ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2024-2025 учебный год)

Решение задания 1

Задача 1

В группе детского сада 11 малышей. Каждый из них выучил наизусть по два стихотворения Агнии Барто про игрушки. Известно, что всего таких стихотворений тоже 11, и каждое стихотворение выучили два ребенка. Можно ли организовать выступление детей на утреннике так, чтобы каждый рассказал стихотворение, которое знает, и все стихи были рассказаны?

Решение

Можно. Выберем какого-нибудь ребенка (А) и назначим ему одно из стихотворений, которое он выучил. Присвоим этому стихотворению номер 1. Пусть ребенок В выучил то же стихотворение. Назначим ему второе стихотворение, которое он знает, и присвоим этому стихотворению номер 2. Если Ребенок А тоже выучил стихотворение 2, то мы получаем задачу о распределении 9 стихотворений между 9 детьми при тех же условиях. В противном случае – найдём ребенка, который выучил стихотворение 2 и поручим ему второе его стихотворение, оно получит номер 3. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока стихотворение, получившее номер k, не окажется стихотворением, которое знает ребенок А. Это означает, что k стихотворений распределены между k детьми. Если $k = 11$, задача решена. В противном случае, получаем задачу о распределении $11 - k$ стихотворений между $11 - k$ детьми с теми же условиями. Применяем описанный алгоритм к этой группе детей.

Задача 2

Мачеха велела Золушке перебрать просо, рис и ячмень. Сколько способов смешать зерно у неё было, если известно, что для птиц, которые будут помогать Золушке, все зернышки разные, и у них есть 324000 вариантов выбрать по одному зернышку каждого вида?

Решение

Пусть Мачеха берет x зернышек проса, y зернышек риса и z зернышек ячменя. Тогда количество способов выбрать по одному зернышку каждого вида – xyz. Таким образом, нужно подсчитать количество способов разложить число 324000 на три натуральных множителя.

$324000 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3$, каждый делитель этого числа имеет вид $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, где число a может принимать целые значения от 0 до 5, число b – целые значения от 0 до 4, число c – целые значения от 0 до 3. Следовательно,

$$x = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1}, \qquad y = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2}, \qquad z = 2^{a_3} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{c_3},$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 5,\ b_1 + b_2 + b_3 = 4,\ c_1 + c_2 + c_3 = 3.$$

Число a_1 может принимать значения от 0 до 5, если $a_1 = k$, то число a_2 может принимать значения от 0 до $5 - k$. Если выбраны a_1 и a_2, то число a_3 находится однозначно. Таким образом, количество способов выбрать числа a_1, a_2, a_3 равно

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.$$

Рассуждая аналогичным образом, находим, что количество способов выбрать числа b_1, b_2, b_3 равно

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15,$$

а количество способов выбрать числа c_1, c_2, c_3 равно

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10.$$

Получаем, что количество способов выбрать числа x, y, z равно $21 \cdot 15 \cdot 10 = 3150$.

Ответ: 3150.

Задача 3

Решите уравнение

$$\sqrt{x + 4 + 2\sqrt{x + 3}} + \sqrt{x + 12 - 6\sqrt{x + 3}} = 6.$$

Решение

Обозначим $t = \sqrt{x + 3}$. Тогда $x = t^2 - 3$ и уравнение запишется в виде

$$\sqrt{t^2 + 1 + 2t} + \sqrt{t^2 + 9 - 6t} = 6,$$

то есть $|t + 1| + |t - 3| = 6$.

Если $t < 3$, то $t + 1 + 3 - t = 6$, $4 = 6$ – решений нет.

Если $t \geq 3$, $t + 1 + t - 3 = 6$, $t = 4$, $x = 13$.

Ответ: 13.

Задача 4

При каких значениях параметра a корни уравнения

$$(a + 1)x^2 - (2 + 3a)x + 8a + 3 = 0$$

имеют противоположные знаки и корень с большим модулем положителен?

Решение

По теореме Виета, если x_1, x_2 – корни уравнения, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2 + 3a}{a + 1}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{8a + 3}{a + 1} \end{cases}$$

Если корни имеют противоположные знаки, то $x_1 x_2 < 0$. Из того, что корень с большим модулем положителен, следует, что $x_1 + x_2 > 0$.

Таким образом,

$$\begin{cases} \dfrac{2 + 3a}{a + 1} > 0, \\ \dfrac{8a + 3}{a + 1} < 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство, получаем $a < -1$ или $a > -2/3$. Из второго неравенства $-1 < a < -3/8$. Таким образом,$-2/3 < a < -3/8$.
График приведенного трехчлена

$$y = x^2 - \frac{2+3a}{a+1}x + \frac{8a+3}{a+1}$$

- парабола с ветвями вверх, y<0 при x=0, то есть уравнение имеет два корня.

