8 класс **2023-2024 уч.г.**

Решение задания № 1

Задача 1

Простым или составным является число $2024^{2023}+1$? Ответ обосновать.

Решение

Натуральное число, большее единицы, является простым, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само себя;

натуральное число, большее единицы, является составным, если оно имеет более двух натуральных делителей.

Для того, чтобы выяснить, является число простым или составным, нужно определить, есть ли у этого числа хотя бы один делитель, больший 1 и меньший самого этого числа, или ответить на вопрос: можно ли представить это число в виде произведения двух множителей, больших 1.

<u>1 способ</u>. Так как $2023 = 7\cdot 289$, то $2024^{2023}+1 = 2024^{7\cdot 289}+1 = (2024^{289})^7 + 1$. Разложим $(2024^{289})^7 + 1$ на множители, используя формулу $x^7 + y^7 =$ $= (x + y)\cdot(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$:

$$(2024^{289})^7 + 1 = (2024^{289} + 1)\times$$
$$\times((2024^{289})^6 - (2024^{289})^5 + (2024^{289})^4 - (2024^{289})^3 + (2024^{289})^2 - 2024^{289} + 1).$$

Так как $2024^{289} + 1 > 1$ и, в силу того, что $(2024^{289})^6 - (2024^{289})^5 >0$, $(2024^{289})^4 - (2024^{289})^3 > 0$, $(2024^{289})^2 - 2024^{289} > 0$,

$(2024^{289})^6 - (2024^{289})^5 + (2024^{289})^4 - (2024^{289})^3 + (2024^{289})^2 - 2024^{289} + 1 > 1$, то число $2024^{2023}+1$ является составным.

<u>2 способ</u>. Так как $2 + 0 + 2 + 4 = 8$, 8 не делится на 3, то и 2024 не делится на 3, следовательно, 2024^{1011} не делится на 3.

Покажем, что если натуральное число на 3 не делится, то квадрат этого числа при делении на 3 дает остаток 1. Пусть n – натуральное число, не делящееся на 3, тогда n при делении на 3 имеет остаток 1 или 2, то есть $n = 3\cdot k + 1$ или $n = 3\cdot k + 2$. Если $n = 3\cdot k + 1$, то $n^2 = (3\cdot k + 1)^2 = 9\cdot k^2 + 6\cdot k + 1 = 3\cdot(3\cdot k^2 + 2\cdot k) + 1$, то есть n^2 при делении на 3 имеет остаток 1. Если $n = 3\cdot k + 2$, то $n^2 = (3\cdot k + 2)^2 = 9\cdot k^2 + 12\cdot k + 4 = 9\cdot k^2 + 12\cdot k + 3 + 1 = 3\cdot(3\cdot k^2 + 4\cdot k + 1) + 1$, то есть n^2 при делении на 3 имеет остаток 1. Таким образом, если натуральное число на 3 не делится, то квадрат этого числа при делении на 3 дает остаток 1.

Так как 2024^{1011} не делится на 3, то $2024^{2022} = 2024^{1011\cdot 2} = (2024^{1011})^2$ при делении на 3 имеет остаток 1, то есть $2024^{2022} = 3\cdot k + 1$, $2024 = 3\cdot 674 + 2 = 3\cdot p + 2$, тогда

$2024^{2023}=2024^{2022+1}=2024^{2022}\cdot 2024=(3\cdot k+1)\cdot(3\cdot p+2)=9kp+6k+3p+2=3\cdot(3kp+2k+p)+2$, то есть 2024^{2023} при делении на 3 имеет остаток 2, $2024^{2023}=3\cdot m+2$, тогда

$$2024^{2023}+1=(3\cdot m+2)+1=3\cdot m+3=3\cdot(m+1),$$

следовательно, $2024^{2023}+1$ делится на 3, а значит, $2024^{2023}+1$ имеет делитель 3, который больше 1 и меньше $2024^{2023}+1$, таким образом, $2024^{2023}+1$ является составным числом.

