Задание № 3.

Задача 1

Верно ли, что число $2014 \cdot 2017 \cdot 2020 \cdot 2023 + 81$ является точным квадратом? (ответ обосновать)

Решение.

1 способ.

$$2014 \cdot 2017 \cdot 2020 \cdot 2023 + 81 = 2014 \cdot (2014 + 3) \cdot (2014 + 6) \cdot (2014 + 9) + 81 =$$

(перемножаем первый и четвертый множители и второй и третий)

$$= (2014^2 + 9 \cdot 2014) \cdot (2014^2 + 9 \cdot 2014 + 18) + 81 =$$

$$= (2014^2 + 9 \cdot 2014) \cdot ((2014^2 + 9 \cdot 2014) + 18) + 81 =$$

$$= (2014^2 + 9 \cdot 2014)^2 + 2 \cdot 9 \cdot (2014^2 + 9 \cdot 2014) + 9^2 = (2014^2 + 9 \cdot 2014 + 9)^2.$$

2 способ. Докажем более общее утверждение: если к произведению четырех натуральных чисел, среди которых каждое следующее на 3 больше предыдущего, прибавить 81, то получим квадрат некоторого натурального числа. Пусть наименьшее из чисел – x. Тогда получим, выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям 1 способа,

$$x \cdot (x + 3) \cdot (x + 6) \cdot (x + 9) + 81 = (x^2 + 9x) \cdot (x^2 + 9x + 18) + 81 =$$

$$= (x^2 + 9x)^2 + 2 \cdot 9 \cdot (x^2 + 9x) + 9^2 = (x^2 + 9x + 9)^2.$$

При $x = 2014$ имеем, $2014 \cdot 2017 \cdot 2020 \cdot 2023 + 81 = (2014^2 + 9 \cdot 2014 + 9)^2$.

Ответ. Верно.

Задача 2

В параллели восьмых классов в школе провели контрольную работу по геометрии. Оказалось, что средняя оценка у мальчиков – 3,5; у девочек – 4,2; у всех вместе – 3,76. Сколько мальчиков и сколько девочек писало контрольную работу, если восьмиклассников в школе больше 40 и меньше 80 человек?

Решение.

Пусть x – количество мальчиков, писавших контрольную работу, а y – количество девочек. Тогда всего учеников, которые писали контрольную работу, – $x + y$. Учитывая, что средняя оценка мальчиков – 3,5, средняя оценка девочек – 4,2, а средняя оценка всех учеников, писавших контрольную работу, – 3,76, получаем, что сумма всех оценок мальчиков равна $3{,}5x$, сумма всех оценок девочек – $4{,}2y$, а сумма оценок всех учеников, писавших контрольную работу, – $3{,}76\cdot(x + y)$ или $3{,}5x + 4{,}2y$. Получаем уравнение:

$$3{,}76\cdot(x + y) = 3{,}5x + 4{,}2y;$$

$$3{,}76x + 3{,}76y = 3{,}5x + 4{,}2y;$$

$$3{,}76x - 3{,}5x = 4{,}2y - 3{,}76y;$$

$$0{,}26x = 0{,}44x;$$

$$26x = 44y;$$

$$13x = 22y.$$

Так как x и y – количество мальчиков и девочек, писавших контрольную работу, соответственно, то x и y – числа натуральные, а 13 и 22 – числа взаимно простые, следовательно, y кратно 13, а x кратно 22, то есть $y = 13m$, а $x = 22m$. Тогда $x + y = 22m + 13m = 35m$. По условию задачи $40 < x + y < 80$, то есть $40 < 35m < 80$, значит, $1\frac{1}{7} < m < 2\frac{2}{7}$. Учитывая, что m – число натуральное, получаем, что $m = 2$. Таким образом, контрольную работу писало $35\cdot2 = 70$ учеников, из которых $22\cdot2 = 44$ мальчика и $13\cdot2 = 26$ девочек.

Ответ. 44 мальчика и 26 девочек.

Задача 3

Решите уравнение $2x^4 + x^2(x + 2) = 3(x + 2)^2$.

