Задание № 2

Задача 1

Разность двух натуральных чисел равна 2023. Если у уменьшаемого зачеркнуть последнюю цифру, то получится вычитаемое. Найдите все такие числа.

Решение.

Пусть второе натуральное число рано x, а последняя цифра первого числа – y, тогда первое натуральное число равно $10x + y$. По условию задачи

$$10x + y - x = 2023,$$
$$9x + y = 2023,$$
$$9x = 2023 - y.$$

Так как в левой и правой части равенства стоят натуральные числа и $9x$ делится на 9, то и $2023 - y$ должно делиться на 9. Так как y – цифра, то $0 \le y \le 9$. Воспользуемся признаком делимости на 9: натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 9.

Если $y = 0$, то $2023 - y = 2023$, $2 + 0 + 2 + 3 = 7$, 7 не делится на 9, следовательно, $y \neq 0$.

Если $y = 1$, то $2023 - y = 2022$, $2 + 0 + 2 + 2 = 6$, 6 не делится на 9, следовательно, $y \neq 1$.

Если $y = 2$, то $2023 - y = 2021$, $2 + 0 + 2 + 1 = 5$, 5 не делится на 9, следовательно, $y \neq 2$.

Если $y = 3$, то $2023 - y = 2020$, $2 + 0 + 2 + 0 = 4$, 4 не делится на 9, следовательно, $y \neq 3$.

Если $y = 4$, то $2023 - y = 2019$, $2 + 0 + 1 + 9 = 12$, 12 не делится на 9, следовательно, $y \neq 4$.

Если $y = 5$, то $2023 - y = 2018$, $2 + 0 + 1 + 8 = 11$, 11 не делится на 9, следовательно, $y \neq 5$.

Если $y = 6$, то $2023 - y = 2017$, $2 + 0 + 1 + 7 = 10$, 10 не делится на 9, следовательно, $y \neq 6$.

Если $y = 8$, то $2023 - y = 2015$, $2 + 0 + 1 + 5 = 8$, 8 не делится на 9, следовательно, $y \neq 8$.

Если $y = 9$, то $2023 - y = 2014$, $2 + 0 + 1 + 4 = 7$, 7 не делится на 9, следовательно, $y \neq 9$.

При $y = 7$ $2023 - y = 2016$, $2 + 0 + 1 + 6 = 9$, следовательно, только при $y = 7$ $2023 - y$ делится на 9, значит, $y = 7$. Тогда $9x = 2016$, следовательно, $x = 2016:9 = 224$. Таким образом, получили, что второе число равно 224, а первое число равно $10 \cdot 224 + 7 = 2247$, следовательно, условию задачи удовлетворяет единственная пара натуральных чисел.

Ответ. 2247 и 224.

Задача 2

Решите уравнение $|7x+2|+|9x-5|=7-2x$.

Решение.

<u>1 способ.</u> Заметим, что $(7x + 2) – (9x – 5) = 7x + 2 – 9x + 5 = 7 – 2x$, следовательно, решением уравнения $|7x+2|+|9x-5|=7-2x$ являются те значения x, при которых модуль $|7x + 2|$ раскрывается со знаком «+», а модуль $|9x – 5|$ раскрывается со знаком «–», то есть уравнение $|7x+2|+|9x-5|=7-2x$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} 7x+2\geq 0, \\ 9x-5\leq 0. \end{cases}$ Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 7x+2\geq 0, \\ 9x-5\leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x\geq -2, \\ 9x\leq 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -\dfrac{2}{7}, \\ x\leq \dfrac{5}{9}. \end{cases}$$

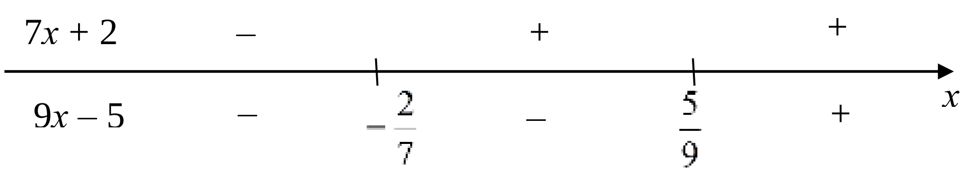
Так как $-\frac{2}{7}<\frac{5}{9}$, то решением системы является $-\frac{2}{7}\leq x\leq \frac{5}{9}$.

