8 класс **2024-2025 г.**

Задание № 2

Задача 1

Сумма трех различных простых чисел в 5 раз меньше их произведения. Найдите все такие тройки простых чисел.

Решение.

Пусть x, y и a – искомые простые числа. По условию задачи $5(x + y + a) = xya$. Так как левая часть равенства делится на 5, то и правая часть равенства делится на 5, т.е. произведение xya делится на 5. Учитывая, что 5 – простое число, получаем, что одно из искомых простых чисел равно 5. Пусть, для определенности, $a = 5$ и $x < y$. Тогда $5(x + y + 5) = 5xy$, откуда $x + y + 5 = xy$ или $xy - x - y + 1 = 6$. Раскладывая левую часть уравнения на множители методом группировки, получаем $x(y - 1) - (y - 1) = 6$ или $(x - 1)(y - 1) = 6$. Решим полученное уравнение в натуральных числах. Так как x и y – простые числа, то $x > 1$, $y > 1$, значит, $x - 1 > 0$, $y - 1 > 0$. Кроме того, по предположению $y > x$, откуда $y - 1 > x - 1$. Число 6 в виде произведения двух натуральных множителей представимо двумя способами: $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$, поэтому чтобы решить уравнение $(x - 1)(y - 1) = 6$ в натуральных числах, нужно решить две системы уравнений:

$$1)\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=6; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x-1=2, \\ y-1=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2, \\ y=7. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$$

Так как 4 не является простым числом, то условию задачи удовлетворяет единственный набор из трех простых чисел: 2, 5 и 7.

Ответ. Одна тройка простых чисел 2, 5 и 7.

Задача 2

Решите уравнение $\left|6,25x^2+10x+4\right|=\left|3,2-5x^2\right|$.

Решение.

Разложим на множители выражения, стоящие под знаком модулей.

$$6,25x^2+10x+4=0,25\cdot(25x^2+40x+16)=0,25\cdot(5x+4)^2;$$

$$3,2-5x^2=0,2\cdot(16-25x^2)=0,2\cdot(4-5x)\cdot(4+5x).$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\left|0,25\cdot(5x+4)^2\right|=\left|0,2\cdot(4-5x)\cdot(4+5x)\right|.$$

Преобразуем уравнение, используя свойства модуля: $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$, $|-a|=|a|$. Получим

$$\left|0,25\cdot(5x+4)\right|\cdot\left|5x+4\right|=\left|0,2\cdot(4-5x)\right|\cdot\left|4+5x\right|;$$

$$\left|0,25\cdot(5x+4)\right|\cdot\left|5x+4\right|-\left|0,5\cdot(5x-4)\right|\cdot\left|5x+4\right|=0.$$

Вынесем общий множитель за скобку, получим

$$\left(\left|0,25\cdot(5x+4)\right|-\left|0,2\cdot(5x-4)\right|\right)\cdot\left|5x+4\right|=0.$$

Получили, что произведение двух множителей равно 0, причем оба множителя существуют при любых действительных значениях x. Значит, корнями уравнения будут те значения x, при которых один из множителей равен нулю:

$$\left|0,25\cdot(5x+4)\right|-\left|0,2\cdot(5x-4)\right|=0 \quad \text{или} \quad \left|5x+4\right|=0,$$

$$\left|0,25\cdot(5x+4)\right|=\left|0,2\cdot(5x-4)\right|, \qquad 5x+4=0,$$

$$0,25\cdot(5x+4)=0,2\cdot(5x-4) \text{ или } 0,25\cdot(5x+4)=-0,2\cdot(5x-4), \qquad x=-0,8.$$

$$1,25x+1=x-0,8, \qquad 1,25x+1=-x+0,8,$$

$$0,25x=-1,8, \qquad 2,25x=-0,2,$$

$$x=-7,2. \qquad x=-\frac{4}{45}.$$

Ответ. $x=-7,2$, $x=-\dfrac{4}{45}$, $x=-0,8$.

Задача 3

Докажите, что при любых значениях x и y справедливо следующее неравенство: $x^2 + 5y^2 – 6x – 22y + 2xy + 25 \geq 0$. Укажите значения x и y, при которых справедливо равенство.

Решение.

