Задание № 4

Задача 1

Найти три числа, из которых второе больше первого на столько, на сколько третье больше второго, если известно, что произведение двух меньших чисел равно 85, а произведение двух бóльших чисел равно 115.

Решение.

Пусть x – первое число, y – второе, а p – третье. По условию задачи $x < y < p$, $y - x = p - y$, $xy = 85$, $yp = 115$. Из условия $y - x = p - y$ получаем, что $2y = x + p$. Сложим равенства $xy = 85$ и $yp = 115$, получим $xy + yp = 85 + 115$, $y(x + p) = 200$. Так как $x + p = 2y$, то $2y^2 = 200$, $y^2 = 100$, $y = 10$ или $y = -10$.

Если $y = 10$, то $10x = 85$, $10p = 115$, откуда $x = 8{,}5$; $p = 11{,}5$; $8{,}5 < 10 < 11{,}5$.

Если $y = -10$, то $-10x = 85$, $-10p = 115$, откуда $x = -8{,}5$; $p = -11{,}5$; но $-8{,}5 > -10$, что не удовлетворяет условию $x < y < p$.

Ответ. Первое число 8,5; второе – 10; третье – 11,5.

Задача 2

Для каждого значения параметра a решите уравнение $3 + 2x = (a+1)x - \dfrac{6}{a+1}$.

Решение.

В данном уравнении присутствуют две переменные a и x, но у этих переменных разный смысл: x – неизвестная, a – постоянная (которая получила название параметр). Специфика задач с параметром состоит в следующем: рассматривается не одно уравнение, а целое семейство уравнений одновременно, в котором каждое уравнение семейства получается при конкретном значении параметра. Так как параметр может принимать бесконечное множество различных значений, то выписать все уравнения семейства мы не сможем. Однако каждое уравнение семейства должно быть решено.

Чтобы решить каждое из уравнений заданного семейства поступают следующим образом: все множество допустимых значений параметра (тех значений, при которых уравнение имеет смысл) разбивают на подмножества и решают задачу на каждом из подмножеств. Чтобы множество допустимых значений параметра разбить на подмножества, нужно найти те значения параметра, при которых или при переходе через которые происходит качественное изменение задачи.

Допустимыми значениями параметра являются все действительные числа, кроме –1, то есть $a \neq -1$. Преобразуем заданное уравнение.

$$3+2x=(a+1)x-\frac{6}{a+1};$$

$$(a+1)x-2x=3+\frac{6}{a+1};$$

$$(a-1)\cdot x=\frac{3a+9}{a+1}.$$

После преобразований мы получили линейное уравнение с параметром. Качественное изменение линейного уравнения с параметром происходит при тех значениях параметра, при которых коэффициент при неизвестной становится равным нулю. Таким образом, допустимые значения параметра разбиваются на два подмножества.

1) $a - 1 = 0$, $a = 1$. При этом значении параметра уравнение принимает вид: $0\cdot x = 6$. Полученное уравнение решений не имеет.

2) $\begin{cases} a-1\neq 0, \\ a\neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} a\neq 1, \\ a\neq -1; \end{cases}$ $a\neq \pm 1$. При этих значениях параметра коэффициент при неизвестной отличен от нуля, следовательно, для решения уравнения обе части уравнения на этот коэффициент нужно разделить:

$$x=\frac{3a+9}{(a-1)\cdot(a+1)};$$

$$x=\frac{3(a+3)}{a^2-1}.$$

Ответ. При $a = -1$ уравнение не имеет смысла;

при $a = 1$ x уравнение не имеет решений;

при $a\neq \pm 1$ $x=\dfrac{3(a+3)}{a^2-1}.$

Задача 3

Докажите, что при любых положительных значениях a, b и c выполняется неравенство $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$.

Решение.

Для того, чтобы доказать, что при любых положительных значениях a, b и c выполняется неравенство $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$, достаточно показать, что при любых положительных значениях a, b и c разность $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) - 6abc$ неотрицательна.

<u>1 способ.</u> Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) - 6abc = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 - 6abc =$$
$$= (ab^2 - 2abc + ac^2) + (a^2b - 2abc + bc^2) + (a^2c - 2abc + b^2c) =$$
$$= a(b^2 - 2bc + c^2) + b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) =$$
$$= a(b - c)^2 + b(a - c)^2 + c(a - b)^2.$$

Так как $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $(b - c)^2 \geq 0$, $(a - c)^2 \geq 0$, $(a - b)^2 \geq 0$, то $a(b - c)^2 + b(a - c)^2 + c(a - b)^2 \geq 0$, значит, $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) - 6abc \geq 0$, следовательно, $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$ при любых положительных значениях a, b и c, **что и требовалось доказать.**

<u>2 способ.</u> Пусть $p > 0$. Рассмотрим сумму двух взаимно обратных чисел: $p + \frac{1}{p} = \frac{p^2 + 1}{p} = \frac{(p^2 - 2p + 1) + 2p}{p} = \frac{(p-1)^2}{p} + 2$. Так как $p > 0$, $(p - 1)^2 \geq 0$, то $\frac{(p-1)^2}{p} \geq 0$, значит, $\frac{(p-1)^2}{p} + 2 \geq 2$, следовательно, $p + \frac{1}{p} \geq 2$. Причем $p + \frac{1}{p} = 2$ тогда и только тогда, когда $(p - 1)^2 = 0$, то есть $p = 1$. Таким образом, сумма двух взаимно обратных положительных чисел всегда больше или равна 2, причем сумма двух взаимно обратных положительных чисел равна 2 тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно 1.