3 способ. Найдем последнюю цифру числа 2024^{2023}. Последняя цифра числа 2024^{2023} совпадает с последней цифрой числа 4^{2023}. Так как $4^1=4$, $4^2=16$, $4^3=64$, $4^4=256$, а при умножении на 4 числа, оканчивающегося на 4, получаем число, оканчивающееся на 6, а при умножении на 4 числа, оканчивающегося на 6, получаем число, оканчивающееся на 4, то любая степень числа 4 оканчивается на 4 или на 6. Кроме того, так как $4^1=4$, то любая четная степень числа 4 оканчивается на 6, а любая нечетная степень числа 4 оканчивается на 4. Так как 2023 число нечетное, то 4^{2023} оканчивается на 4, следовательно, 2024^{2023} оканчивается на 4. Тогда $2024^{2023}+1$ оканчивается на 5, значит, $2024^{2023}+1$ делится на 5 по признаку делимости на 5. Значит, $2024^{2023}+1$ имеет делитель 5, который больше 1 и меньше $2024^{2023}+1$, таким образом, $2024^{2023}+1$ является составным числом.

Ответ. Составное число.

Задача 2

Докажите, что уравнение $x^2=4y-1$ не имеет решений в целых числах.

Решение

Один из способов доказательства того, что уравнение не имеет решений в целых числах, состоит в следующем: доказать, что левая и правая части уравнения имеют разные остатки при делении на некоторое натуральное число.

Преобразуем уравнение: $x^2+1=4y$. При любом целом y $4y$ делится на 4. Найдем остаток при делении на 4 x^2+1. Если x число четное, $x=2n$, то $x^2+1=(2n)^2+1=4n^2+1$, то есть x^2+1 при делении на 4 имеет остаток 1. Если x число нечетное, $x=2n+1$, то $x^2+1=(2n+1)^2+1=4n^2+4n+1+1=$ $=4(n^2+n)+2$, то есть x^2+1 при делении на 4 имеет остаток 2. Таким образом, при любом целом x x^2+1 не делится на 4, а $4y$ при любом целом y делится на 4, следовательно, уравнение $x^2+1=4y$ не имеет решений в целых числах, а поэтому и уравнение $x^2=4y-1$ не имеет решений в целых числах, **что и требовалось доказать.**

Задача 3

На координатной плоскости постройте множество точек, удовлетворяющих уравнению $\left||2x-1|-|y+3|\right|=4$.

Решение

По определению модуля уравнение $\left||2x-1|-|y+3|\right|=4$ равносильно совокупности двух уравнений: $|2x-1|-|y+3|=4$ или $|2x-1|-|y+3|=-4$.

Рассматривая все возможные случаи раскрытия модулей $|2x-1|$ и $|y+3|$ получаем:

1. Если $2x \ge 1$, $x \ge \dfrac{1}{2}$ и $y \ge -3$, то уравнение $|2x-1|-|y+3|=4$ примет вид

$$(2x-1)-(y+3)=4,$$
$$2x-1-y-3=4,$$
$$2x-y-4=4,$$
$$y=2x-8;$$

а уравнение $|2x-1|-|y+3|=-4$ примет вид:

$$(2x-1)-(y+3)=-4,$$
$$2x-1-y-3=-4,$$
$$2x-y-4=-4,$$
$$y=2x.$$

2. Если $2x \ge 1$, $x \ge \dfrac{1}{2}$ и $y \le -3$, то уравнение $|2x-1|-|y+3|=4$ примет вид

$$(2x-1)+(y+3)=4,$$
$$2x-1+y+3=4,$$
$$2x+y+2=4,$$
$$y=-2x+2;$$

а уравнение $|2x-1|-|y+3|=-4$ примет вид:

$$(2x-1)+(y+3)=-4,$$
$$2x-1+y+3=-4,$$
$$2x+y+2=-4,$$
$$y=-2x-6.$$

3. Если $2x \le 1$, $x \le \dfrac{1}{2}$ и $y \ge -3$, то уравнение $|2x-1|-|y+3|=4$ примет вид

$$-(2x-1)-(y+3)=4,$$
$$-2x+1-y-3=4,$$
$$-2x-y-2=4,$$
$$y=-2x-6;$$

а уравнение $|2x-1|-|y+3|=-4$ примет вид:

$$-(2x-1)-(y+3)=-4,$$
$$-2x+1-y-3=-4,$$
$$-2x-y-2=-4,$$
$$y=-2x+2.$$

4. Если $2x \le 1$, $x \le \frac{1}{2}$ и $y \le -3$, то уравнение $|2x-1|-|y+3|=4$ примет вид