Преобразуем выражение, стоящее в левой части неравенства.

$$x^2 + 5y^2 – 6x – 22y + 2xy + 25 = (x^2 + 2xy + y^2) + 4y^2 – 6x – 22y + 25 =$$

$$= (x + y)^2 – 6x – 6y + 9 + 4y^2 – 16y + 16 =$$

$$= ((x + y)^2 – 6\cdot(x + y) + 9) + 4\cdot(y^2 – 4y + 4) = (x + y – 3)^2 + 4\cdot(y – 2)^2.$$

Таким образом, исходное неравенство принимает вид

$$(x + y – 3)^2 + 4\cdot(y – 2)^2 \geq 0.$$

Так как квадрат любого действительного числа неотрицателен и сумма двух неотрицательных чисел неотрицательна, то неравенство $(x + y – 3)^2 + 4\cdot(y – 2)^2 \geq 0$ справедливо при любых действительных значениях x и y.

Найдем значения x и y, при которых справедливо равенство

$$(x + y – 3)^2 + 4\cdot(y – 2)^2 = 0.$$

Сумма двух неотрицательных чисел равна нули тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю, то есть искомые значения x и y являются решением системы

$$\begin{cases} (x+y-3)^2 = 0, \\ 4\cdot(y-2)^2 = 0. \end{cases}$$

Так как квадрат числа равен нулю тогда и только тогда, когда само число рано нулю, то система уравнений примет вид

$$\begin{cases} x+y-3=0, \\ y-2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3-y, \\ y=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Ответ. Равенство справедливо при $x = 1$, $y = 2$.

Задача 4

Сколько можно купить на 100 монет (потратив все монеты) петухов, кур и цыплят, если всего надо купить 100 птиц, причём петух стоит 5 монет, курица – 4, а 4 цыплёнка – одну монету?

Решение.

Пусть купили x петухов, y кур и a цыплят. Тогда $x + y + a = 100$, где x, y и a – целые неотрицательные числа. На покупку x петухов потрачено $5x$ монет, y кур – $4y$ монет, a цыплят – $\frac{a}{4}$ монет. По условию задачи $5x+4y+\frac{a}{4}=100$, а так как x, y и a целые числа, то число a кратно 4. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+a=100, \\ 5x+4y+\dfrac{a}{4}=100; \end{cases}$$

которую нужно решить в целых числах. Умножим первое уравнение системы на 5 и вычтем второе уравнение. Получим

$$-\begin{array}{l} 5x+5y+5a=500 \\ 5x+4y+\dfrac{a}{4}=100 \\ \hline \quad y+\dfrac{19a}{4}=400, \end{array}$$

откуда $y=400-\frac{19a}{4}$. Учитывая, что $y \geq 0$ и $a + y \leq 100$, получаем, что искомое значение a удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} 400-\dfrac{19a}{4} \geq 0, \\ 400-\dfrac{19a}{4}+a \leq 100; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{19a}{4} \leq 400, \\ \dfrac{15a}{4} \geq 300; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \le \dfrac{1600}{19}, \\ a \ge \dfrac{400}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \le 84\dfrac{4}{19}, \\ a \ge 80. \end{cases}$$

Так как a кратно 4, то системе удовлетворяют только два значения a: $a = 80$ или $a = 84$.

Если $a = 80$, то $y = 400 - \dfrac{19a}{4} = 400 - 380 = 20$, $x = 100 - y - a = 100 - 80 - 20 = {}$ $=0$.

Если $a = 84$, то $y = 400 - \dfrac{19a}{4} = 400 - 399 = 1$, $x = 100 - y - a = 100 - 84 - 1 = {}$ $=15$.

Ответ. 20 куриц и 80 цыплят или 15 петухов, 1 курицу и 84 цыпленка.

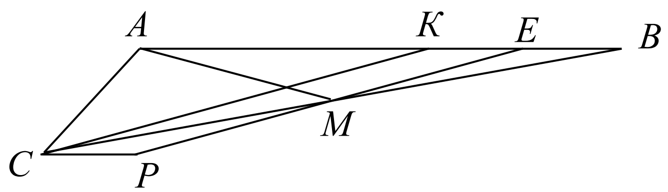
Задача 5

Отрезок AM – медиана треугольника ABC. На стороне AB отметили точку K. Известно, что $CK = 2AM$, $\angle BAM = 15°$. Найдите угол между прямыми CK и AB.

Решение.

1 способ. Через точку M проведем прямую ME, параллельную прямой CK, $E \in AB$, через точку C проведем прямую CP, параллельную прямой AB, $P \in ME$.

