Задание № 1.

Задача 1

Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел оканчиваться на 2024? Ответ обосновать.

Решение

<u>**1 способ**</u>. Покажем сначала, что сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5. Пусть первое число x, тогда четыре последующих – $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ и $x + 4$. Найдем их сумму

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 5x + 10 = 5(x + 2),$$

а $5(x + 2)$ делится на 5.

Рассмотрим сумму n натуральных чисел. Разделим n на 5 с остатком, то есть запишем n в виде $n = 5p + r$, где p – целое неотрицательное число, а r – остаток от деления n на 5, r принимает одно из значений: 0, 1, 2, 3 или 4.

Если $r = 0$, то есть $n = 5p$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно разбить на p групп из 5 последовательных натуральных чисел. Сумма чисел в каждой группе делится на 5, следовательно, $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ делится на 5, то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1 + 2 + 3 + \ldots + 5p = 5a$.

Если $r = 1$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно представить в виде

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + 2 + 3 + \ldots + 5p) + (5p + 1) = 5a + 5p + 1 = 5(a + p) + 1,$$

то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ при делении на 5 имеет остаток 1.

Если $r = 2$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно представить в виде

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + 2 + 3 + \ldots + 5p) + (5p + 1) + (5p + 2) =$$

$$= 5a + 5p + 1 + 5p + 2 = 5(a + 2p) + 3,$$

то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ при делении на 5 имеет остаток 3.

Если $r = 3$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно представить в виде

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + 2 + 3 + \ldots + 5p) + (5p + 1) + (5p + 2) + (5p + 3) =$$

$$= 5a + 5p + 1 + 5p + 2 + 5p + 3 = 5(a + 3p + 1) + 1,$$

то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ при делении на 5 имеет остаток 1.

Если $r = 4$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно представить в виде

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + 2 + 3 + \ldots + 5p) + (5p + 1) + (5p + 2) + (5p + 3) + (5p + 4) =$$
$$= 5a + 5p + 1 + 5p + 2 + 5p + 3 + 5p + 4 = 5(a + 4p + 2),$$

то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ делится на 5.

Таким образом, сумма первых нескольких натуральных чисел делится на 5 или при делении на 5 имеет остаток 1 или 3. А натуральное число, оканчивающееся на 2024, при делении на 5 имеет остаток 4, так как остаток от деления на 5 натурального числа совпадает с остатком от деления на 5 его последней цифры. Значит, сумма первых нескольких натуральных чисел не может оканчиваться на 2024.

<u>2 способ</u>. Выведем сначала формулу для вычисления суммы n первых натуральных чисел. Пусть $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n$. Запишем ту же сумму, но слагаемые в ней запишем в обратном порядке, получим, $S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 3 + 2 + 1$. Сложим оба получившихся равенства, причем, слагаемые в правых частях сложим почленно, то есть первое с первым, второе со вторым и т.д. Получим:

$$\begin{array}{l} + \begin{array}{l} S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n \\ S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 3 + 2 + 1 \end{array} \\ \hline 2S_n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \ldots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1) \end{array}$$

В правой части равенства получили n одинаковых слагаемых, каждое из которых равно $n + 1$, следовательно, $2S_n = n\cdot(n + 1)$, откуда окончательно получаем формулу $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Предположим, что сумма первых нескольких натуральных чисел оканчивается на 2024, то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \ldots 2024$, следовательно, учитывая установленную выше формулу, имеем $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2} = \ldots 2024$, откуда получаем, что произведение двух последовательных натуральных чисел будет оканчиваться на 4048, то есть $n\cdot(n + 1) = \ldots 4048$. Составим таблицу значений для последней цифры произведения двух последовательных натуральных чисел:

последняя цифра n	последняя цифра $(n+1)$	последняя цифра $n\cdot(n+1)$
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	2
4	5	0
5	6	0
6	7	2
7	8	6
8	9	2
9	0	0

Из таблицы получаем, что произведение двух последовательных натуральных чисел может оканчиваться на 0, 2 или 6, что противоречит предположению (в силу предположения произведение двух последовательных натуральных чисел оканчивается на 8). Значит, наше предположение не верно, и сумма первых нескольких натуральных чисел не может оканчиваться на 2024.