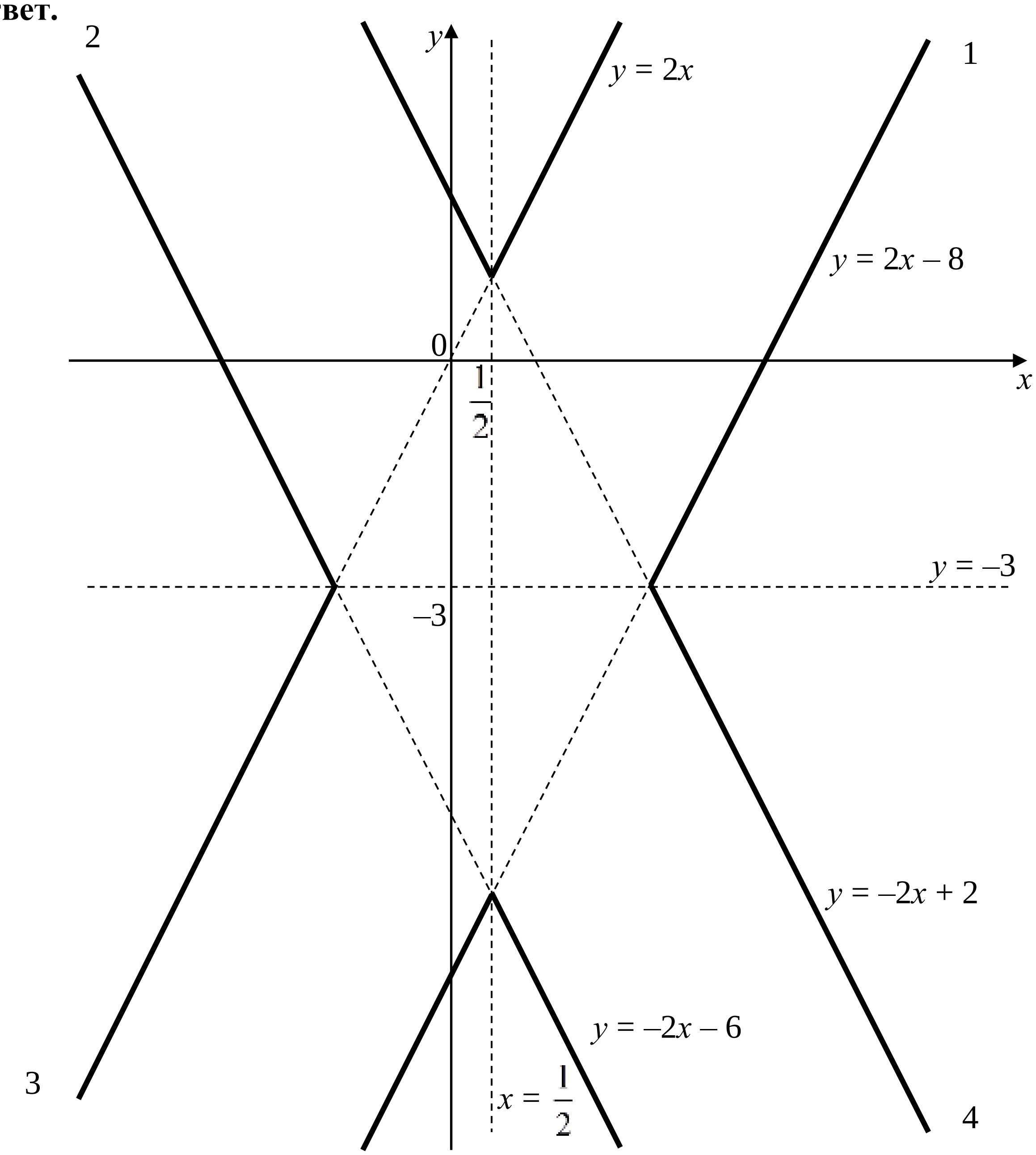
$$-(2x-1)+(y+3)=4,$$
$$-2x+1+y+3=4,$$
$$-2x+y+4=4,$$
$$y=2x;$$

а уравнение $|2x-1|-|y+3|=-4$ примет вид:

$$-(2x-1)+(y+3)=-4,$$
$$-2x+1+y+3=-4,$$
$$-2x+y+4=-4,$$
$$y=2x-8.$$

Прямые $x=\frac{1}{2}$ и $y=-3$ разбивают координатную плоскость на 4 угла. Если эти углы пронумеровать от 1 до 4, начиная с верхнего правого угла и по направлению, противоположному направлению движения часовой стрелки, то график уравнения будет состоять из участков прямых $y=2x$ и $y=2x-8$, лежащих в первом и третьем углах, и участков прямых $y=-2x+2$ и $y=-2x-6$, лежащих во втором и четвертом углах.

