогда $B+2C\geq 480$ и $A+B+C=435$. Отсюда $C-A\geq 480-435=45$. Значит, $C\geq 45+A\geq 45$.

4. Сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \sin(x^2+2x)dx$?

Ответ: сходится**. Решение**. Сделаем замену переменной: $t=x^2+2x \Leftrightarrow x=-1+\sqrt{1+t}$, $dx=dt/(2\sqrt{1+t})$. Тогда интеграл примет вид $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{1+t}}dt$ и по признаку Дирихле он сходится: действительно, интегралы $I(b)=\int\limits_0^b \sin t dt$ =1–cos$b$ ограничены, а функция $1/\sqrt{1+t}$ монотонно стремится к 0 при $t\to+\infty$.

5. Докажите, что для данного натурального числа a количество решений в целых числах x, y неравенства $|(n-1)x+ny|+|nx+(n+1)y|\le a$ не зависит от целого числа n и найдите количество решений, если **а)** a = 2; **б)** a –произвольное натуральное число.

Ответ: а) 13; **б)** $a^2+(a+1)^2$**.** **Решение**. Обозначим $u=(n-1)x+ny$, $v=nx+(n+1)y$. Рассматривая эти выражения как систему двух линейных уравнений относительно неизвестных x, y, получим (по правилу Крамера) линейную зависимость от u, v с целыми коэффициентами, т.к. определитель системы равен $(n-1)(n+1)-n^2=-1$ (конкретнее: $x=nv-(n+1)u$ и $y=nu-(n-1)v$) и значит, целым u, v соответствуют целые x, y, и наоборот, т.е. данная замена переменных задаёт взаимно однозначное соответствие между упорядоченными целочисленными парами (u, v) и (x, y). Таким образом, требуется определить, сколько пар (u, v) целых чисел удовлетворяют неравенству $|u|+|v|\le a$. **а)** При a = 2 такие пары легко перечислить: это четыре пары $(\pm1,\pm1)$ плюс четыре пары $(\pm1, 0)$, $(\pm2, 0)$ плюс четыре пары $(0,\pm1)$, $(0,\pm2)$ и еще одна нулевая пара (0, 0). Итого 13 пар (u,v), соответствующих 13 решениям исходного неравенства. **б)** Для натуральных чисел k уравнение $|u|+|v|=k$ имеет $4k$ целых решений: это можно увидеть из графика этого уравнения в виде целочисленных точек сторон квадрата длины k, симметричного относительно начала координат (в первой четверти – это точки $(0, k)$, $(1, k-1)$, …, $(k, 0)$). Таким образом, число решений исходного неравенства равно $1 + 4(1 + 2 + \ldots + a)$ = $1 + 2a(a + 1)$.

6. Является ли ограниченной последовательность $a_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\cdot\cos(k^2)$?

Ответ: является. **Решение.** Имеем:

$$2a_n=(\sin(1+1^2)+\sin(1-1^2))+(\sin(2+2^2)+\sin(2-2^2))+\ldots+(\sin(n+n^2)+\sin(n-n^2))=\sin(n+n^2)$$

При упрощении данной суммы использован тот факт, что соответствующие члены в соседних парах взаимно уничтожаются, т.к. $\sin(k+k^2)=-\sin((k+1)-(k+1)^2)$ при всех k = 1, 2, …, n –1. Итак, $|a_n|\le 1/2$

.

7. Существует ли такой многочлен пятой степени, принимающий целые значения при всех целых аргументах, у которого все коэффициенты по модулю меньше 0,05?

Ответ: существует. **Решение**. В качестве примера рассмотрим многочлен

$$P(x)=\frac{(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)}{5!} = \frac{1}{120}x(x^2-1)(x^2-4) = \frac{x^5-5x^3+4x}{120}$$

Все его коэффициенты по модулю не больше $5/120<0{,}05$, а значения $P(n)$ при целых n являются целыми. Это следует из того, что произведение любых n последовательных целых чисел делится на n!
Комментарий. Последний факт можно доказать, используя формулу числа сочетаний C_x^n: для натуральных x это целое число, равное частному от деления произведения n последовательных целых чисел на n!, отсюда с учетом знака следует делимость и для произвольных целых x. В данной задаче можно также непосредственно проверить делимость произведения пяти последовательных чисел на 3*;* 5 *и* 8*, а значит, на их произведение. Действительно, среди любых трех последовательных чисел есть кратное* 3*; среди любых пяти есть кратное* 5*; а среди любых четырех есть кратное* 4*; а также другое (отстоящее на два) кратное* 2.