Ответ:

$$-\frac{2}{3} < a < -\frac{3}{8}.$$

Задача 5

Вершина квадрата расположена в начале координат. Найдите координаты остальных вершин квадрата, если две из них лежат на прямых $y + 2x = 1$ и $y + 2x = -2$.

Решение

Пусть в начале координат лежит вершина *A* квадрата *ABCD*. Опустим перпендикуляры *AK* и *AM* на рассматриваемые прямые. Так как прямые параллельные и имеют угловой коэффициент -2, точки *K* и *M* лежат на прямой $y = 0{,}5x$. Таким образом, координаты точки *K* находим из системы

$$y + 2x = 1, y = 0{,}5x,$$

то есть $x = 0{,}4$, $y = 0{,}2$, $AK = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}2^2} = \sqrt{0{,}2}$.
Координаты точки *M* находим из системы

$$y + 2x = -2, y = 0{,}5x,$$

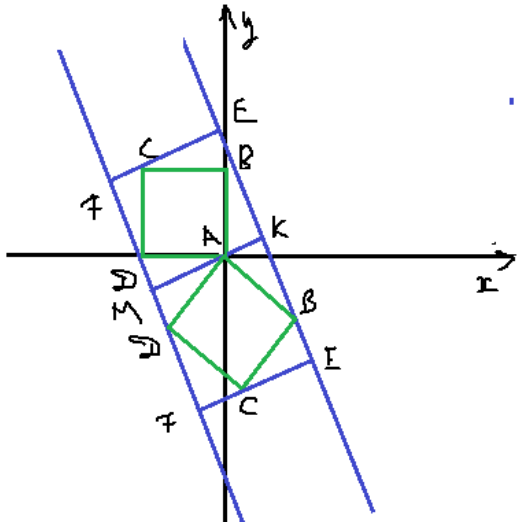
то есть $x = -0{,}8$, $y = -0{,}4$, $AM = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}8^2} = \sqrt{0{,}8}$.
1 случай. Предположим, точка *B* лежит на прямой $y + 2x = 1$, точка D – на прямой $y + 2x = -2$.
Проведём через точку *C* прямую *EF*, параллельную *MK*. Прямоугольные треугольники *AKB*, *BEC*, *CFD*, *DMA* равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, *KB*=*AM*, *MD*=*AK*. Сторона квадрата равна $\sqrt{0{,}2 + 0{,}8} = 1$.
Точка *B* расположена на прямой $y + 2x = 1$ на расстоянии 1 от точки *A*:

$$y + 2x = 1, \ \ x^2 + y^2 = 1.$$

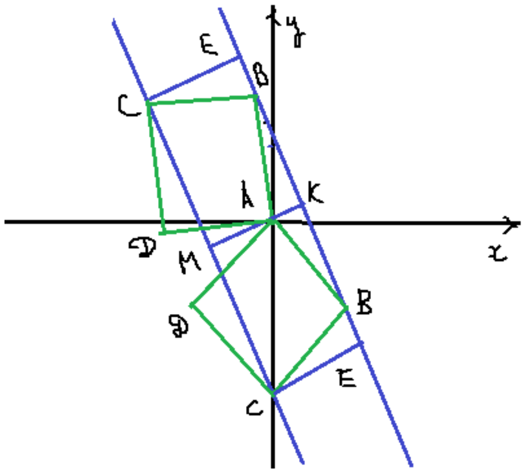
Решаем эту систему: $x^2 + (1 - 2x)^2 = 1$, $5x^2 - 4x = 0$,
$x = 0$ или $x = 0{,}8$, $y = 1$ или $y = -0{,}6$.
Точка *D* расположена на прямой $y + 2x = -2$ на расстоянии 1 от точки *A*:

$$y + 2x = -2, \qquad x^2 + y^2 = 1,$$

то есть $x^2 + (2 + 2x)^2 = 1$, $5x^2 + 8x + 3 = 0$,
$x = -1$ или $x = -0{,}6$, $y = 0$ или $y = -0{,}8$.
Вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, поэтому, если $B(0{,}1)$, $D(-1{,}0)$, то $C(-1{,}1)$, если же $B(0{,}8; -0{,}6)$, $D(-0{,}6; -0{,}8)$, то $C(0{,}2; -1{,}4)$.



2 случай. Предположим, точка B лежит на прямой $y+2x=1$, точка C – на прямой $y+2x=-2$.
Опустим из точки C перпендикуляр CE на прямую AB. Прямоугольные треугольники AKB, BEC равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $KB=CE=\sqrt{0{,}2}+\sqrt{0{,}8}$, сторона квадрата равна $\sqrt{0{,}2+0{,}8+0{,}2+2\sqrt{0{,}16}}=\sqrt{2}$.