Ответ. Не может.

Задача 2

Решите уравнение $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4x - 8y + 10 = 0$.

Решение

Преобразуем уравнение:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4x - 8y + 10 = 0;$$

$$x^2 + 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4x - 8y + 2 + 8 = 0;$$

$$(2x^2 + 4x + 2) + (2y^2 - 8y + 8) + (x^2 - 2xz + z^2) = 0;$$

$$2(x^2 + 2x + 1) + 2(y^2 - 4y + 4) + (x^2 - 2xz + z^2) = 0;$$

$$2(x + 1)^2 + 2(y - 2)^2 + (x - z)^2 = 0.$$

Так как при любых x, y и z $2(x+1)^2 \geq 0$, $2(y-2)^2 \geq 0$, $(x-z)^2 \geq 0$, а сумма неотрицательных чисел равна 0 тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно 0, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}(x+1)^2=0,\\(y-2)^2=0,\\(x-z)^2=0.\end{cases}$$

Решим полученную систему, учитывая, что $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$:

$$\begin{cases}x+1=0,\\y-2=0,\\x-z=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1,\\y=2,\\z=x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1,\\y=2,\\z=-1.\end{cases}$$

Ответ. $x = -1$; $y = 2$; $z = -1$.

Задача 3

На координатной плоскости постройте множество точек, удовлетворяющих уравнению $\dfrac{9x+2y-8}{6xy-2-4y+3x}=0$.

Решение

Преобразуем уравнение: $\dfrac{9x+2y-8}{6xy-2-4y+3x}=0$;

$$\begin{cases}9x+2y-8=0,\\6xy-2-4y+3x\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y=8-9x,\\2y(3x-2)+(3x-2)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=4-4{,}5x,\\(3x-2)(2y+1)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=4-4{,}5x,\\2y+1\neq 0,\\3x-2\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 - 4{,}5x, \\ y \neq -0{,}5, \\ x \neq \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Найдем координаты точки пересечения прямых $y = 4 – 4{,}5x$ и $y = –0{,}5$:

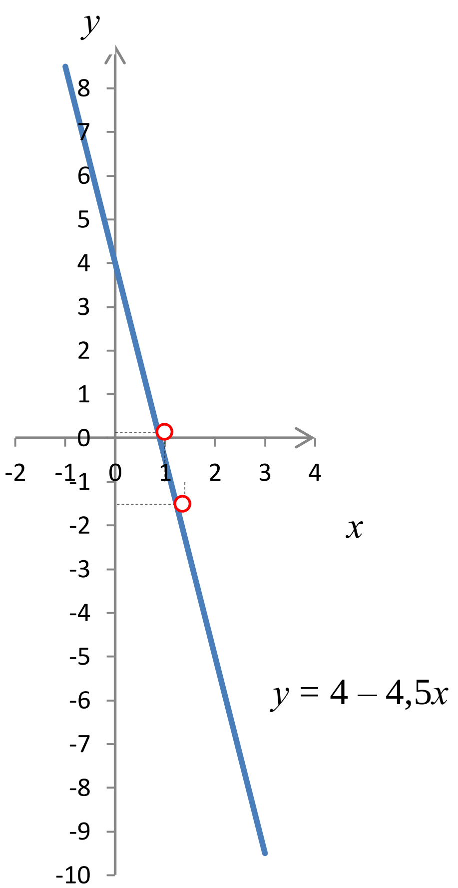
$$\begin{cases} y = 4 - 4{,}5x, \\ y = -0{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -0{,}5, \\ -0{,}5 = 4 - 4{,}5x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -0{,}5, \\ 4{,}5x = 4{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -0{,}5. \end{cases}$$

Найдем координаты точки пересечения прямых $y = 4 – 4{,}5x$ и $x = \frac{2}{3}$:

$$\begin{cases} y = 4 - 4{,}5x, \\ x = \dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}, \\ y = 4 - 4{,}5 \cdot \dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Таким образом, графиком уравнения $\dfrac{9x + 2y - 8}{6xy - 2 - 4y + 3x} = 0$ является прямая $y = 4 – 4{,}5x$ за исключением точек с координатами $(1; –0{,}5)$ и $\left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$.