8. В евклидовом пространстве дано $n > 2$ ненулевых векторов $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$, сумма которых равна $\vec{0}$. Пусть S – сумма модулей этих векторов. Докажите неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} |\vec{v}_k| / (S - |\vec{v}_k|) < 2$.

Решение. Имеем $|\vec{v}_k| = |-\sum\limits_{i \neq k} \vec{v}_i| \leq \sum\limits_{i \neq k} |\vec{v}_i| = S - |\vec{v}_k|$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Таким образом, $|\vec{v}_k| \leq S/2$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} |\vec{v}_k| / (S - |\vec{v}_k|) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |\vec{v}_k| / (S - S/2) = 2$. Для доказательства строгого неравенства заметим, что модуль суммы нескольких векторов может равняться сумме их модулей только в том случае, когда все векторы коллинеарны и сонаправлены (это легко доказывается по индукции с помощью неравенства Коши-Буняковского). Поэтому, если бы в первом использованном нами нестрогом неравенстве имело место равенство, то все векторы, кроме $\vec{v}_k$, должны были бы быть сонаправленными. В силу того, что k произвольно, а $n > 2$, все n векторов сонаправлены, но тогда их сумма не равна $\vec{0}$.

9. Дано уравнение $9 \cdot x^{6x} = 1$. Определите количество **а**) положительных действительных корней; **б**) всех действительных корней.

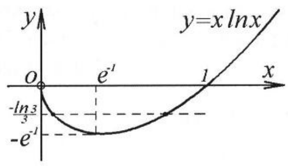
Ответ: **а**) 2 корня; **б**) 2 корня. **Решение.** При $x = 0$ левая часть уравнения не определена. **а**) Пусть $x > 0$. После логарифмирования получим уравнение, эквивалентное исходному

$$x \cdot \ln x = -\frac{\ln 3}{3} \qquad (*)$$

Исследуем функцию левой части (*): $y = x \ln x \Rightarrow y' = 1 + \ln x$. Тогда $y' > 0$ при $x > \frac{1}{e}$ и $y' < 0$ при $0 < x < \frac{1}{e}$. Поэтому функция $y = x \ln x$ убывает на $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ и возрастает на $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$. В точке $x_0 = \frac{1}{e}$ значение минимума $y_0 = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. На границе области определения пределы равны

$$\lim_{x \to +0} x \ln x = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to +0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{\left(-1/x^2\right)} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty.$$

Теперь сравним наименьшее значение $y_0 = -\frac{1}{e} = -\frac{\ln e}{e}$ с числом в правой части (*), то есть с $-\frac{\ln 3}{3}$. Для этого исследуем на монотонность функцию $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ при $x \geq e$. $\qquad g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ при $x > e$.



Значит, $g(x)$ убывает на $[e; +\infty)$. Отсюда $g(3) < g(e) \Rightarrow -\frac{\ln e}{e} < -\frac{\ln 3}{3}$. Итак, уравнение (*) имеет 2 положительных корня (см. рис). *Комментарий. Отметим, что после выяснения поведения функции* $y = x \ln x$ *можно было вместо указанного сравнения её минимального значения с (–ln 3)/3 доказать существование ровно двух корней следующим образом. Непосредственно подставляя число x=1/3 в исходное уравнение, убеждаемся, что это корень. Поскольку он меньше точки минимума 1/e, должен быть еще ровно один корень, больший 1/e.*

б) Пусть теперь $x<0$. В этом случае выражение x^{6x} будет определено лишь при условии, что $6x$ – число целое. Очевидно, $6x$ должно быть четным числом (иначе $x^{6x}<0$). Пусть $x=-\frac{k}{3}$, где k – натуральное число. Тогда $\left(\frac{k}{3}\right)^{-2k}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{k}\right)^{k}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^{k+1}=k^k\Rightarrow k=3n$ для натурального n. Таким образом, $3^{3n+1}=(3n)^{3n}\Leftrightarrow n^{3n}=3$. Значение $n=1$ последнему уравнению не удовлетворяет, а при $n\geq 2$ левая часть, очевидно, больше правой. Итак, отрицательных корней исходное уравнение не имеет.

