Задание № 5

Задача 1

Имеется кусок сплава меди с оловом массой 15 кг, содержащий 40% меди. Сколько чистого олова нужно добавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 30% меди?

Решение.

В куске сплава меди с оловом массой 15 кг и содержанием меди 40% меди содержится 0,4·15 = 6(кг).

Сплав с содержанием меди 30%, в состав которого входит 6 кг меди, имеет массу 6:0,3 = 20(кг).

Чтобы из куска сплава массой 15 кг и содержанием меди 40% получить новый сплав массой 20 кг и содержанием меди 30%, нужно добавить 20 – 15 = 5(кг) чистого олова.

Ответ. 5 кг.

Задача 2

Для каждого значения параметра *a* решите уравнение $\dfrac{(2a+1)(x-a+5)}{x^2-16}=0.$

Решение.

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}(2a+1)(x-a+5)=0,\\ x^2-16\neq 0.\end{cases}$$

Возможно два случая:

1) $\begin{cases}2a+1=0,\\ x^2-16\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}a=-0{,}5,\\ x\neq \pm 4.\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-a+5=0,\\ x^2-16\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=a-5,\\ x\neq \pm 4.\end{cases}$

Выясним, при каких значениях a $a – 5$ совпадет с 4 или – 4:

$$a – 5 = 4,\ a = 9;\quad a – 5 = – 4,\ a = 1.$$

Таким образом, система имеет единственное решение $x = a – 5$ при $a \neq 9$, и $a \neq 1$;

система не имеет решений при $a = 9$ или $a = 1$.

Ответ. При $a = -0{,}5$ $x \neq \pm 4$;

при $a = 9$ или $a = 1$ уравнение не имеет решений;

при $a \neq -0{,}5$, $a \neq 1$ и $a \neq 9$ $x = a - 5$.

Задача 3

Упростите выражение $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2\left(x+1\right)^2-1}+\dfrac{x^2\left(x-1\right)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

Решение.

Воспользуемся формулой разности квадратов. Получим

$$\frac{x^4-(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2\left(x+1\right)^2-1}+\frac{x^2\left(x-1\right)^2-1}{x^4-(x+1)^2}=\frac{(x^2-(x-1))(x^2+(x-1))}{((x^2+1)-x)((x^2+1)+x)}+$$

$$+\frac{(x-(x^2-1))(x+(x^2-1))}{(x(x+1)-1)(x(x+1)+1)}+\frac{(x(x-1)-1)(x(x-1)+1)}{(x^2-(x+1))(x^2+(x+1))}=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}+$$

$$+\frac{(-x^2+x+1)(x^2+x-1)}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}+\frac{(x^2-x-1)(x^2-x+1)}{(x^2-x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{-x^2+x+1}{x^2+x+1}+$$

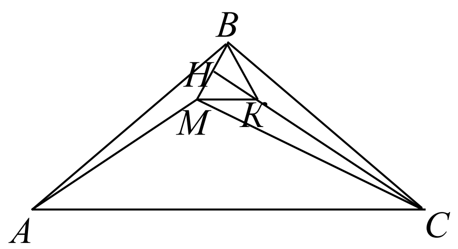
$$+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x-1-x^2+x+1+x^2-x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=1.$$

Ответ. 1.

Задача 4

Внутри равнобедренного треугольника ABC, у которого $\angle ABC = 100°$, отмечена такая точка M, что $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$. Найдите $\angle BMC$.

Решение.



Отметим внутри треугольника ABC точку K так, что $\angle KCB = 10°$, $\angle KBC = 20°$, продлим CK до пересечения с BM, точку пересечения CK и BM обозначим H.

Так как ΔABC – равнобедренный, $\angle ABC = 100°$, то $AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA = 0{,}5(180° - \angle ABC) = 0{,}5 \cdot 80° = 40°$ в силу свойства равнобедренного треугольника и теоремы о сумме углов треугольника.

Рассмотрим ΔABM и ΔCBK. $AB = BC$, $\angle MBA = \angle KBC$, $\angle MAB = \angle KCB$, значит, $\Delta ABM = \Delta CBK$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно, $BM = BK$.

Рассмотрим ΔBHC. $\angle HBC = \angle ABC - \angle ABM = 100° - 20° = 80°$, $\angle HCB = 10°$, тогда по теореме о сумме углов треугольника $\angle BHC = 180° - \angle HBC - \angle HCB = 180° - 80° - 10° = 90°$, то есть $CH \perp BM$.

Рассмотрим ΔBMK. $\angle MBK = \angle ABC - \angle ABM - \angle CBK = 100° - 20° - 20° = 60°$, $BM = BK$, следовательно, ΔBMK – равносторонний по признаку (как равнобедренный треугольник с углом против основания равным 60°). Так как $KH \perp BM$, то KH – высота ΔBMK, значит, KH – медиана ΔBMK, то есть H – середина отрезка BM.

Рассмотрим ΔBMC. Так как CH – высота и медиана ΔBMC, то ΔBMC – равнобедренный с основанием BM по признаку, следовательно, $\angle BMC = \angle MBC = 80°$ по свойству равнобедренного треугольника.

Ответ. $\angle BMC = 80°$.

Задача 5

Каждый из четырех гномов – Беня, Веня, Женя и Сеня – либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Мы подслушали такой разговор:

Беня (*Вене*). Ты врун.

Женя (*Бене*). Сам ты врун.

Сеня (*Жене*). Да они оба вруны. (Подумав.) Впрочем, ты тоже врун.

Кто из гномов правдив? (Ответ обосновать).

Решение.

Если Сеня говорит правду, то Беня, Веня и Женя вруны, тогда утверждение Бени Вене «Ты врун» является верным, что противоречит условию, что врун всегда лжет. Значит, наше предположение о том, что Сеня говорит правду, не верно, следовательно, Сеня врун.

Так как Сеня врун, то его утверждение Жене «Ты тоже врун» является ложным, значит, Женя говорит правду.

Так как Женя говорит правду, то его утверждение Бене «Сам ты врун» является верным, значит, Беня врун.

Так как Беня врун, то его утверждение Вене «Ты врун» является ложным, значит, Веня говорит правду.

Так как Беня врун, а Веня правдив, то утверждение Сени Жене о Бене и Вене «Они оба вруны» является ложным, что соответствует условию, что Сеня всегда лжет.

Ответ. Женя и Веня.