Ответ.



Задача 4

Учащиеся 8-го класса собираются на экскурсию. Для экскурсии нужно собрать денег. Если каждый учащийся внесет по 750 руб., то на расходы не хватит 900 руб.; если каждый внесет по 800 руб., то останется 900 руб. Сколько человек в классе?

Решение

Пусть в классе x человек. Если каждый учащийся внесет по 750 руб., то будет собрано $750x$ руб., если каждый учащийся внесет по 800 руб., то будет собрано $800x$ руб. По условию задачи для проведения экскурсии необходимо собрать $(750x + 900)$ руб. или $(800x – 900)$ руб. Получаем уравнение:

$$750x + 900 = 800x - 900;$$

$$800x - 750x = 900 + 900;$$

$$50x = 1800; \; |:50$$

$$x = 36.$$

Таким образом, в классе 36 учащихся.

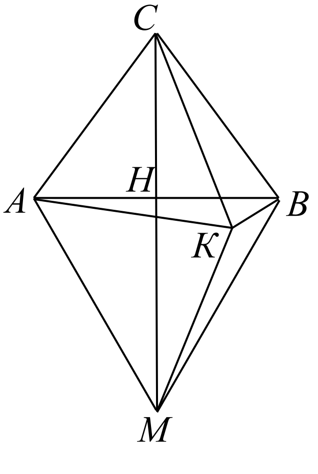
Ответ. 36 человек.

Задача 5

В ΔABC стороны AC и BC равны, $\angle ACB = 80°$. Вне треугольника ABC взята точка K так, что $\angle ABK = 30°$, $\angle KAB = 10°$. Найдите $\angle AKC$.

Решение

На стороне AB треугольника ABC построим равносторонний треугольник ABM так, чтобы точки C и M лежали по разные стороны относительно прямой AB.



Пусть MH – высота ΔABM. Так как ΔABM – равносторонний, то MH – медиана и биссектриса ΔABM и $\angle MAB = \angle ABM = 60°$, то есть, H – середина отрезка AB.

Так как точка H – середина стороны AB, то CH – медиана равнобедренного ΔABC, проведенная к основанию, следовательно, CH – высота ΔABC, то есть $CH \perp AB$. По построению MH – высота ΔABM, значит, $MH \perp AB$. Так как через точку H можно провести только один перпендикуляр к прямой AB, то $C \in MH$.

Рассмотрим ΔMKB и ΔAKB. $BM = AB$ как стороны равностороннего треугольника ABM, $\angle ABK = 30°$, $\angle MBK = \angle ABM – \angle ABK = 60° – 30° = 30°$, BK –

общая сторона. Значит, $\Delta MKB = \Delta AKB$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $MK = AK$.

Так как в ΔABC $AC = BC$ по условию, то ΔABC – равнобедренный, следовательно, $\angle CAB = \angle CBA$ как углы при основании равнобедренного треугольника. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$, следовательно, $\angle CAB = 0{,}5 \cdot (180° - \angle ACB) = 0{,}5 \cdot (180° - 80°) = 50°$.

Рассмотрим ΔAMK. Так как $MK = AK$, то ΔAMK – равнобедренный с основанием AM, следовательно, $\angle MAK = \angle AMK$ как углы при основании равнобедренного треугольника. $\angle MAK = \angle MAB - \angle KAB = 60° - 10° = 50°$.

Рассмотрим ΔMAK и ΔBAC. $AM = AB$ как стороны равностороннего треугольника ABM, $\angle CAB = \angle CBA = \angle MAK = \angle AMK = 50°$. Значит, $\Delta MAK = \Delta BAC$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно, $AC = AK$.

В ΔAKC $AC = AK$, $\angle KAC = \angle KAB + \angle BAC = 10° + 50° = 60°$, следовательно, ΔAKC – равносторонний, $\angle AKC = 60°$.

Ответ. $\angle AKC = 60°$.