Так как $CP \parallel KE$, $CK \parallel PE$, то четырехугольник $CPEK$ – параллелограмм (по определению), следовательно, $CK = PE$ как противоположные стороны параллелограмма (по свойству).

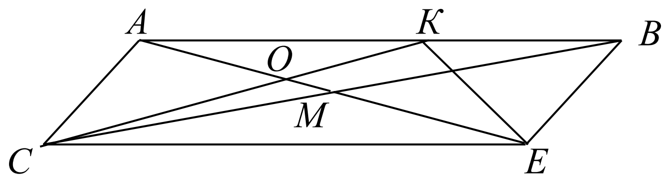


Рассмотрим треугольники MEB и MPC. $CM = MB$, так как AM – медиана треугольника ABC, $\angle CMP = \angle BME$ как вертикальные, $\angle MCP = \angle MBE$ как накрестлежащие при $CP \parallel AB$ и секущей CB. Значит, $\Delta MEB = \Delta MPC$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно, $PM = ME$.

Рассмотрим треугольник AME. $AM = 0{,}5CK$ по условию, $ME = 0{,}5PE = 0{,}5CK$, т.е. $AM = ME$, значит, ΔAME равнобедренный (по определению), следовательно, $\angle MAE = \angle MEA$ как углы при основании равнобедренного треугольника (по свойству). Так как $\angle MAB = 15°$, то $\angle MEA = 15°$.

$\angle AKC = \angle AEM$ как соответственные при $CK \parallel PE$ и секущей AB. Значит, $\angle AKC = 15°$, т.е. угол между прямыми CK и AB равен 15°.

2 способ. Отложим от точки M на прямой AM отрезок ME, $ME = AM$, так что точки A и E лежат по разные стороны относительно точки M.

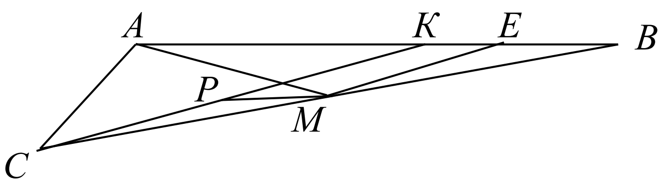


Рассмотрим четырехугольник $ABEC$, в котором точка M является точкой пересечения диагоналей AE и BC. $CM = MB$, так как AM – медиана треугольника ABC, $ME = AM$ по построению, значит, $ABEC$ – параллелограмм (по признаку), следовательно, $CE \parallel AB$ (по определению) и $CE = AB$ (по свойству).

Так как точка K лежит на стороне AB треугольника ABC, то $AK < AB = CE$ и $CE \parallel AK$, значит, $ACEK$ – трапеция с основаниями AK и CE. По условию $CK = 2AM = AE$, значит, $ACEK$ – равнобедренная трапеция (по признаку). Пусть CK и AE пересекаются в точке O, тогда $AO = OK$ по свойству равнобедренной трапеции, значит, ΔAOK – равнобедренный (по определению), следовательно, $\angle OAK = \angle OKA$ как углы при основании равнобедренного треугольника (по свойству). Так как $\angle MAB = 15°$, то $\angle OKA = 15°$, т.е. угол между прямыми CK и AB равен 15°.

3 способ. Пусть точка P – середина отрезка CK. Через точку M проведем прямую ME, параллельную прямой CK, $E \in AB$.

Рассмотрим треугольник CKB. M – середина стороны BC, так как AM – медиана треугольника ABC, P – середина стороны CK (по построению), значит, MP – средняя линия ΔCKB (по определению), следовательно, $MP \parallel KB$ (по свойству).



Рассмотрим четырехугольник $PMEK$. Так как $MP \parallel KE$, $PK \parallel ME$, то четырехугольник $PMEK$ – параллелограмм (по определению), следовательно, $PK = ME$ как противоположные стороны параллелограмма (по свойству).

Рассмотрим треугольник AME. $AM = 0{,}5CK$ по условию, $ME = PK = 0{,}5CK$, т.е. $AM = ME$, значит, ΔAME равнобедренный (по определению), следовательно, $\angle MAE = \angle MEA$ как углы при основании равнобедренного треугольника (по свойству). Так как $\angle MAB = 15°$, то $\angle MEA = 15°$.

$\angle AKC = \angle AEM$ как соответственные при $CK \parallel ME$ и секущей AB. Значит, $\angle AKC = 15°$, т.е. угол между прямыми CK и AB равен $15°$.

Ответ. 15°.