Решение.

1 способ. Представим $x^2(x + 2)$ как $3x^2(x + 2) - 2x^2(x + 2)$ и воспользуемся методом группировки для разложения на множители. Получим

$$2x^4 + 3x^2(x + 2) - 2x^2(x + 2) - 3(x + 2)^2 = 0;$$

$$2x^2(x^2 - (x + 2)) + 3(x + 2)(x^2 - (x + 2)) = 0;$$

$$(2x^2 + 3(x + 2))(x^2 - x - 2) = 0;$$

$$(2x^2 + 3x + 6)(x^2 - x - 2) = 0;$$

$2x^2 + 3x + 6 = 0$ или $x^2 - x - 2 = 0;$

$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 6 < 0,$ следовательно, уравнение не имеет действительных корней

$x^2 - 2x + x - 2 = 0;$

$x(x - 2) + (x - 2) = 0;$

$(x - 2)(x + 1) = 0;$

$x - 2 = 0$ или $x + 1 = 0;$

$x = 2.$ $x = -1.$

<u>2 способ</u>. Покажем сначала, что $x = -2$ корнем уравнения не является. При подстановке $x = -2$ в исходное уравнение получаем

$$2 \cdot (-2)^4 + (-2)^2 \cdot (-2 + 2) = 3 \cdot (-2 + 2)^2;$$

$$32 = 0 \text{ – неверное числовое равенство,}$$

значит, $x = -2$ корнем уравнения не является, следовательно, $x + 2 \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $(x + 2)^2 \neq 0$, получим

$$2 \cdot \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + \frac{x^2}{x+2} - 3 = 0.$$

Пусть $\frac{x^2}{x+2} = y$, тогда уравнение примет вид

$$2y^2 + y - 3 = 0.$$

Так как сумма коэффициентов уравнения равна $2 + 1 - 3 = 0$, то корнем уравнения является $y = 1$. Тогда, так как в силу теоремы Виета, произведение корней уравнения равно $-\frac{3}{2}$, то второй корень уравнения $y = -\frac{3}{2}$. Выполняя обратную замену, получаем два уравнения

$$\frac{x^2}{x+2} = 1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{x+2} = -\frac{3}{2}.$$

Учитывая, что $x + 2 \neq 0$, каждое уравнение умножим на $x + 2$, а второе уравнение умножим еще на 2. Получим

$x^2 = x + 2;$ $2x^2 = -3(x + 2);$

$x^2 - x - 2 = 0;$ $2x^2 + 3x + 6 = 0;$

$x^2 - 2x + x - 2 = 0;$ $D = 3^2 - 4\cdot2\cdot6 = -3 < 0,$

$x(x - 2) + (x - 2) = 0;$ нет действительных корней.

$(x - 2)(x + 1) = 0;$

$x - 2 = 0$ или $x + 1 = 0;$

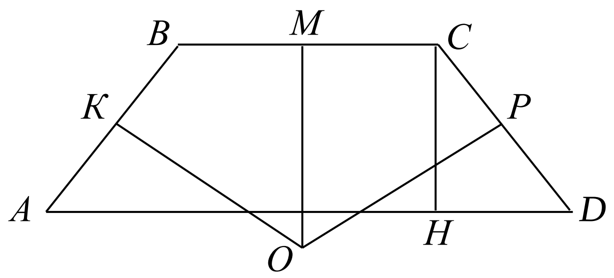
$x = 2.$ $x = -1.$

Ответ. $x = -1$, $x = 2$.

Задача 4

В трапеции $ABCD$ AD – большее основание. Прямые, проходящие через середины сторон AB, BC, DC перпендикулярно к этим сторонам, пересекаются в точке O; $\angle BCD = 150°$, $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Решение.