Точка B расположена на прямой $y+2x=1$ на расстоянии $\sqrt{2}$ от точки A:

$$y+2x=1,\ \ x^2+y^2=2.$$

$x^2+(1-2x)^2=2$, $5x^2-4x-1=0$,
$x=1$ или $x=-0{,}2$, $y=-1$ или $y=1{,}4$.
Точка C расположена на прямой $y+2x=-2$ на расстоянии 2 от точки A:

$$y+2x=-2, \qquad x^2+y^2=4,$$

то есть $x^2+(2+2x)^2=4$, $5x^2+8x=0$,
$x=0$ или $x=-1{,}6$, $y=-2$ или $y=1{,}2$.
Вектор $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, поэтому, если $B(1,-1)$, $C(0,-2)$, то $D(-1,-1)$, если же $B(-0{,}2;1{,}4)$, $C(-1{,}6;1{,}2)$, то $D(-1{,}4;-0{,}2)$.
3 случай. Предположим, точка C лежит на прямой $y+2x=1$, точка D – на прямой $y+2x=-2$.

Опустим из точки *C* перпендикуляр *CF* на прямую *AD*. Прямоугольные треугольники *AMD*, *DFC* равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $MD = CF = \sqrt{0{,}2} + \sqrt{0{,}8}$, сторона квадрата равна $\sqrt{0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}2 + 2\sqrt{0{,}16}} = \sqrt{2{,}6}$.

Точка *D* расположена на прямой $y + 2x = -2$ на расстоянии $\sqrt{2{,}6}$ от точки *A*:

$$y + 2x = -2, \qquad x^2 + y^2 = 2{,}6,$$

то есть $x^2 + (2 + 2x)^2 = 2{,}6$, $5x^2 + 8x + 1{,}4 = 0$,

$x = -1{,}4$ или $x = -0{,}2$, $y = 0{,}8$ или $y = -1{,}6$.

Точка *C* расположена на прямой $y + 2x = 1$ на расстоянии $\sqrt{5{,}2}$ от точки *A*:

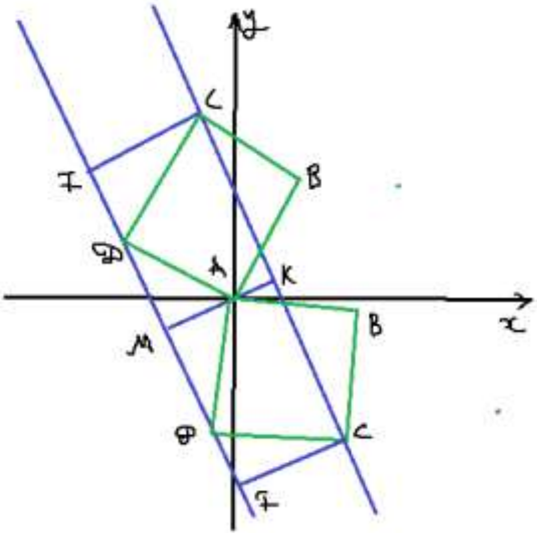
$$y + 2x = 1, \;\; x^2 + y^2 = 5{,}2.$$

$x^2 + (1 - 2x)^2 = 2, \qquad 5x^2 - 4x - 4{,}2 = 0,$

$x = -0{,}6$ или $x = 1{,}4$, $y = 2{,}2$ или $y = -1{,}8$.

Вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, поэтому, если $C(-0{,}6; 1{,}4)$, $D(-1{,}4; 0{,}8)$, то $B(0{,}8; 0{,}6)$,

если $C(1{,}4; -1{,}8)$, $D(-0{,}2; -1{,}6)$, то $B(1{,}6; -0{,}2)$.



Ответ: $B(0{,}1)$, $C(-1{,}1)$, $D(-1{,}0)$;

$B(0{,}8; -0{,}6)$, $C(0{,}2; -1{,}4)$, $D(-0{,}6; -0{,}8)$;

$B(1, -1)$, $C(0, -2)$, $D(-1, -1)$;

$B(-0{,}2; 1{,}4)$, $C(-1{,}6; 1{,}2)$, $D(-1{,}4; -0{,}2)$;

$B(0{,}8; 0{,}6)$, $C(-0{,}6; 1{,}4)$, $D(-1{,}4; 0{,}8)$;

$B(1{,}6; -0{,}2)$, $C(1{,}4; -1{,}8)$, $D(-0{,}2; -1{,}6)$.