<u>2 способ.</u> Найдем значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль.

$$7x + 2 = 0,\ 7x = –2,\ x = -\frac{2}{7}.$$

$$9x – 5 = 0,\ 9x = 5,\ x = \frac{5}{9}.$$

Числа $-\frac{2}{7}$ и $\frac{5}{9}$ разбивают числовую ось на три промежутка. Определим знак каждого из выражений $7x + 2$ и $9x – 5$ в каждом из этих промежутков.



Решим уравнение на каждом из полученных промежутков.

1) $\begin{cases} x<-\dfrac{2}{7}, \\ -(7x+2)+(-(9x-5))=7-2x; \end{cases}$

$$\begin{cases} x < -\dfrac{2}{7}, \\ -7x - 2 - 9x + 5 = 7 - 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -\dfrac{2}{7}, \\ -14x = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -\dfrac{2}{7}, \\ x = -\dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

Так как $-\dfrac{2}{7}$ не удовлетворяет неравенству $x < -\dfrac{2}{7}$, то система решений не имеет.

2) $$\begin{cases} -\dfrac{2}{7} \le x \le \dfrac{5}{9}, \\ 7x + 2 + (-(9x - 5)) = 7 - 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{7} \le x \le \dfrac{5}{9}, \\ 7x + 2 - 9x + 5 = 7 - 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{7} \le x \le \dfrac{5}{9}, \\ 7 = 7. \end{cases}$$

Так как во второй строке системы мы получили верное числовое равенство, то решением системы является промежуток $-\dfrac{2}{7} \le x \le \dfrac{5}{9}$.

3) $$\begin{cases} x > \dfrac{5}{9}, \\ 7x + 2 + 9x - 5 = 7 - 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \dfrac{5}{9}, \\ 18x = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \dfrac{5}{9}, \\ x = \dfrac{5}{9}. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{5}{9}$ не удовлетворяет неравенству $x > \dfrac{5}{9}$, то система решений не имеет.

Ответ. $-\dfrac{2}{7} \le x \le \dfrac{5}{9}$.

Задача 3

Пусть $y - x = 5$, $xy = 1$. Найдите значение выражения $x^7y + xy^7$, не вычисляя значений x и y в отдельности.

Решение.

<u>1 способ.</u> Преобразуем выражение $x^7y + xy^7$:

$$x^7y + xy^7 = xy(x^6 + y^6) = xy(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) =$$

$$= xy(x^2 - 2xy + y^2 + 2xy)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 3x^2y^2) =$$

$$= xy((x - y)^2 + 2(xy))((x^2 + y^2)^2 - 3(xy)^2) = xy((y - x)^2 + 2(xy))(((y - x)^2 + 2(xy))^2 - 3(xy)^2).$$

Подставляя в полученное выражение вместо $(y - x)$ его значение 5, а вместо xy его значение 1, находим значение выражения $x^7y + xy^7$:

$$x^7y + xy^7 = 1\cdot(5^2 + 2\cdot1)((5^2 + 2\cdot1)^2 - 3\cdot1^2) = 2\cdot(13^2 - 8) = 27\cdot(729 - 3) = 27\cdot726 = 19602.$$

<u>2 способ.</u> Так как $x^7y + xy^7 = xy(x^6 + y^6)$, значение произведения xy нам известно, найдем значение выражения $x^6 + y^6$.

Воспользуемся равенством $y - x = 5$, тогда $(y - x)^2 = 5^2$, $y^2 - 2xy + x^2 = 25$, откуда найдем значение выражения $x^2 + y^2$:

$$x^2 + y^2 = 25 + 2xy = 25 + 2\cdot1 = 27.$$

Так как $x^2 + y^2 = 27$, то $(x^2 + y^2)^3 = 27^2$, $x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = 19683$, откуда найдем значение выражения $x^6 + y^6$:

$$x^6 + y^6 = 19683 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) = 19683 - 3(xy)^2(x^2 + y^2) = 19683 - 3\cdot1^2\cdot27 =$$

$$= 19683 - 81 = 19602.$$

Окончательно получаем:

$$x^7y + xy^7 = xy(x^6 + y^6) = 1\cdot19602 = 19602.$$

Ответ. $x^7y + xy^7 = 19602$.

