Задание № 3.

Задача 1

Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 5 см, а каждую ночь сползает вниз на 4 см. Когда он достигнет верхушки столба, если высота столба равна 75 см?

Решение.

За последний день червяк проползет вверх 5 см. 75 – 5 = 70 (см). За сутки червяк проползает вверх на 5 см и сползает вниз на 4 см, то есть за сутки червяк поднимается вверх на 5 – 4 = 1(см), следовательно, на 70 см червяк поднимется вверх за 70 дней. Таким образом, червяк достигнет верхушки столба на 70 + 1 = 71(день).

Ответ. На 71-ый день.

Задача 2

Натуральные числа x и y удовлетворяют соотношению $56x = 65y$. Докажите, что $x + y$ – составное число.

Решение.

1 способ. Разложим 56 и 65 на простые множители: $56 = 2^3 \cdot 7$, $65 = 5 \cdot 13$. Так как в разложении чисел 56 и 65 на простые множители нет одинаковых простых множителей, то числа 56 и 65 являются взаимно простыми, то есть НОД(56, 65) = 1.

Так как числа x и y натуральные, то числа $56x$ и $65y$ – равные натуральные числа. $56x$ делится на 56, следовательно, и равное ему число $65y$ делится на 56. Так как 65 и 56 взаимно простые числа, то y делится на 56, то есть $y = 56n$, где n число натуральное. $65y$ делится на 65, следовательно, и равное ему число $56x$ делится на 65. Так как 65 и 56 взаимно простые числа, то x делится на 65, то есть $x = 65m$, где m число натуральное. В силу того, что $56x = 65y$, имеем

$$56 \cdot 65m = 65 \cdot 56n,$$

$$m = n.$$

Таким образом, $x = 65n$, $y = 56n$, где n число натуральное. Тогда $x + y = 65n + 56n = 121n = 11^2 \cdot n$. Получили, что $x + y$ делится на 1, 11 и 121, то есть имеет более двух различных натуральных делителей, следовательно, $x + y$ является составным число, **что и требовалось доказать.**

2 способ. Рассмотрим число $56(x + y) = 56x + 56y$. Так как по условию задачи $56x = 65y$, то $56x + 56y = 65y + 56y = 121y = 11^2 \cdot y$, тогда $56(x + y) = 11^2 \cdot y$. Так как разложение числа 56 на простые множители имеет вид $56 = 2^3 \cdot 7$, то 56 и 121 взаимно просты, значит, из того, что $56(x + y)$ делится на 121 следует, что $x + y$ делится на 121. Получили, что $x + y$ делится на 1, 11 и 121, то есть имеет более двух различных натуральных делителей, следовательно, $x + y$ является составным число, **что и требовалось доказать.**

Задача 3

Велосипедист рассчитал, что если от дома до города он поедет со скоростью 12 км/ч, то он опоздает на 1. Если же он будет ехать со скоростью 20 км/ч, то приедет на 1 ч раньше срока. Найдите расстояние от дома до города и скорость, при которой велосипедист приедет вовремя.

Решение.

Пусть x ч – время, которое потребуется велосипедисту, чтобы приехать в город вовремя, тогда со скоростью 12 км/ч велосипедист будет ехать до города $(x + 1)$ ч, а со скоростью 20 км/ч – $(x – 1)$ ч. Путь от дома велосипедиста до города равен $12(x + 1)$ км или $20(x – 1)$ км. Получаем уравнение:

$$12(x + 1) = 20(x - 1);$$
$$12x + 12 = 20x - 20;$$
$$8x = 32;$$
$$x = 4.$$

Таким образом, чтобы приехать вовремя, велосипедист должен затратить на дорогу от дома до города 4 ч. Тогда расстояние от дома велосипедиста до города равно $12 \cdot (4 + 1) = 12 \cdot 5 = 60$(км). Чтобы приехать вовремя, велосипедист должен ехать со скоростью $60:4 = 15$(км/ч).

Ответ. Расстояние от дома до города равно 60 км; чтобы приехать вовремя, велосипедист должен ехать со скоростью 15 км/ч.

Задача 4

Произведение четырех последовательных четных чисел оканчивается четверкой. Найдите предпоследнюю цифру произведения.

Решение.

Четные числа могут оканчиваться на 0, 2, 4, 6 или 8. Произведение четных чисел является числом четным. Если бы среди четырех последовательных четных чисел было бы число, оканчивающееся на 0, то произведение четырех последовательных четных чисел оканчивалось бы на 0, что противоречит

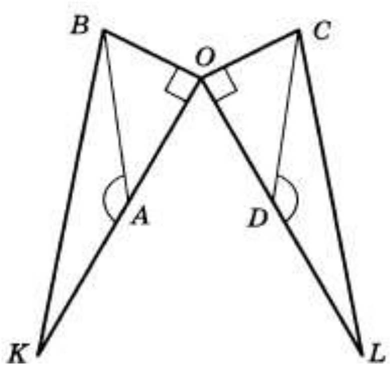
условию задачи. Значит, среди рассматриваемых чисел нет числа, оканчивающегося на ноль. Так как рассматриваются последовательные четные числа, то наименьшее из них оканчивается на 2, следующее – на 4, третье – на 6 и последнее – на 8. Тогда рассматриваемые числа представимы в виде $10x + 2$, $10x + 4$, $10x + 6$ и $10x + 8$, где x – некоторое целое число. Рассмотрим произведение этих чисел: $(10x + 2)\cdot(10x + 4)\cdot(10x + 6)\cdot(10x + 8) =$
$= (100x^2 + 80x + 20x + 16)\cdot(100x^2 +60x + 40x + 24) = (100x^2 + 100x + 16)\times$
$\times(100x^2 +100x + 24) = 10000x^4 + 10000x^3 +2400x^2 + 10000x^3 + 10000x^2 +$
$+2400x +1600x^2 ++1600x + 384 = 10000x^4 + 20000x^3 + 14000x^2 +4000x+ 384 =$
$= 1000\cdot(10x^4 + 20x^3 + 14x^2 +4x) + 384.$

Так как число $1000\cdot(10x^4 + 20x^3 + 14x^2 +4x)$, где x – число целое, оканчивается тремя нулями, то число $1000\cdot(10x^4 + 20x^3 + 14x^2 +4x) + 384$ оканчивается на 384, то есть предпоследняя цифра произведение равна 8.

Ответ. 0.

Задача 5

Два прямоугольных треугольника BOK и COL, в которых углы BOK и COL прямые (см. рисунок), имеют общую вершину O, точка A лежит на стороне KO, точка D лежит на стороне LO, $\angle KAB = \angle CDL$, $AO = OD$, $AK = DL$. Докажите, что $KB = CL$.



Решение.

1. $\angle BAK$ и $\angle BAO$ – смежные, $\angle CDL$ и $\angle CDO$ – смежные, значит, $\angle BAK + \angle BAO = \angle CDL + \angle CDO =$ $=180°$ по свойству смежных углов. Так как по условию задачи $\angle BAK = \angle CDL$, то $\angle BAO = \angle CDO$.

2. Рассмотрим ΔBAO и ΔCDO. $\angle BOA = \angle COD =$ $= 90°$, $AO = OD$ (по условию), $\angle BAO = \angle CDO$ (доказано в п.1). Тогда $\Delta BAO = \Delta CDO$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно, $BA = CD$.

3. Рассмотрим ΔBAK и ΔCDL. $AK = DL$, $\angle BAK = \angle CDL$ (по условию), $BA = CD$ (доказано в п.2), значит, $\Delta BAK = \Delta CDL$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует, что $BK = CL$, **что и требовалось доказать.**