Задание № 1.

Задача 1

Может ли сумма цифр точного квадрата (то есть квадрата некоторого натурального числа) быть равной 2024? (ответ обосновать)

Решение

Сумма цифр числа 2024 равна 2 + 0 + 2 + 4 = 8, 8 при делении на 3 дает остаток 2, следовательно, в силу того, что число и его сумма цифр имеют одинаковый остаток при делении на 3, 2024 при делении на 3 дает остаток 2. Тогда и точный квадрат, сумма цифр которого, согласно предположению, равна 2024, должен при делении на 3 давать остаток 2.

Обозначим за x – число, сумма цифр квадрата которого по условию задачи равна 2024. Тогда x^2 при делении на 3 дает остаток 2. Так как 3 – число простое, то из того, что x^2 не делится на 3, следует, что x не делится на 3, то есть $x = 3p + 1$ или $x = 3p + 2$, где p – число натуральное. Тогда $x^2 = (3p + 1)^2 = 9p^2 + 6p + 1 = 3(3p^2 + 2p) + 1$ или $x^2 = (3p + 2)^2 = 9p^2 + 12p + 4 =$ $= 3(3p^2 + 4p + 1) + 1$, значит, x^2 при делении на 3 дает остаток 1, что невозможно, так как сумма его цифр при делении на 3 дает остаток 2. Получили противоречие, следовательно, сумма цифр точного квадрата не может быть равна 2024.

Ответ. Не может.

Задача 2

При добавлении воды к раствору объем раствора увеличился на 42% и стал равным 71 л. Определите первоначальный объем раствора.

Решение

<u>1 способ</u>. Так как при добавлении воды к раствору объем раствора увеличился на 42%, то количество нового раствора составляет

100% + 84% = 142% или 71 л. Тогда первоначальный объем раствора равен 71 : 1,42 = 50 (л).

<u>2 способ</u>. Пусть первоначальный объем раствора равен x л, что составляет 100%. Так как при добавлении воды к раствору объем раствора увеличился на 42%, то количество нового раствора составляет 100% + 84% = 142% или 71 л. Составим пропорцию: $\frac{x}{71}=\frac{100}{142}$, откуда $x=\frac{71\cdot 100}{142}=\frac{100}{2}=50$ (л).

Ответ. 50 л.

Задача 3

Петя и Слава выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 16 вопросов текста, а Слава — на 24. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Славы на 85 минут. Сколько вопросов содержит тест?

Решение

Пусть тест содержит x вопросов. Тогда Петя на выполнение теста затратит $\frac{x}{16}$ часов, а Слава – $\frac{x}{24}$ часа. Так как скорость выполнения теста Славой выше, чем Петей, то Слава закончит выполнение теста на $\left(\frac{x}{16}-\frac{x}{24}\right)$ часа раньше, чем Петя, что по условию задачи составляет 85 минут или $\frac{17}{12}$ часа. Получаем уравнение:

$$\frac{x}{16}-\frac{x}{24}=\frac{17}{12}.$$

Умножим обе части уравнения на 48, получим

$$3x - 2x = 68;$$

$$x = 68.$$

Таким образом, получили, что тест содержит 68 вопросов.

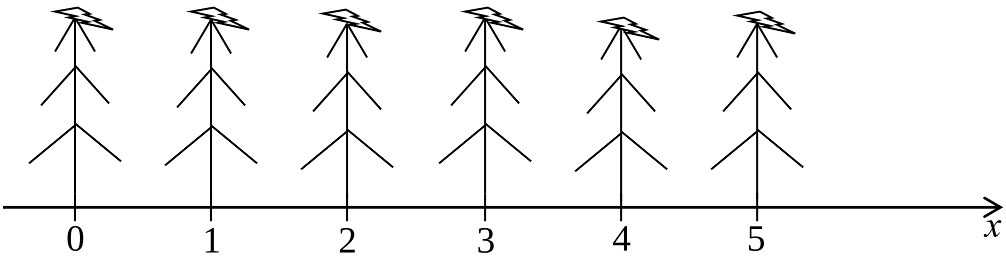
Ответ. 68 вопросов.