Задача 4

Производительность труда при выполнении некоторой работы повысилась на 40%. На сколько процентов сократилось время, необходимое для выполнения этой работы?

Решение.

Обозначим объем работы A. Пусть производительность труда была равна x, а время, необходимое на выполнение работы объема A, равно y. Тогда после повышения на 40% производительность стала $x_1 = x + 0,4x = 1,4x$, а время, необходимое для выполнения работы объема A стало равно y_1. Так как объем работы не изменился, то $A = xy = x_1y_1$. Получаем уравнение:

$$xy = 1{,}4xy_1;$$
$$y = 1{,}4y_1;$$
$$y_1 = \frac{5}{7}y.$$

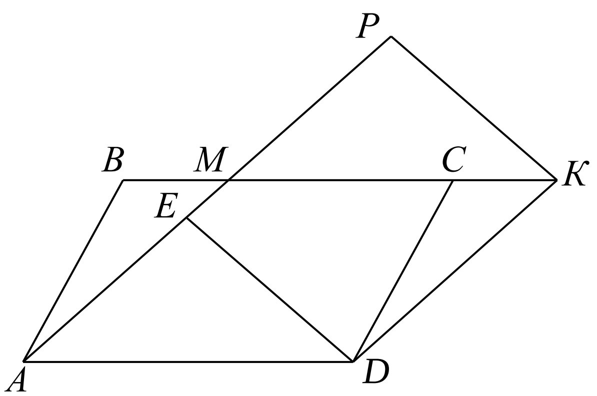
Таким образом, время, необходимое для выполнения работы объема A сократилось на $y - y_1 = y - \frac{5}{7}y = \frac{2}{7}y$. Значит, время сократилось на $\frac{2}{7} \cdot 100\% = \frac{200}{7}\% = 28\frac{4}{7}\%$.

Ответ. На $28\frac{4}{7}\%$.

Задача 5

В параллелограмме $ABCD$ угол A тупой. На стороне BC взята точка M, а через вершину D проведена прямая, параллельная AM и пересекающая луч MC в точке K. Точка E принадлежит отрезку AM. На прямой ME отмечена точка P так, что $DE \parallel KP$. Сравните площади невыпуклых пятиугольников $ABMED$ и $DKPMC$.

Решение.



$S_{ABMED} = S_{ABM} + S_{AED}$, $S_{DKPMC} = S_{DCK} + S_{MPK}$.

$DK \| AM$ по условию, $AD \| BC$ как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$, поэтому $AD \| MK$, следовательно, $AMKD$ – параллелограмм по определению, значит, $AD = MK$ по свойству параллелограмма.

Рассмотрим ΔABM и ΔDCK. $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$, $\angle ABM = \angle DCK$ как соответственные при $AB \| CD$ и секущей BK. Так как $BC = AD = MK$, $BC = BM + MC$, $MK = MC + CK$, то $BM = CK$. Значит, $\Delta ABM = \Delta DCK$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $S_{ABM} = S_{DCK}$.

$DE \| KP$ по условию, $KD \| AM$ как противоположные стороны параллелограмма $AMKD$, поэтому $KD \| EP$, следовательно, $EPKD$ – параллелограмм по определению, значит, $ED = PK$ по свойству параллелограмма.

Рассмотрим ΔAED и ΔMPK. $AD = MK$, $ED = PK$. $\angle EAD = \angle PMK$ как соответственные при $AD \| CB$ и секущей AM, $\angle AED = \angle MPK$ как соответственные при $ED \| PK$ и секущей AP, По теореме о сумме углов треугольника $\angle EAD + \angle AED + \angle ADE = 180°$, $\angle PMK + \angle MPK + \angle MKP = 180°$, $\angle EAD = \angle PMK$,

$\angle AED = \angle MPK$, следовательно, $\angle ADE = \angle MKP$. Значит, $\Delta AED = \Delta MPK$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $S_{AED} = S_{MPK}$.

Так как $S_{ABMED} = S_{ABM} + S_{AED}$, $S_{DKPMC} = S_{DCK} + S_{MPK}$, $S_{ABM} = S_{DCK}$, $S_{AED} = S_{MPK}$, то $S_{ABMED} = S_{DKPMC}$.

Ответ. $S_{ABMED} = S_{DKPMC}$.