10. Пусть A – квадратная вещественная матрица n-го порядка. Докажите, что **а)** $\det(A^2+E)\geq 0$, где E – единичная матрица, **б)** $\det(A^2+E)>0$, если матрица A симметрическая, **в)** $\det(A^2+E)>0$, если все элементы матрицы A по модулю меньше $1/n$.

Решение. Пусть характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)$ матрицы A имеет корни $\lambda_1,\dots,\lambda_k,\mu_1,\overline{\mu_1},\dots,\mu_p,\overline{\mu_p}$, где первые k корней вещественные, а остальные $2p = n-k$ корней представляют собой комплексно сопряженные пары (поскольку матрица вещественная, коэффициенты характеристического многочлена тоже вещественные). Заметим, что для комплексного числа z и действительного числа x произведение $(x-z)(x-\overline{z})=|x-z|^2\geq 0$, причем равенство нулю здесь возможно только при $z=x$. У матрицы A^2 корни её характеристического многочлена $\chi_{A^2}(\lambda)$ – это квадраты корней многочлена $\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)$, и поэтому $\det(A^2-\lambda E)$ представляет собой произведение $(-1)^n(\lambda-\lambda_1{}^2)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k{}^2)\cdot\Pi(\lambda)$, где $\Pi(\lambda)$ – произведение скобок вида $(\lambda-\mu_j{}^2)\cdot(\lambda-\overline{\mu}_j{}^2)$, $j = 1, \dots, p$. Таким образом, $\Pi(\lambda)\geq 0$ при всех действительных λ, причем $\Pi(\lambda)$ может равняться нулю лишь в случае, когда одно из μ_j – чисто мнимое число, равное $i\sqrt{-\lambda}$. **а)** Применим эти рассуждения при $\lambda=-1$. Тогда $\det(A^2+E)=\chi_{A^2}(-1)=$ $=(-1)^n(-1-\lambda_1{}^2)\cdot\ldots\cdot(-1-\lambda_k{}^2)\cdot\Pi(-1)\geq 0,$ поскольку n и $k = n-2p$ одинаковой чётности. **б)** Известно, что у симметрической вещественной матрицы все корни характеристического уравнения вещественны. Значит, $k = n$ и $\det(A^2+E)>0$. **в)** Если предположить противное, то у матрицы A^2 одно из собственных значений должно равняться (–1). Пусть $\vec{v}$ – соответствующий собственный вектор и $M=|v_k|$ максимум модулей среди его координат. Поскольку все элементы матрицы A по модулю меньше $1/n$, то и у матрицы A^2 все элементы по модулю меньше $1/n$ (это следует из правила умножения матриц). Если в векторном равенстве $A^2\vec{v}=-\vec{v}$ рассмотреть k-ую координату, то получим противоречие: в левой части модуль числа меньше M, а в правой – равен M. *Комментарий. Другой способ решения пункта **а**) состоит в следующем. Рассмотрим комплексные матрицы A+iE и A–iE. Их произведение равно A^2+E, так как E коммутирует с любой матрицей. По свойству определителей $\det(A^2+E)=\det(A+iE)\cdot\det(A-iE)=w\cdot\overline{w}=|w|^2\geq 0$, где $w=\det(A+iE)$. В пункте **б)** из выражения для $\det(A^2+E)$ пункта **а)** при наличии только вещественных корней получается более сильное неравенство, а именно* $\det(A^2+E)\geq 1$, причем равенство здесь достигается только для нулевой матрицы A. *Строгое неравенство пункта **в)** можно доказать от противного, получив противоречие с использованием нормы матриц.*