Ответ.



Задача 4

Семья Ивановых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Если бы электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на телефон?

Решение

Пусть x – платеж за коммунальные услуги, y – платеж за телефон, c – платеж за электричество, a – общая сумма платежа, то есть $a = x + y + c$.

Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то есть стали бы $1{,}5x$, то общий доход семьи стал бы равен $1{,}5x + y + c$ или $1{,}35a$, так как по условию задачи в этом случае общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Таким образом, имеем два равенства: $1{,}35a = 1{,}5x + y + c$ и $a = x + y + c$. Вычитая из первого равенства второе, получим $0{,}35a = 0{,}5x$, откуда $x = 0{,}7a$, следовательно, платеж за коммунальные услуги составляет 0,7 или 70% от общей суммы платежа.

Если бы электричество подорожало на 50%, то есть стало бы $1{,}5c$, то общий доход семьи стал бы равен $x + y + 1{,}5c$ или $1{,}1a$, так как по условию задачи в этом случае общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Таким образом, имеем два равенства: $1{,}1a = x + y + 1{,}5c$ и $a = x + y + c$. Вычитая из первого равенства второе, получим $0{,}1a = 0{,}5c$, откуда $c = 0{,}2a$, следовательно, платеж за электричество составляет 0,2 или 20% от общей суммы платежа.

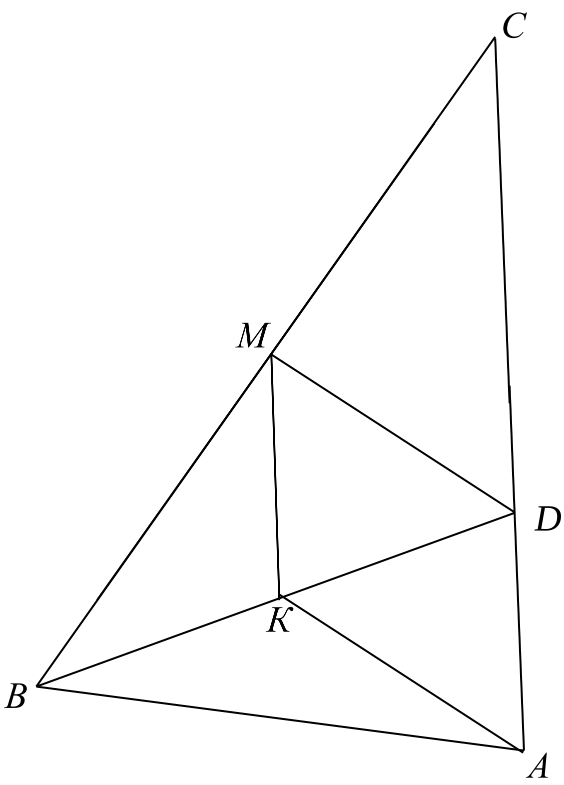
Определим, сколько процентов от общей суммы платежа составляет платеж за телефон. Так как $x = 0{,}7a$, $c = 0{,}2a$ и $a = x + y + c$, то

$$y = a - x - c = a - 0{,}7a - 0{,}2a = 0{,}1a,$$

то есть платеж за телефон составляет 0,1 или 10% от общей суммы платежа.

Ответ. 10%.

Задача 5



В треугольнике ABC точка D делит сторону AC в отношении $AD:DC = 1:2$. Докажите, что в треугольнике ABD найдётся медиана, равная одной из медиан треугольника DBC.

Решение

Пусть K – середина BD, M – середина BC. Тогда MK – средняя линия ΔDBC по определению. Следовательно, $MK \parallel CD$, $MK = 0{,}5CD$ по свойству средней линии.

Так как $AD:DC = 1:2$, то $AD = 0{,}5CD = MK$ и $MK \parallel AD$, следовательно, $AKMD$ – параллелограмм по признаку. Значит, $AK = MD$ по свойству параллелограмма.

AK – медиана ΔABD, DM – медиана ΔDBC, $AK = MD$, **что и требовалось доказать.**