Задача 4

На шести елках сидят шесть сорок — по одной на каждой елке. Елки растут в ряд с интервалом в 10 м. Если какая-то сорока перелетает с одной елки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все сороки собраться на одной елке?

Решение

Так как елки растут в ряд, то введем числовую ось так, чтобы елки располагались на числовой оси, первая елка располагалась в начале координат, а остальные елки на положительной части числовой оси. Пусть единичный отрезок числовой оси равен 10 м. Тогда первая елка омет координату 0, вторая – 1, третья – 2, четвертая – 3, пятая – 4, шестая – 5.



Координата каждой сороки в начальный момент времени совпадает с координатой елки, на которой она сидит. Сумма координат всех сорок равна $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Если в некоторый момент времени координата одной сороки увеличилась на n, то координата другой сороки на столько же уменьшилась, то есть уменьшилась на n по условию задачи. Тогда сумма координат всех сорок в этот момент времени равна $15 + n - n = 15$. Таким образом, сумма координат всех сорок в любой момент времени равна 15 и не изменяется при изменении положения сорок на елках.

Если предположить, что все сороки собрались на одной елке, то координат каждой сороки будет равна $15 : 6 = 2{,}5$. Но в точке с координатой 2,5 елки нет.

Значит, наше предположение не верно, и все сороки на одной елке собраться не могут.

Ответ. Не могут.

Задача 5

Использовав по одному разу все цифры, запишите натуральное число, кратное 4: а) наибольшее возможное; б) наименьшее возможное. (Ответ обосновать)

Решение

При решении задачи воспользуемся признаком делимости на 4: натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное двумя последними цифрами этого натурального числа.

Чтобы найти наибольшее натуральное число, образованное всеми цифрами, использованными по одному разу, и делящееся на 4, запишем цифры в порядке убывания: 9876543210. Но так как 10 не делится на 4, то и число 9876543210 не делится на 4, то есть не удовлетворяет условию задачи. Если поменять местами 0 и 1, то получим нечетное число, которое не делится на 4. Поэтому будем переставлять в числе последние три цифры. Чтобы число было наибольшим, поставим в разряд сотен 1, а в разряд десятков 2. Получим число 9876543120, которое делится на 4, так как 20 делится на 4.

Чтобы найти наименьшее натуральное число, образованное всеми цифрами, использованными по одному разу, и делящееся на 4, запишем цифры в порядке убывания: 0123456789. Но в этом случае в записи числа не используется цифра 0, так как это число 123456789. Чтобы число было наименьшим и использовались все цифры, поменяем местами 0 и 1. Получим число 1023456789, которое является нечетным, а поэтому не делится на 4. Если поменять местами 9 и 8, то получим число 1023456798, которое не делится на 4, так как 98 не делится на 4.

Поэтому будем переставлять в числе последние три цифры. Чтобы число было наименьшим, нужно поставить в разряд сотен 8. Но в этом случае получим числа 1023456879 или 1023456897, которые являются нечетными, а поэтому не делятся на 4. Следовательно, в разряде сотен будет стоять 9. Тогда, чтобы число было наименьшим, поставим 7 в разряд десятков, а 8 в разряд единиц. Получим число 1023456978, которое не делится на 4, так как 78 не делится на 4. Если поменять местами в последнем числе 7 и 8, то получим нечетное число 1023456987, которое не делится на 4.

Тогда будем переставлять последние четыре цифры. Чтобы число было наименьшим, поставим в разряд тысяч 7, далее 6, 8, 9 в порядке возрастания. Получим нечетное число 1023457689, которое не делится на 4. Если поменять местами 8 и 9, получим число 1023457698, оканчивающееся на 98, которое не делится на 4. Поэтому в разряд сотен поставим 8. Если 6 и 9 поставить в порядке возрастания, то получим нечетное число 1023457869, которое не делится на 4. А поменяв местами 6 и 9, получаем число 1023457896, которое делится на 4, так как 96 делится на 4. Таким образом, наименьшим натуральным числом, в записи которого использованы все цифры по одному разу и которое делится на 4, является число 1023457896.

Ответ. Наибольшее число – 9876543120; наименьшее число – 1023457896.