Пусть K – середина AB, M – середина BC, P – середина CD. По условию задачи $KO \perp AB$, $MO \perp BC$, $PO \perp CD$, значит, KO – серединный перпендикуляр к отрезку AB, MO – серединный перпендикуляр к отрезку BC, PO – серединный перпендикуляр к отрезку CD, следовательно, $AO = OB$, $BO = OC$, $CO = OD$ по свойству серединного перпендикуляра к отрезку. Таким образом, $AO = OB = OC = OD$, то есть точка O равноудалена от всех вершин трапеции $ABCD$, а поэтому является центром описанной около $ABCD$ окружности.

Так как около трапеции $ABCD$ можно описать окружность, то $ABCD$ – равнобедренная трапеция (по признаку), значит, $AB = CD = a$.

Проведем высоту трапеции CH. По свойству трапеции $\angle BCD + \angle ADC = 180°$, тогда $\angle ADC = 180° - \angle BCD = 180° - 150° = 30°$.

Рассмотрим ΔCDH. $\angle CHD = 90°$, $\angle HDC = 30°$, тогда $CH = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$ по свойству прямоугольного треугольника с острым углом в 30°.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{b + c}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a(b + c)}{4}.$$

Ответ. $S_{ABCD} = \dfrac{a(b + c)}{4}$.

Задача 5

В четырех семьях мужья старше своих жен на 3 года. Борис моложе Дарьи на 2 года, Василий и Татьяна – ровесники. Возрасты Андрея и Марии – точные квадраты. Произведение возрастов Семена и Дарьи – нечетное число. Андрею и Варваре вместе 58 лет, а Борису и Марии вместе 52 года, Семен, Варвара и Мария окончили школу в одном году. Кто на ком женат?

Решение.

Будем решать задачу методом исключения. Рассмотрим разность квадратов двух последовательных натуральных чисел:

$$(n + 1)^2 – n^2 = (n + 1 – n)(n + 1 + n) = 2n + 1 > 3 \text{ при } n > 1,$$

а $n = 1$ не рассматривается по условию задачи, следовательно, Андрей и Мария не могу быть женаты по условию задачи, так как муж старше жены на 3 года. Так же не могут быть женаты Василий и Татьяна, так как по условию задачи они ровесники. Не могут быть женаты и Борис с Дарьей, так как Борис моложе Дарьи по условию задачи.

Так как в каждой семье муж старше жены на 3 года, а 3 – число нечетное, то возраст мужа и возраст жены в одной семье – числа разной четности (один возраст – число четное, другой возраст – число нечетное). Произведение четного числа на нечетное является числом четным, а сумма четного числа и числа нечетного является числом нечетным. Так как 52 и 58 – числа четные, то Борис и Мария не могут быть женаты, Андрей и Варвара не могут быть женаты (по условию задачи сумма их возрастов является числом четным). А так как произведение возрастов Семена и Дарьи является числом нечетным, то Семен и Дарья тоже не могут быть женаты.

Так как Семен, Варвара и Мария окончили школу в одном году, то Семен не может быть старше Варвары и Марии на 3 года, а поэтому Семен и Варвара не могут быть женаты и Семен и Мария не могут быть женаты.

Внесем все полученные исключения в таблицу, в которой на пересечении строки и столбца поставим «×», если указанные в строке мужчина и в столбце женщина не могут быть женаты.

женщины / мужчины	Дарья	Татьяна	Мария	Варвара
Борис	×		×	
Василий		×		
Андрей			×	×
Семен	×		×	×

Из таблицы получаем, что Семен женат на Татьяне, а Мария замужем за Василием, так как все остальные варианты для Семена и Марии исключены. Тогда не могут быть женаты Татьяна и Борис, Татьяна и Андрей, Василий и Дарья, Василий и Варвара. Внесем эти данные в полученную таблицу, поставив на пересечении строки и столбца «+», если указанные в строке мужчина и в столбце женщина женаты.

женщины / мужчины	Дарья	Татьяна	Мария	Варвара
Борис	×	×	×	
Василий	×	×	+	×
Андрей		×	×	×
Семен	×	+	×	×

Из таблицы получаем, что Андрей и Дарья женаты, а также Борис и Варвара женаты.

Ответ. Борис женат на Варваре, Василий – на Марии, Андрей – на Дарье, Семен – на Татьяне.