Рассмотрим разность $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) - 6abc$ и вынесем abc за скобки. Получим $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) - 6abc =$ $= abc\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 6\right) = abc\left(\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) - 6\right)$. Так как

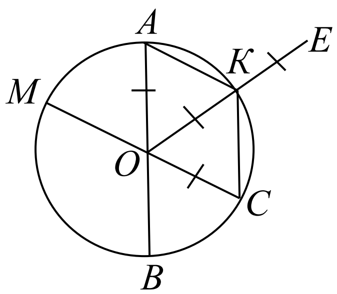
$a > 0$, $c > 0$, то $\frac{a}{c}$ и $\frac{c}{a}$ – взаимно обратные положительные числа, значит, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$. Аналогично, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$ как сумма двух взаимно обратных положительных чисел. Тогда $\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6$, $\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) - 6 \geq 0$, $abc\left(\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) - 6\right) \geq 0$ в силу положительности *a, b* и *c*.

Таким образом, $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) - 6abc \geq 0$, следовательно, $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$ при любых положительных значениях *a, b* и *c*, **что и требовалось доказать.**

Задача 4

В *AB* и *CM* – два диаметра окружности с центром в точке *O*. Луч *OE* – биссектриса угла *AOC*. *OE* пересекает окружность в точке *K*, причем *KE* = *KO*. Периметр треугольника *KCO* в 3 раза больше радиуса окружности. Докажите, что точки *E*, *A*, *C* и *O* лежат на одной окружности..

Решение.



AO = *OC* = *OK* = *r* – как радиусы окружности с центром в точке *O*.

Рассмотрим ΔKOC. $P_{KOC} = KO + OC + KC$. По условию задачи $P_{KOC} = 3r$, $OC = OK = r$, тогда $r + r + KC = 3r$, откуда $KC = r$.

Так как *OE* – биссектриса $\angle AOC$, то $\angle AOK = \angle KOC$.

Рассмотрим ΔAOK и ΔKOC. *OK* – общая сторона, $OA = OC = r$, $\angle AOK = \angle KOC$, значит, $\Delta AOK = \Delta KOC$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $AK = KC$

Так как $AK = KC = OK = KE = r$, то точки *A*, *C*, *O* и *E* лежат на окружности с центром в точке *K* радиуса *r*, **что и требовалось доказать.**

Задача 5

Имеется 32 камня с разными массами. Как за 35 взвешиваний на чашечных весах без гирь и без стрелки найти два самых тяжелых камня?

Решение.

Пронумеруем все камни и разобьем их на 16 пар. За 16 взвешиваний мы в каждой паре определим камень, который тяжелее другого камня в этой паре. Полученные 16 тяжелых камней разобьем на 8 пар и за 8 взвешиваний определим в каждой паре камень, который тяжелее другого камня в паре. Полученные 8 тяжелых камней разобьем на 4 пары и за 4 взвешивания определим в каждой паре камень, который тяжелее другого камня в паре. Полученные 4 тяжелых камня разобьем на 2 пары и за 2 взвешивания определим в каждой паре камень, который тяжелее другого камня в паре. Взвесим 2 тяжелых камня между собой. Тот, который будет тяжелее и есть самый тяжелый из 32 камней. Для того, определить самый тяжелый камень, нам потребовалось $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ взвешивание.

Чтобы найти второй по тяжести камень из 32 имеющихся, нужно сравнить все камни, которые взвешивались с самым тяжелым на каждом этапе взвешиваний. Так как этапов взвешиваний было 5, то нам нужно сравнить 5 камней и определить, какой из них самый тяжелый. Для этого возьмем два из 5 камней и за одно взвешивание определим, какой из них тяжелее. Далее камень, который тяжелее, сравним с третьим из 5 камней за одно взвешивание, потом камень, который тяжелее, сравним с четвертым из 5 камней за одно взвешивание, и камень, который окажется тяжелее, сравним с последним из 5 камней за одно взвешивание. Самый тяжелый камень из последнего взвешивания и есть второй по тяжести камень из 32 имеющихся. Для того, чтобы найти второй по тяжести камень, нам потребовалось 4 взвешивания.

Таким образом, два самых тяжелых из 32 камней мы нашли за $31 + 4 = 35$ взвешиваний, **что и требовалось в задаче.**